Phys.
o.
77 d

Lehrbuch

der

Statik fester Körper
(Geostatik)

mit

291 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren,
und einem ausführlichen Formelnverzeichnis

nebst einer

Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben.

Zum

Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie
zum Selbststudium u. Nachschlagen

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Richard Klimpert.

Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1888.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch der Statik fester Körper bildet einen für sich abgeschlossenen Band von Kleyers mathematisch-technisch-naturwissenschaftlicher Encyklopädie und umfasst zunächst die Lehre vom Gleichgewichtszustand äusserer, auf einen materiellen Punkt einwirkender Kräfte und in zweiter Reihe die Bedingungen, unter denen die auf die sog. einfachen Maschinen einwirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, während die Lehre vom Gleichgewicht der zwischen den kleinsten Teilchen eines und desselben Körpers wirksamen sog. Kohäsionskräfte in einem besonderen Band dieser Encyklopädie ihre Erledigung findet.

Dem Zweck des ganzen Werkes entsprechend ist das im vorliegenden Band gebotene Material in scharf getrennten, logisch aufeinander folgenden Abschnitten vorgeführt, und zwar ist die Form der Frage und Antwort gewählt, indem sich erwarten lässt, dass durch diese Form eine Ermüdung beim Studium, wie sie so häufig bei der Benützung der in gewöhnlicher Vortragsweise gehaltenen Lehrbücher eintritt, vermieden, und die Wissbegierde des Lernenden stets wach erhalten wird. Im übrigen ist es mein Bestreben gewesen, alle in dem vorliegenden Band enthaltenen Lehren in möglichst leicht verständlicher Sprache so zu bieten, dass nur ein geringes Mass von Vorkenntnissen zum Verständnis des Gebotenen nötig ist, und dass jeder, der einige Uebung in Arithmetik und Algebra besitzt, und mit den Elementen der Geometrie betraut ist, das Buch mit Erfolg benützen wird.

Wer darauf angewiesen ist, sein eigener Lehrer aus Büchern zu werden, der wird manches Lehrbuch der Mechanik unbefriedigt aus der Hand legen, weil die in demselben enthaltenen mathematischen Formeln, welche die physikalischen Gesetze auf übersichtliche Weise darzustellen bestimmt sind und sich dem Gedächtnis leichter einprägen als ein in langatmige Worte gefasstes Gesetz, nicht immer entwickelt sind, wie dies nach meiner Erfahrung ganz besonders gilt von den Gesetzen über die Lage des Schwerpunkts bei Linien, Flächen und Körpern. Die Gesetze und Formeln, welche bestimmen, wo in den einzelnen Fällen der Schwerpunkt liegt, fehlen in keinem Buch, wo aber diese Gesetze und Formeln herkommen, das ist noch lange nicht in jedem Buch gesagt und bleibt somit für den Anfänger und Autodidakten ein Geheimnis. Er muss in solchem Fall die gegebenen Formeln auf „Treu und Glauben" hinnehmen, ohne prüfen zu können,

ob dieselben überall korrekt sind und ob dieselben nicht auch eine andere mathematische Ausdrucksweise als die gegebene zulassen, die dasselbe enthält. Man schafft in solchem Fall ein Gedächtniswerk, welches in der Seele des Lernenden unverarbeitet bleibt und ihn nicht befähigt, sich später selbst zu helfen. Ueberdies kann unmöglich gefordert werden, dass ein Nichtfachmann alle die in der Physik vorkommenden mathematischen Formeln in seinem Gedächtnis aufspeichert, die selbst der in diesem Gebiet Geübte nicht alle auf die Dauer behält; aber es kann erreicht werden, dass der Lernende zu einem solchen Beherrschen des vorliegenden Stoffes gebracht wird, dass er, wenn eine zu lösende Aufgabe an ihn herantritt, auch einmal selbständig die zur Lösung notwendige Formel zu entwickeln im stande ist, dass er den rechten Weg einzuschlagen weiss, auf welchem er zu dem gewünschten Ziel gelangt. Um solches zu erreichen, sind im folgenden die notwendigen Formeln nicht allein gegeben, sondern sie sind entwickelt, selbst in den Fällen, wo eine solche Entwickelung die Kenntnis der verschiedensten Regeln über Transformationen von Gleichungen bedingt, welche dem Ungeübten vielleicht fremd sind. Doch auch in solchem Fall ist Rat geschafft, indem alle zur Anwendung kommenden Regeln, Formeln, Gesetze etc., gleichwie auch die vorkommenden technischen Ausdrücke und Fremdwörter, als auch die in andere Gebiete der Physik eingreifenden Begriffe, welche zum vollen Verständnis der Lehren der Statik nötig sind, stets an geeigneter Stelle durch kurze, aber vollständige Erklärungen ihre Erledigung finden. Dabei ist überall die Grenze des Elementaren eingehalten und alles fortgelassen, was sich nur mit Hilfe der höheren Mathematik entwickeln lässt.

Die gelösten Aufgaben zeigen ausführlich, wie die vorher gegebenen Formeln und Gesetze zur praktischen Anwendung kommen und sind das beste Mittel dafür, dass die Formeln und Gesetze in Fleisch und Blut übergehen, dass sie so geläufig werden wie das „Einmaleins" und ein richtiges und sicheres Lösen der analogen ungelösten Aufgaben nicht ausbleiben kann, vorausgesetzt, dass der Lernende die Mühe nicht scheut und den Gang der gegebenen Lösungen Schritt für Schritt verfolgt.

Es ist nirgends versäumt, durch geeignete Zeichnungen das Verständnis zu fördern, und die grosse Zahl und gute Ausführung derselben ist ein Beweis dafür, dass neben dem Verfasser auch der Verleger ernstlich bestrebt gewesen ist, etwas Gutes zu schaffen.

Bremen, den 1. September 1887.

Richard Klimpert.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1. **Ueber Statik, Gleichgewicht, Ruhe und Bewegung im allgemeinen** 1—4
2. **Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften im allgemeinen** . . 4—6
3. **Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von solchen Kräften, welche auf einen Punkt in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen wirken.**
 a. Ueber die Beziehungen, welche zwischen mehreren in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften und deren Resultanten bestehen . 6—8
 b. Gelöste Aufgaben über die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken . 8—11
 c. Ungelöste Aufgaben über die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken . 11—12
4. **Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von solchen Kräften, welche unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirken und deren Richtungen in ein und derselben Ebene liegen.**
 a. Ueber die Beziehungen, welche zwischen zwei unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräften und deren Resultante bestehen . . . 12—21
 b. Ueber die Zusammensetzung zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräfte . 21
 c. Gelöste Aufgaben über das Parallelogramm der Kräfte 22—23
 d. Ueber die Zerlegung einer Kraft in zwei unter einem Winkel auf einen Punkt wirkende Seitenkräfte . 34
 α). Gelöste Aufgaben über die Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten 34—43
 β). Ungelöste Aufgaben über das Parallelogramm der Kräfte und die Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten 43—45
 e. Ueber die Beziehungen, welche zwischen mehreren unter beliebigen Winkeln auf einen Punkt in ein und derselben Ebene wirkenden Kräften und deren Resultante bestehen . 45—50
 α). Gelöste Aufgaben über die Zusammensetzung von drei, vier und mehr Kräften, die in einer Ebene auf einen Punkt wirken 50—60
 β). Ungelöste Aufgaben über die Zusammensetzung von mehr als zwei Kräften, die in einer Ebene auf einen Punkt wirken 60—61

Seite

f. Ueber die Beziehungen, welche zwischen mehreren unter beliebigen Winkeln auf einen Punkt wirkenden Kräften, deren Richtungen nicht in ein und derselben Ebene liegen, und deren Resultante bestehen 61—66
α). Gelöste Aufgaben über das Kräfteparallelepipedon 66—75
β). Ungelöste Aufgaben über das Kräfteparallelepipedon 75

5. **Ueber die Zusammensetzung von Parallelkräften.**
a. Ueber die Beziehungen, welche zwischen gleichgerichteten Parallelkräften und deren Resultante bestehen 76—80
b. Ueber die Beziehungen, welche zwischen entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften und deren Resultante bestehen 81—83
α). Gelöste Aufgaben über die Zusammensetzung gleich und entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte 83—90
β). Ungelöste Aufgaben über die Zusammensetzung gleich- und entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte 90—91

6. **Ueber statische Momente.**
a. Ueber die statischen Momente von Kräften, welche in ein und derselben Ebene wirken, im allgemeinen 92—97
b. Ueber die statischen Momente von Kräften, welche in ein und derselben Ebene nach einer Seite der Angriffslinie wirken 98—102
c. Ueber die statischen Momente von Kräften, welche in ein und derselben Ebene nach entgegengesetzten Seiten der Angriffslinie wirken 103—106
d. Ueber die statischen Momente von Kräften in verschiedenen Ebenen . . 107—113
α). Gelöste Aufgaben über statische Momente 113—125
β). Ungelöste Aufgaben über statische Momente 126—128

. **Ueber Kräftepaare.**
a. Ueber die Kräftepaare und deren Momente, Ebenen und Achsen, sowie über ihr Bewegungsvermögen im allgemeinen 128—131
b. Ueber die Veränderungen, welche man an Kräftepaaren vornehmen kann, ohne dass die Wirkung derselben geändert wird 132—135
c. Ueber die Bedingungen des Gleichgewichts von Kräftepaaren, die in ein und derselben Ebene wirken 135—137
d. Ueber Kräftepaare in parallelen Ebenen 138
e. Ueber Kräftepaare in nicht parallelen Ebenen 139—141
f. Ueber mehr als zwei Kräftepaare in nicht parallelen Ebenen 141—143
α). Gelöste Aufgaben über Kräftepaare 144—146
β). Ungelöste Aufgaben über Kräftepaare 146—147

8. **Ueber die Vereinigung von Kräften, welche an beliebig vielen, fest miteinander verbundenen Punkten nach den verschiedensten Richtungen wirksam sind.**
a. Ueber die Vereinigung von Kräften, die nach beliebigen Richtungen in einer Ebene wirken . 147—153
b. Ueber die Vereinigung von Kräften, die an beliebig vielen Punkten nach den verschiedensten Richtungen im Raum wirken 154—159
α). Gelöste Aufgaben über die Vereinigung verschieden gerichteter Kräfte im Raum . 159—168

Seite

β). Ungelöste Aufgaben über die Vereinigung verschieden gerichteter Kräfte im Raum . 168

9. **Vom Schwerpunkt.**

a. Allgemeines über den Schwerpunkt 169—171

b. Ueber die Lage des Schwerpunkts und deren Ermittelung auf empirischem Weg . 172—175

c. Schwerpunktsbestimmungen für Linien, ebene Figuren und Körper durch Konstruktion und Rechnung.

α). Schwerpunkte von Linien 175—180

β). „ „ Flächen 180—195

γ). „ „ Körpern 195—206

δ). Gelöste Aufgaben über die Lage des Schwerpunkts bei Linien, Flächen und Körpern 206—225

ε). Ungelöste Aufgaben über die Lage des Schwerpunkts bei Linien, Flächen und Körpern 226—227

10. **Ueber Gleichgewicht und Standfestigkeit.**

a. Die verschiedenen Arten des Gleichgewichts des in einem Punkt unterstützten Körpers . 228—238

b. Ueber Standfestigkeit oder Stabilität der Körper 238—248

c. Gelöste Aufgaben über die Standfestigkeit der Körper 248—265

d. Ungelöste Aufgaben über die Standfestigkeit der Körper 265—268

11. **Von den einfachen Maschinen oder mechanischen Potenzen.**

a. Von den Maschinen überhaupt 268—270

b. Der Hebel und die Bedingungen des Gleichgewichts an demselben . . . 271—282

α). Gelöste Aufgaben über den physischen Hebel 282—290

β). Ungelöste Aufgaben über den physischen Hebel 290—292

c. Die auf dem Prinzip des Hebels beruhenden Wagen.

α). Die gleicharmige oder gemeine Wage 293—305

β). Die ungleicharmigen oder Schnellwagen 306—310

γ). Die Zeigerwagen . 311—312

δ). Zusammengesetzte oder Brückenwagen 312—318

ε). Die Wage des Roberval (Tafelwage) 319—322

ζ). Gelöste Aufgaben . 322—328

η). Ungelöste Aufgaben . 328—329

d. Von der Rolle und den Rollenverbindungen.

α). Die feste und lose Rolle 329—334

β). Die Rollen- und Flaschenzüge 334—342

γ). Gelöste Aufgaben über Rollen- und Flaschenzüge 343—349

δ). Ungelöste Aufgaben über Rollen- und Flaschenzüge 350—351

e. Das Rad an der Welle oder das Wellrad.

α). Erklärung des Wellrads, Verhältnis zwischen Kraft und Last, die verschiedenen Arten des Wellrads 351—360

β). Von den Verbindungen des Wellrads oder den Räderwerken . . 360—375

γ). Gelöste Aufgaben . 376—391

δ). Ungelöste Aufgaben . 391—394

f. Ueber die schiefe Ebene und die Elementarmaschinen, welche sich als schiefe Ebenen auffassen lassen. Seite
α). Von der schiefen Ebene 395—404
β). Vom Keil und seiner Anwendung 405—412
γ). Von der Schraube und ihrer Anwendung 412—427
δ). Satz oder Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten 428—432
ε). Gelöste Aufgaben . 432—448
ζ). Ungelöste Aufgaben 448—450

Zusammenstellung der in diesem Buch vorkommenden Formeln 451—460

Berichtigungen.

Seite 10. Zeile 25 von unten lies „$x = 2933\frac{1}{3}$ kg“ statt „$x = 1233\frac{1}{3}$ kg“

„ 19. Setze in Fig. 18 den Buchstaben *c* an die rechte Ecke des Parallelogramms EC.

„ 27. Zeile 9 von oben lies „Diagonale AD“ statt „Diagonale AB.“

„ 29. Zeile 17 von oben lies „ist gleich gross“ statt „ist gleich.“

Zeile 24 „ „ „ „ „ „ „ „ „

„ 33. Zeile 20 von unten lies „Gleichungen 1 und 3“ anstatt „1 und 2.“

„ 34. Zeile 2 von unten (links) lies „Erkl. 26“ anstatt „Erkl. 24.“

„ 46. Zeile 14 von oben (rechts) lies „Resultante r_1“ anstatt „Resultante r.“

„ 81. Zeile 3 von unten (rechts) lies „P“ statt „P_1“

„ 83. Unterste Zeile (rechts) lies „$\frac{q \cdot xy}{R}$“ statt „$\frac{q : xy}{R}$“

„ 84. Zeile 6 von oben (rechts) lies „$\overline{ac} : \overline{ab} = 50 : 130$

oder $\overline{ac} = \frac{85 \cdot 50}{130}$ oder $\overline{ac} = 32{,}7$ cm“

„ 100. Zeile 17 von unten (rechts) lies „$P_2 (l_2 - l_1)$“ statt „$P_2 (l_2 l_1)$“

„ 131. Zeile 2 von unten (links) lies „P und $P_{\prime\prime}$“ statt „P, und $P_{\prime\prime}$“

„ 137. Zeile 7 „ „ (rechts) „ „mR“ statt „mR_1“

„ 6 „ „ „ „nR_1“ „ „nR“

„ 174. In Fig. 136 muss der Angriffspunkt der Kraft P mit A bezeichnet werden.

„ 246. In Fig. 204 ist der Mittelpunkt der Halbkugel mit 0 zu bezeichnen.

„ 269. Erkl. 196 letzte Zeile lies „überträgt“ statt „übertragen.“

„ 272. Zeile 21 von unten lies „(Fig. 218)“ statt „(Fig. 219).“

„ 275. Die drei Gleichungen müssen lauten: „$P \cdot \overline{bc} : p \cdot \overline{ac}$

und wenn $P : p = \overline{ac} : \overline{bc}$

so folgt $P \cdot \overline{bc} = p \cdot \overline{ac}$“

„ 276. Zeile 20 von unten lies „Verlängert man diesen Hebel bis e“ statt „c“.

„ 298. Zeile 5 von unten lies „S^1“ statt „S“.

„ 299. Zeile 13 von unten lies „Schwerpunkte“ statt „Stützpunkte“.

„ 314. In Fig. 271 ist „Δ“ statt „δ_1“ zu setzen.

„ 369. Zeile 21 von oben lies „$r = \frac{an}{n+1}$“ statt „$r = \frac{a}{n+1}$“

Litteraturverzeichnis.

Die von dem Verfasser benützten Werke sind:

Ballauf, L., Die Grundlehren der Physik.

Buff, H., Lehrbuch der physikalischen Mechanik.

Burg, A., Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre.

Decher, G., Handbuch der rationellen Mechanik.

Emsmann, H., Physikalische Aufgaben.

Fliedner, C., Aufgaben aus der Physik.

Frick, J., Physikalische Technik.

Gehlers Physikalisches Wörterbuch.

Hellmuth, J. H., Elementar-Naturlehre.

Heussi, J., Der physikalische Apparat.

Huber, Ph., Mechanik für Gewerbe- und Handwerkerschulen.

Kleyer, A., Mathematisch-techn.-naturwissenschaftliche Encyklopädie.

Mousson, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung.

Müller-Pouillet-Pfaundlers Lehrbuch der Physik.

Reis, P., Lehrbuch der Physik.

Ritter, A., Lehrbuch der technischen Mechanik.

Schellen, H., Die Schule der Elementarmechanik und Maschinenlehre.

Weinhold, Physikalische Demonstrationen.

Weitzel, C. G., Mechanik.

Wernicke, Ad., Lehrbuch der Mechanik fester Körper.

Wrobel, E., Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung.

Wüllner, Ad., Lehrbuch der Experimentalphysik.

Statik

oder die

Lehre vom Gleichgewicht fester Körper (Geostatik).

I). Ueber Statik, Gleichgewicht, Ruhe und Bewegung im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter Statik?

Erkl. 1. Das Wort Statik kommt vom griech. statikos, d. h. stehen machen, von stēnai, stehen.

Erkl. 2. Alle Körper erscheinen uns, je nach ihrem Aggregatzustand (siehe Erkl. 2a), entweder fest oder tropfbarflüssig oder gasförmig, und darnach unterscheidet man:
a) die Statik der festen Körper, die Geostatik (vom griech. gaia, gē = Erde) oder Erdgleichgewichtslehre;
b) die Statik der tropfbarflüssigen Körper, die Hydrostatik (vom griech. hydōr = Wasser) oder Wassergleichgewichtslehre, und
c) die Statik der gasförmigen Körper, die Aërostatik (vom griech. aër = Luft), die Luftgleichgewichtslehre.

Erkl. 2a. Da man die Materie oder den Stoff eines jeden Körpers in kleinere Teile zerlegen kann, so folgt daraus, dass jeder Körper ein Aggregat, d. h. ein aus Teilchen zusammengefügtes Ganze darstellt. Aus diesem Grund nennt man die Zustände, welche ein und derselbe Stoff bei verschiedenen Temperaturen der Reihe nach annehmen kann, die Aggregatzustände der Körper, und versteht darunter die Art, wie die kleinsten Teile eines Körpers miteinander verbunden sind.

Erkl. 3. Die Mechanik (vom griech. mēchanē = Hilfsmittel, Werkzeug, Maschine) bildet die Grundlage der gesamten Physik und handelt von dem Gleichgewicht und der Bewegung der festen, flüssigen und gasförmigen Körper. (Siehe auch Erkl. 4.)

Antwort. Die Statik[1]) ist die Lehre von den Bedingungen des Gleichgewichts fester Körper[2]) und bildet einen Teil der Mechanik[3]).

[1]) Siehe Erkl. 1.
[2]) Siehe Erkl. 2.
[3]) Siehe Erkl. 3.

Frage 2. Was versteht man unter Gleichgewicht?

Erkl. 4. Nach der alltäglichen Anschauung kann sich ein Körper nur in einem zweifachen Zustand in bezug auf seine Lage zu den ihn umgebenden Körpern befinden. Er ist entweder

Antwort. Unter Gleichgewicht versteht man den Zustand eines Körpers, in welchem zwei oder mehrere, eine entgegengesetzte Bewegung erstrebende, Kräfte[1])

[1]) Siehe Erkl. 4.

im Zustand der Ruhe, d. h. alle seine Teile verbleiben in aufeinanderfolgenden Zeiten immer an einem und demselben Ort im Raum, oder er ist in Bewegung, d. h. er befindet sich in aufeinanderfolgenden Zeiten in verschiedenen Räumen. Wenn nun ein Körper aus der Ruhe in den Zustand der Bewegung übergeht, oder wenn ein sich bewegender Körper endlich zur Ruhe kommt, so muss jeder dieser Zustandsänderungen des Körpers eine Ursache zu Grunde liegen, da kein Körper von selbst seinen Zustand ändern kann, und diese Ursache nennt man Kraft. Kraft ist die Ursache jeder Bewegung und Bewegungsänderung. (Siehe weiteres in demjenigen Lehrbuch von Kleyers Encyklopädie, welches über die allgemeinen Eigenschaften der Körper handelt.)

Erkl. 5. Unter Widerständen oder Bewegungshindernissen versteht man in der Mechanik diejenigen Kräfte, welche zwar eine schon vorhandene Bewegung abändern oder ganz aufheben können, aber nicht eine noch nicht vorhandene Bewegung hervorzurufen vermögen. So wirkt fast jedem bewegten Körper der Widerstand oder die Dichte der Luft, sowie die Reibung auf der Unterlage entgegen (siehe weiteres unter dem Abschnitt „Widerstände“).

auf den Körper einwirken, ohne an demselben eine Bewegungsänderung hervorzubringen. Die Kräfte heben sich alsdann auf, paralysieren sich, sind in ihren Wirkungen einander gleich, womit aber keineswegs gesagt ist, dass die Kräfte selbst einander gleich sein müssen, sondern es kommt hierbei auf die besonderen Verhältnisse und Umstände an, unter welchen solche Kräfte wirken. Wenn also die Wirkung einer oder mehrerer Kräfte durch eine andere Kraft oder einen Widerstand[2]) aufgehoben wird, so verändert der Körper seinen Zustand nicht, die Kräfte halten sich das Gleichgewicht.

[2]) Siehe Erkl. 5.

Frage 3. Ist ein im Gleichgewicht befindlicher Körper im Zustand der Ruhe oder in dem der Bewegung?[1])

[1]) Siehe Erkl. 4.

Antwort. Ein im Gleichgewicht befindlicher Körper kann sowohl im Zustand der Ruhe, als auch in dem der Bewegung sein, denn im Gleichgewicht ist ein Körper, sobald er in seinem Zustand so verharrt, als ob gar keine Kräfte auf ihn einwirkten; demnach können wir alle Körper, welche uns in Ruhe erscheinen, ansehen als solche, die im Gleichgewicht sind, denn es wirkt mindestens die Schwerkraft auf jeden solchen Körper ein, wird aber in ihrer Wirkung durch den Gegendruck der Unterlage und durch die Reibung, überhaupt durch vernichtende Kräfte aufgehoben. Bei einem bewegten Körper herrscht Gleichgewicht, wenn derselbe seine Bewegung unverändert beibehält, obgleich Kräfte auf ihn einwirken, die ihm eine andere Bewegung zu geben suchen. So sind z. B. bei einer Maschine oder bei einem Fahrzeug, welche sich mit unveränderter, normaler Geschwindigkeit weiter bewegen, die bewegenden Kräfte mit den Widerständen im Gleichgewicht. Herrschen dagegen die bewegenden Kräfte vor, so wird der Gang der Maschine u. dergl. immer schneller; ist aber die Wirkung der Widerstände überwiegend, so nimmt die Geschwindigkeit ab.

Frage 4. Welche beiden Arten von Gleichgewicht unterscheidet man nach dem in Antwort auf Frage 3 Gesagten?

Erkl. 6. Dynămisch heisst soviel wie vermögend, vielwirkend, selbstkräftig oder durch innere Kraft wirkend und kommt vom griech. dýnamai = ich kann. Dynămis bedeutet Kraft, wirkendes Vermögen, und Dynămik = Kraftlehre, Lehre von der Bewegung (siehe dort).

Antwort. Man unterscheidet statisches und dynamisches Gleichgewicht[1]) und versteht unter ersterem das Gleichgewicht im Zustand der Ruhe, unter letzterem das Gleichgewicht im Zustand der Bewegung.

[1]) Siehe Erkl. 6.

Frage 5. Worin besteht die Hauptaufgabe der Statik?

Erkl. 7. In der Statik, wie überhaupt in der Physik (siehe Erkl. 8) versteht man unter einem Körper (latein. Corpus) einen sinnlich wahrnehmbaren, ausgedehnten, teilbaren und undurchdringlichen Gegenstand.

Wirken äussere Kräfte auf einen Körper, so gerät der Körper gar häufig in Erschütterungen und wird ausgedehnt oder zusammengedrückt, indem die inneren Körperteile ihre gegenseitige Lage ändern. In zahlreichen Fällen ist aber diese Veränderung der gegenseitigen Lage der Körperteile so gering, dass sie sich überhaupt der Beobachtung entzieht. Daher ist es zweckmässig, von den inneren Erschütterungen resp. Formänderungen ganz abzusehen, und so werden in folgendem die Bewegungszustände so betrachtet, als ob der Körper einer Erschütterung resp. Formänderung unfähig wäre. Solche Körper nennt man starr. Ein starrer Körper ändert während seiner Bewegung nur die Lage, nicht die Grösse oder Gestalt.

Siehe das Lehrbuch von Kleyers Encyklopädie, welches über die allgemeinen Eigenschaften der Körper handelt.

Erkl. 8. Unter Physik versteht man die Wissenschaft, welche die Beziehungen der Kräfte (siehe Erkl. 4) untereinander und die mechanischen oder äusseren Veränderungen, die Zustandsänderungen erforscht und verfolgt, die dabei obwaltenden Gesetze (siehe Erkl. 9) ermittelt und die Ursachen (siehe Erkl. 10) lehrt, welche Erscheinungen und Gesetze bedingen.

Erkl. 9. Ein physikalisches Gesetz ist ein Satz, der uns sagt, dass und wie ein Körper unter gewissen Bedingungen bestimmte Veränderungen erfährt.

Erkl. 10. Ursache und Wirkung nennt man die Aufeinanderfolge zweier oder mehrerer zusammengehöriger Bewegungserscheinungen oder Veränderungen, die an einem Ding oder mehreren Dingen vor sich gehen. Auf jede Ursache muss eine Wirkung, oder vielmehr eine unendliche Reihe von Wirkungen folgen, die der Ursache sowohl quantitativ (der Grösse nach), als auch qualitativ (dem Werte nach) entsprechen. Reibt man z. B. eine Siegellackstange mit Wolle, so wird sie elektrisch (siehe Kleyers Lehrbuch der Rei-

Antwort. Die Hauptaufgabe der Statik besteht in der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, welche an einem starren oder festen Körper[1]) angreifen.

[1]) Siehe Erkl. 7.

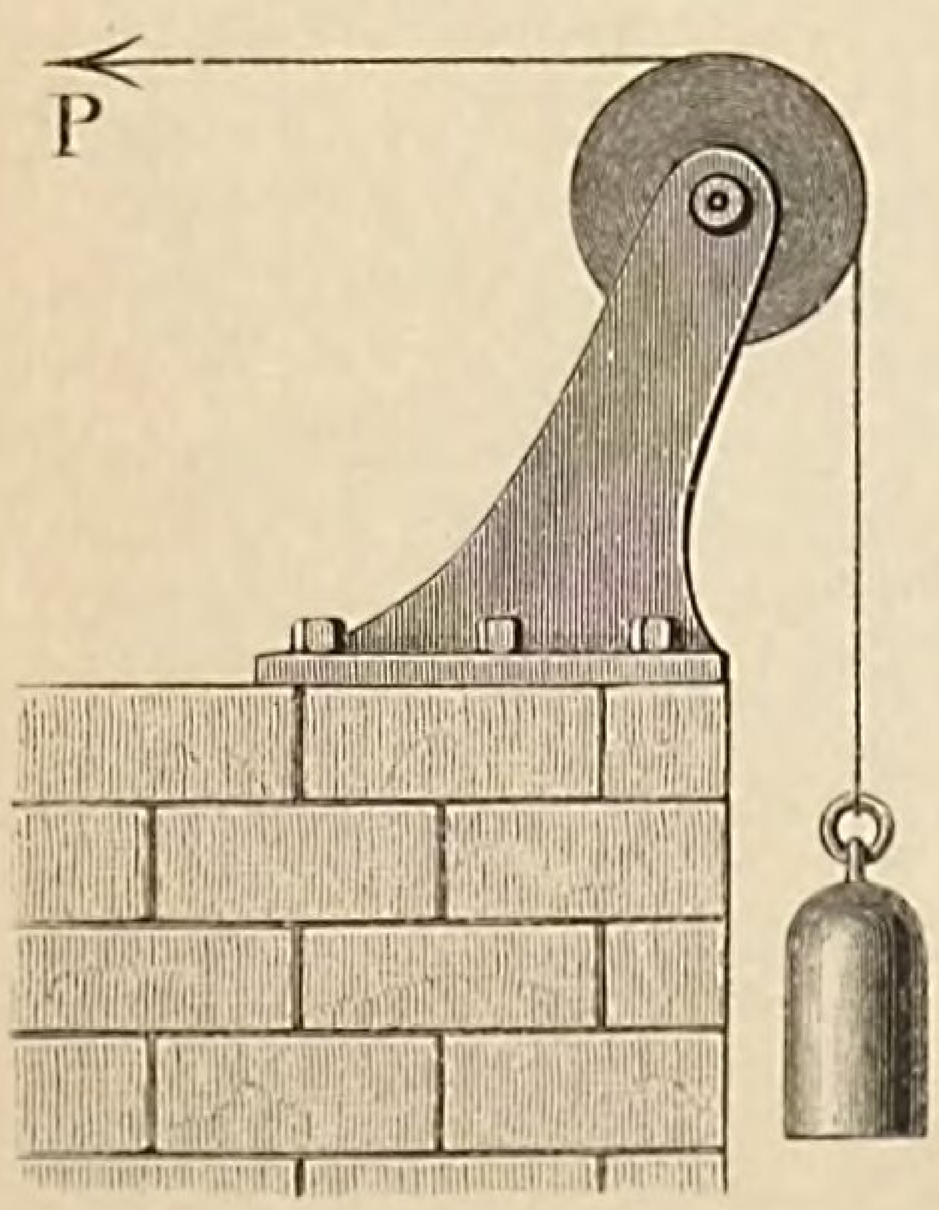
bungselektricität). Das Reiben ist die Ursache, der erzeugte elektrische Zustand, die Wirkung. Oder die Anziehungskraft der Erde ist die Ursache, das Fallen des Steines oder der Druck, den er auf seine Unterlage ausübt, die Wirkung.

2). Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften im allgemeinen.

Frage 6. Von welchen Bestimmungsstücken ist die Wirkung einer Kraft abhängig?

Erkl. 11. Ueber die Grösse einer Kraft erhält man eine Vorstellung, wenn man sie mit der Wirkung anderer Kräfte vergleicht. Da nun im allgemeinen eine Kraft einen Druck oder Zug auf einen Körper hervorbringt, so vergleicht man die Wirkung einer Kraft am einfachsten mit irgend einem Gewicht *P*, welches denselben Druck oder Zug ausübt wie die betreffende Kraft. Die einfachsten und daher gewöhnlichsten Mittel zum Messen der Kräfte sind darum Gewichte, und die Einheit, mit welcher eine Kraft gemessen wird, ist das Kilogramm. Wenn man von einer Kraft von 75 oder 320 oder *n* Kilogramm spricht, so ist damit gemeint, dass die Wirkung dieser Kraft so gross ist, dass durch dieselbe ein Gewicht von 75 oder 320 oder *n* Kilogramm, etwa mittels einer Leitrolle (siehe Figur 2) senkrecht in die Höhe gezogen werden kann (wenn man dabei die Reibung unberücksichtigt lässt). Um nun ein Bild — eine Uebersicht — über die auf einen Körper wirkenden Kräfte, bezw. über deren Angriffspunkte, Richtungen und Grössen zu haben, stellt man die Kräfte durch gerade Linien dar, deren Längen im Verhältnis der Grössen (Intensitäten) der Kräfte stehen und deren Richtungen mit den Richtungen der Kräfte selbst übereinstimmen. Stellt nun, siehe Figur 3, die Strecke *AB* eine Kraft dar, so kann ein Zweifel darüber entstehen, welcher der beiden Endpunkte *A* und *B* als Angriffspunkt anzusehen ist. Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, ist es üblich, bei einer

Figur 2.



Antwort. Die Wirkung einer Kraft ist abhängig:

1). von ihrem Angriffspunkt, d. i. derjenige Punkt eines Körpers, auf welchen jene Kraft unmittelbar wirkt;

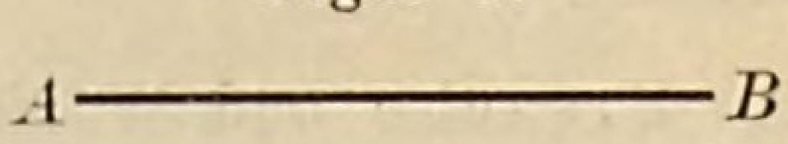
2). von ihrer Richtung, d. i. diejenige gerade Linie, in welcher die Kraft den Angriffspunkt fort zu bewegen strebt, und

3). von ihrer Grösse, Stärke oder Intensität [1]).

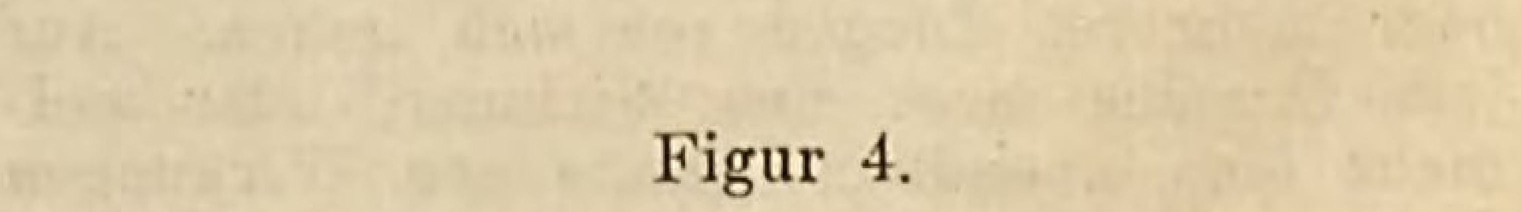
Angriffspunkt, Richtungslinie und Grösse einer Kraft bedingen zusammen erst die eigentliche Wirkung, welche jene Kraft auszuüben vermag. So nehmen wir z. B. als Ursache des Fallens der Körper die Schwerkraft an; ihr Angriffspunkt ist der Schwerpunkt (siehe dort) des fallenden Körpers, ihre Richtung geht lotrecht abwärts, d. h. geradlinig nach dem Mittelpunkt der Erde, und ihre Grösse bemisst sich nach dem Druck, den der Körper im Zustand der Ruhe auf eine horizontale Ebene ausüben würde, d. h. nach dem Gewicht des Körpers, dessen Einheit, das Kilogramm, zugleich als Krafteinheit dient. [2])

[1]) Siehe Erkl. 11.
[2]) Siehe Erkl. 11.

Figur 3.



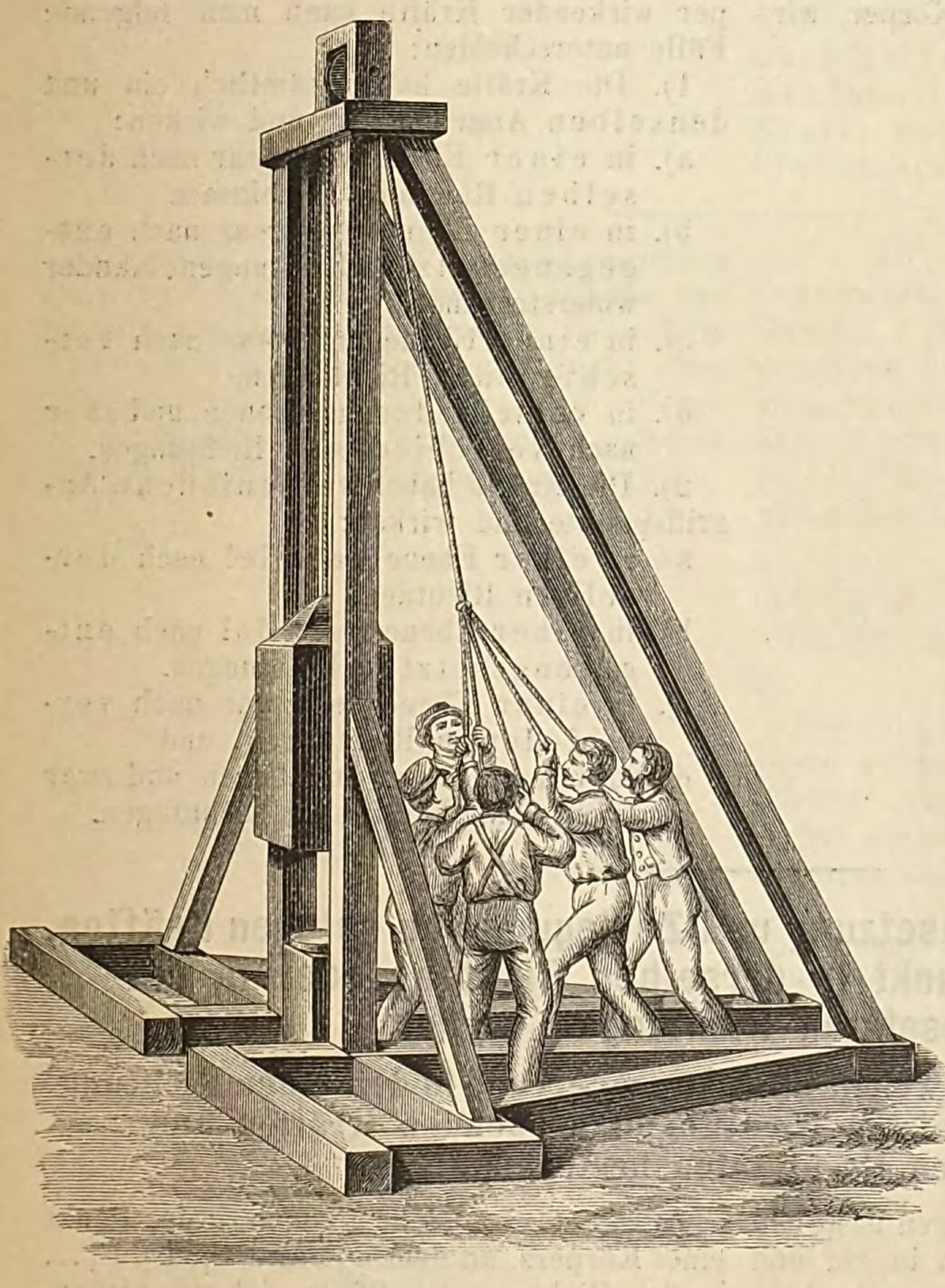
Figur 4.



solchen Strecke AB die Richtung der Kraft durch einen Pfeil oder durch Umgebung des Angriffspunktes mit einem kleinen Kreis zu fixieren, und so bedeutet z. B. die in Figur 4 dargestellte Linie eine Kraft, die in der Richtung von A nach B wirkt, 68 kg gross ist und in A angreift.

Frage 7. Was versteht man unter der Zusammensetzung von Kräften und welcher besonderen Benennungen bedient man sich hierbei?

Figur 1.



Antwort. Wenn zwei oder mehrere Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ auf einen Körper wirken, so lässt sich immer eine neue Kraft auffinden, welche, wenn sie auf denselben Körper wirkt, auch ganz dasselbe Resultat, dieselbe Wirkung wie die gegebenen Kräfte zusammen hervorbringt. Ein Beispiel, wo mehrere Kräfte zusammen eine Bewegung hervorbringen, bietet der Rammklotz (siehe Figur 1), welcher durch viele, in einem Punkt vereinigte Seile, an deren freien Enden Arbeiter ziehend wirken, gehoben wird. Eine einzige hinreichend grosse Kraft würde dieselbe Bewegung allein hervorbringen können, würde die gleiche Arbeit verrichten können. Das Aufsuchen dieser einzigen Kraft, welche mehrere andere in allen Beziehungen vollständig zu ersetzen vermag, nennt man die Zusammensetzung der Kräfte. Diese zu bestimmende Kraft nennt man die Mittelkraft, Resultierende oder Resultante[1]), weil sie eigentlich das Resultat oder das Ergebnis der vereinigten Wirkungen jener mehreren Kräfte ist, während die gegebenen Kräfte, welche man zu einer einzigen oder Mittelkraft zusammensetzt, Seitenkräfte, Komponenten oder Komposanten[2]) heissen. Die Gesamtheit von Kräften, welche auf einen Punkt zusammenwirken, nennt man ein System von Kräften.

[1]) Siehe Erkl. 12.
[2]) Siehe Erkl. 13.

Erkl. 12. Resultierende (vom lat. resultāre, d. h. eigentlich zurückspringen), die aus einer Sache entspringende, sich ergebende, von ihr herrührende Kraft oder Grösse.

Erkl. 13. Komposanten (vom lat. componĕre, etwas zusammensetzen, vereinigen), zusammenzusetzende oder zu vereinigende Kräfte.

Frage 8. Was versteht man unter dem Zerlegen einer Kraft?

Antwort. Soll eine einzige Kraft durch zwei oder mehrere andere Kräfte (Komponenten) ersetzt werden, so dass diese dieselbe Wirkung als jene einzelne Kraft hervorbringen, so nennt man die Operation, mittels welcher man diese Kräfte bestimmt, das Zerlegen einer Kraft. Die Zerlegung einer Kraft in mehrere andere Kräfte ist somit das Umgekehrte des Zusammensetzens mehrerer Kräfte in eine einzige Kraft.

Frage 9. Welche Fälle kann man hinsichtlich der Richtung und des Angriffspunktes mehrerer auf einen Körper wirkender Kräfte unterscheiden?

Antwort. Hinsichtlich der Richtung und des Angriffspunktes mehrerer auf einen Körper wirkender Kräfte kann man folgende Fälle unterscheiden:

1). Die Kräfte haben sämtlich ein und denselben Angriffspunkt und wirken:
 - a). in einer Ebene und zwar nach derselben Richtung gemeinsam,
 - b). in einer Ebene und zwar nach entgegengesetzten Richtungen einander widerstrebend,
 - c). in einer Ebene und zwar nach verschiedenen Richtungen,
 - d). in verschiedenen Ebenen und zwar nach verschiedenen Richtungen.

2). Die Kräfte haben verschiedene Angriffspunkte und wirken:
 - a). in einer Ebene parallel nach derselben Richtung,
 - b). in einer Ebene parallel nach entgegengesetzten Richtungen,
 - c). in einer Ebene und zwar nach verschiedenen Richtungen, und
 - d). in verschiedenen Ebenen und zwar nach verschiedenen Richtungen.

3). Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von solchen Kräften, welche auf einen Punkt in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen wirken.

a). Ueber die Beziehungen, welche zwischen mehreren in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften und deren Resultanten bestehen.

Frage 10. Welche Beziehungen bestehen zwischen zweien oder mehreren in ein und derselben geraden Linie und nach derselben Richtung auf einen Punkt eines Körpers wirkenden Kräften und den Resultanten derselben?

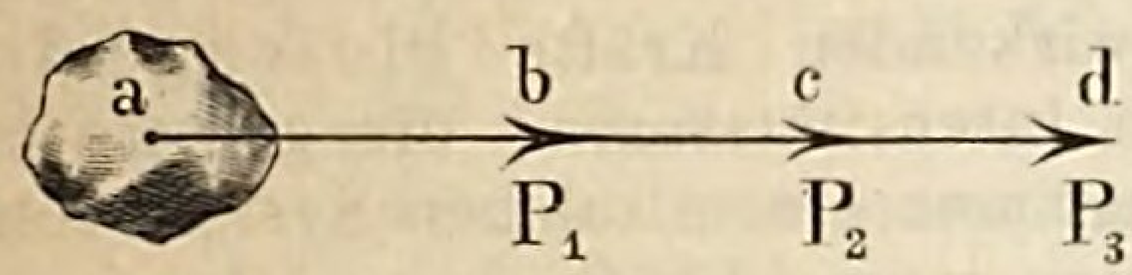
Antwort. Ist, siehe Figur 5, a der Punkt eines Körpers, an dem n Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in der Richtung der Pfeile ziehend wirken, so lässt sich statt dieser n Kräfte eine einzige Kraft R finden, welche, in a angreifend, dasselbe leistet, wie jene Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ zusammen. Zwischen dieser einzigen Kraft, der Resultierenden R, und jenen Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ besteht die Beziehung:

1). . . $R = P_1 + P_2 + P_3 \ldots$

welche durch folgenden Satz in Worten ausgedrückt wird:

Satz 1. Wenn zwei oder mehrere Kräfte in einer und derselben geraden Linie und nach derselben Richtung auf einen Punkt eines Körpers wirken, so ist die Resultierende immer gleich der Summe dieser Kräfte.

Figur 5.



Sind jene n Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ einander gleich, z. B. alle $= P$, so ergibt sich aus Gleichung 1). die Gleichung:

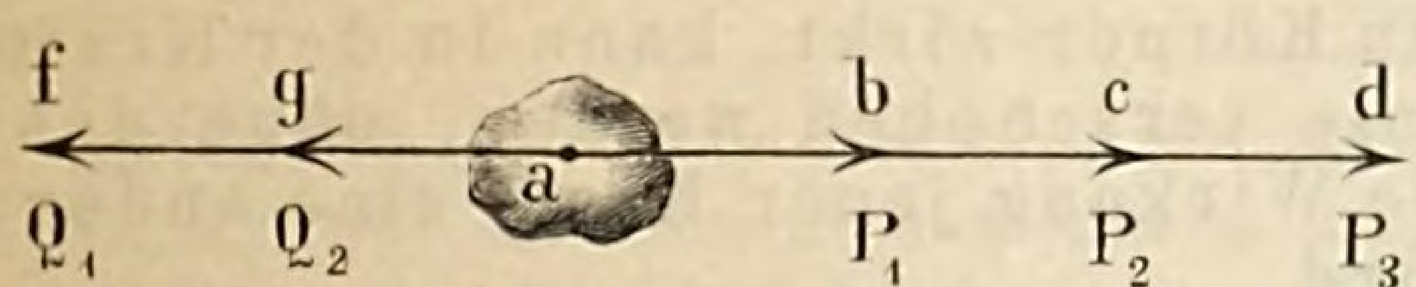
2). $R = n \,.\, P$

oder der speziellere Satz:

Satz 2. Die Resultante von 3 oder 5 oder n gleichen, an einem Punkt nach derselben Richtung wirkenden Kräften ist gleich einer einzigen Kraft, welche bezw. das 3-, 5- oder nfache einer jener Kräfte ist.

Frage 11. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei oder mehreren in ein und derselben geraden Linie nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt eines Körpers wirkenden Kräften und der Resultante derselben, und wann findet zwischen solchen Kräften Gleichgewicht statt?

Figur 6.



Figur 7.



Antwort. Wirken, siehe Figur 6, an dem Punkt a z. B. die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ nach derselben und die Kräfte $Q_1, Q_2 \ldots$ nach entgegengesetzter Richtung, so hat man nach dem in voriger Antwort aufgestellten Satz 1 für die Resultierende r_1 der nach rechts wirkenden Kräfte:

a). . . . $r_1 = P_1 + P_2 + P_3 \ldots$

und für die Resultierende r_2 der nach links wirkenden Kräfte:

b). . . . $r_2 = Q_1 + Q_2 \ldots$

Der Körper wird nun nach der Seite gezogen werden, nach der die grösste Resultierende wirkt. Nehmen wir an, die nach rechts wirkenden Kräfte ziehen stärker als die nach links wirkenden, so dass r_1 grösser als r_2 ist, dann wird der Körper mit einer Kraft nach rechts gezogen werden, die man findet, wenn man die kleinere Resultierende r_2 von der grösseren r_1 subtrahiert, folglich besteht zwischen der Hauptresultante R und den Nebenresultanten r_1 und r_2 die Beziehung:

$$R = r_1 - r_2$$

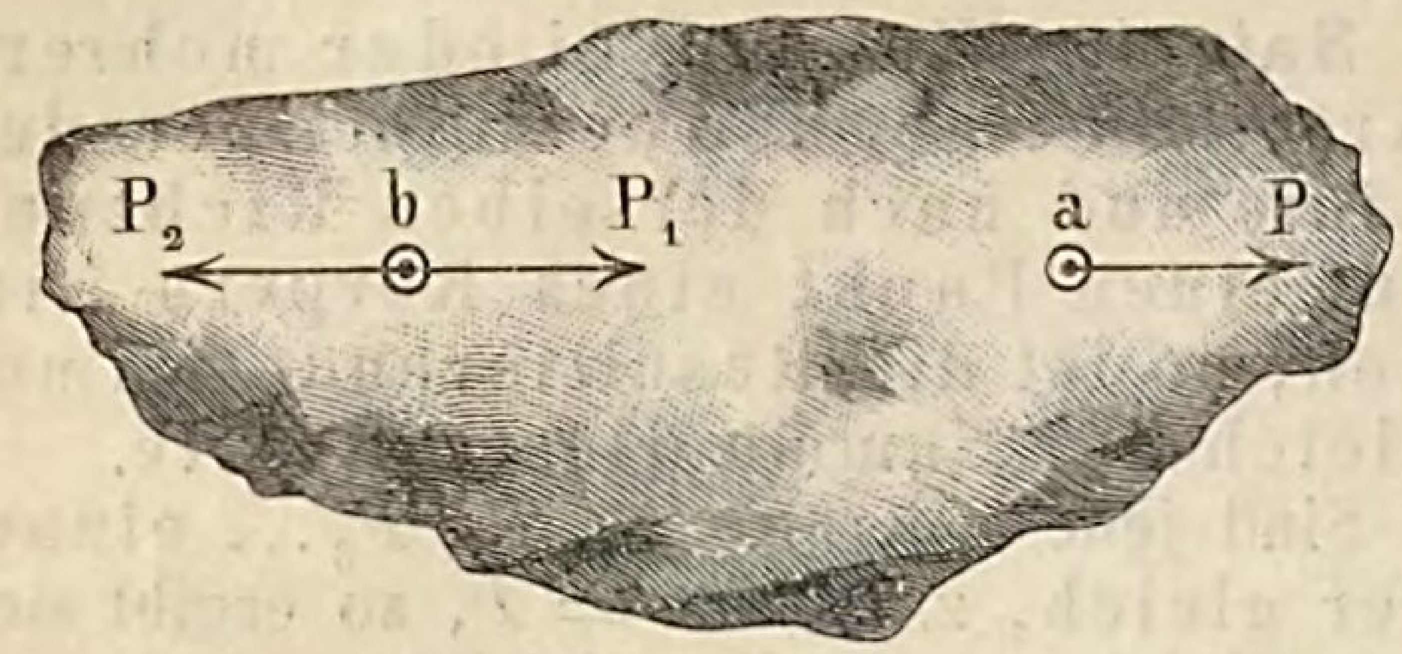
oder nach den Gleichungen a). und b). die Beziehung:

1). . . $R = P_1 + P_2 + P_3 \ldots - (Q_1 + Q_2 \ldots)$

welche durch folgenden Satz in Worten ausgedrückt wird:

Satz 3. Wenn mehrere Kräfte in ein und derselben geraden Linie nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt eines Körpers wirken, so ist die Resultierende ihrer Intensität

Figur 8.



Erkl. 14. Den Beweis des in nebenstehender Antwort aufgestellten Satzes 5 kann man wie folgt führen:

Um, siehe Figur 8, die Kraft P vom Punkt a nach dem Punkt b der Kraftlinie zu verlegen, denkt man sich dort die Kräfte P_1 und P_2 angefügt, welche gleich gross und in derselben Kraftlinie liegend wie P und bezw. gleich und entgegengesetzt wie P gerichtet sind. Diese Zufügung ändert die Wirkung von P nicht, da P_1 und P_2 im Gleichgewicht stehen. Nach Satz 4 steht aber auch P_2 mit P im Gleichgewicht, also wirkt P_1 ebenso wie P.

Es ist also vollkommen gleichgiltig, in welchem Punkt der Kraftlinie die Kraft angreift, wenn nur der Angriffspunkt der Kraft mit dem ursprünglichen Angriffspunkt a fest (also etwa durch ein Seil oder durch zwischenliegende Körperteilchen) verbunden ist.

nach gleich der Summe der Intensitäten der nach der einen Seite wirkenden Kraft weniger der Summe der Intensitäten der nach der anderen Seite wirkenden Kräfte, und ihrer Richtung nach ist sie mit denjenigen bezw. nach einer und derselben Seite hin wirkenden Kräfte gleichgerichtet, deren Intensitätssumme die grösste ist.

Fügt man einem solchen System von Kräften eine neue Kraft zu, welche der Resultante dieses Kräftesystems gleich aber entgegengesetzt wirkt, dann findet Gleichgewicht statt.

Denn: Wenn, siehe Figur 7, zwei Kräfte P und Q in gerader aber entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt a eines Körpers wirken, so ist die Resultierende $R = P - Q$, sind die Kräfte P und Q einander gleich an Intensität, so ergibt sich hieraus: $R = 0$, d. h. die Kräfte heben sich gegenseitig auf, sie sind im Gleichgewicht, und der Körper bleibt im Zustand der Ruhe, denn es ist kein Grund vorhanden, weshalb der Körper sich nach der einen oder anderen Seite bewegen sollte, und daraus folgt:

Satz 4. Zwei gleiche Kräfte, welche in derselben Kraftlinie auf einen starren Körper nach entgegengesetzten Richtungen wirken, stehen im Gleichgewicht.

Aus Satz 4 kann man ferner nach der Erkl. 14 den Satz herleiten:

Satz 5. Der Angriffspunkt einer jeden Kraft, welche an einem starren Körper wirkt, kann in der Kraftlinie verschoben werden, ohne dass die Wirkung jener Kraft eine andere wird.

b). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. An einem Tau wirken drei Mann mit je 56, 63 und 75 kg Zugkraft auf einen schweren Körper. Wie gross muss in diesem Fall die Zugkraft eines Pferdes sein, wenn dasselbe die gleiche Wirkung hervorbringen soll?

Auflösung. Nach dem in Antwort der Frage 10 aufgestellten Satz 1 hat man für die Resultierende R:

$$R = 56 + 63 + 75$$

oder:

$$R = 194 \text{ kg}$$

Die Richtung dieser Resultierenden R ist mit den gegebenen Kräften gleichgerichtet.

Aufgabe 2. An einem Tau ziehen nach rechts zwei Knaben mit je 25 und 32 kg Kraft, nach links zwei Knaben mit je 18 und 27 kg Kraft; welches ist der Erfolg?

Auflösung. Nach dem in Antwort auf Frage 11 aufgestellten Satz 3 ist die Resultante

$$R = 25 + 32 - (18 + 27)$$
$$R = 57 - 45$$
$$R = 12 \text{ kg},$$

d. h. es wird eine Bewegung mit einer Kraft von 12 kg nach rechts erfolgen.

Aufgabe 3. Auf einen Punkt wirken in gerader Linie die Kräfte:

$+15, \ +10, \ +37, \ -20, \ -5, \ -3, \ -8$ kg (siehe Erkl. 15)

Man soll eine neue Kraft hinzufügen, so, dass Gleichgewicht entsteht. Welches ist die Grösse und die Richtung dieser neuen Kraft?

Erkl. 15. Bezeichnet man die nach einer Richtung wirkenden Kräfte mit $+$, so kann man die nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräfte mit — bezeichnen.

Auflösung. Nach dem Nachsatz zu Satz 3 in Antwort auf Frage 11 muss die neue Kraft, welche dem System von Kräften zugefügt werden soll um das Gleichgewicht zwischen denselben herzustellen, gleich der Resultante R der Kräfte sein und in entgegengesetzter Richtung derselben wirken.

Bezeichnet man die gesuchte Kraft der Resultante jener Kräfte mit x, so besteht nach dem Satz 3 (siehe Antw. auf Frage 11) die Relation:

$$x = 15 + 10 + 37 - (20 + 5 + 3 + 8)$$

und hieraus erhält man:

$$x = 62 - 36$$

oder:

$$x = 26 \text{ kg}.$$

Da die Resultante x hiernach in der Richtung der gegebenen positiven Kräfte wirkt, so muss die neue Kraft ($x = 26$ kg) zur Herstellung des Gleichgewichts in entgegengesetzter Richtung, nämlich in der Richtung der gegebenen negativen Kräfte wirken, und es ist alsdann:

$$15 + 10 + 37 = 20 + 5 + 3 + 8 + 26$$

oder:

$$62 = 62$$

d. h. es herrscht Gleichgewicht.

Aufgabe 4. Eine Kraft $R = 500$ kg soll in zwei Komponenten x und y zerlegt werden, die mit der Kraft R in gleicher Richtung wirken und in dem Verhältnis 9 : 16 stehen.

Auflösung. Da die Kräfte x und y in gleicher Richtung mit der Kraft R ($= 500$ kg) wirken sollen, so hat man nach Satz 1 in Antwort auf Frage 10 die Gleichung:

1). $x + y = 500$

Ferner hat man nach der Aufgabe noch die Proportion:

$$x : y = 9 : 16$$

woraus sich:

$$y = \frac{16x}{9}$$

ergibt.

Aus den Gleichungen 1). und 2). erhält man durch Substitution:

$$x + \frac{16x}{9} = 500$$

oder:

$$\frac{9x}{9} + \frac{16x}{9} = 500$$

$$\frac{25x}{9} = 500$$

mithin:

A). . . . $x = \frac{500 . 9}{25}$

$= 180$ kg.

In Rücksicht dieses für x gefundenen Werts erhält man aus Gleichung 1). für y:

B). . . . $y = 320$ kg.

Aufgabe 5. Eine Kraft $R = 800$ kg soll in zwei Komponenten x und y zerlegt werden, von welchen x mit R gleichgerichtet ist und y die entgegengesetzte Richtung hat, wenn diese Komponenten im Verhältnis 11 : 8 stehen.

Auflösung. Da die Kräfte x und y in entgegengesetzter Richtung wirken, aber dieselbe Wirkung wie R hervorbringen sollen, so hat man nach Satz 2 in Antwort auf Frage 10 die Gleichung:

1). . . . $x - y = 800$

Ferner hat man nach der Aufgabe noch die Gleichung:

2). . . . $x : y = 11 : 8$

woraus sich:

$y = \frac{8x}{11}$ ergibt.

Diesen Wert in Gleich. 1). substituiert, gibt:

$$x - \frac{8x}{11} = 800$$

oder:

$$\frac{11x}{11} - \frac{8x}{11} = 800$$

$$\frac{3x}{11} = 800$$

oder:

$$x = \frac{11 . 800}{3} \text{ oder } x = \frac{8800}{3}$$

$$x = 1233\tfrac{1}{3} \text{ kg.}$$

Für y erhält man alsdann aus Gleichung 1).:

$$2933\tfrac{1}{3} \text{ kg} - y = 800$$

oder: $2933\tfrac{1}{3} - 800 = y$

und endlich:

$$y = 2133\tfrac{1}{3} \text{ kg.}$$

Aufgabe 6. Eine Kraft $R = 360$ kg soll in eine Gruppe von 3 mit dieser Kraft (Resultante) gleichgerichteten und in eine Gruppe von 3 zu dieser Kraft entgegengesetzt gerichteten Komponenten zerlegt werden. Das Verhältnis der Kräfte in der ersten Gruppe soll 5 : 4 : 3, das Verhältnis der Kräfte in der zweiten Gruppe 3 : 2 : 1 und das Verhältnis der Gruppenresultanten 6 : 1 sein.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchten Komponenten in der ersten Gruppe mit x, y, z, und die in der zweiten Gruppe mit u, v, w, so hat man analog der vorigen Aufgabe, da die Kraft R (= 360 kg) in 2 Gruppen entgegengesetzt wirkender Kräfte zerlegt werden soll, die Gleichung:

1). . . $(x + y + z) - (u + v + w) = 360$

Ferner hat man nach der Aufgabe die Gleichungen:

2). . . . $x : y : z = 5 : 4 : 3$

3). . . . $u : v : w = 3 : 2 : 1$

4). . . $(x + y + z) : (u + v + w) = 6 : 1$

Aus den Gleichungen 1). und 4). kann man die Summen: $(x + y + z)$ und $(u + v + w)$ berechnen; denn aus Gleichung 4). erhält man:

$$(x + y + z) = 6 (u + v + w)$$

Setzt man dies in Gleichung 1). ein, so wird:

Erkl. 16. Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe der ersten Glieder der Verhältnisse zur Summe der zweiten Glieder der Verhältnisse, wie die Glieder eines der Verhältnisse.“

Hat man z. B. die Proportion:

a). $x : y : z = a : b : c$

welche auch in der Form geschrieben werden kann:

b). $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

so ist nach jenem Satz:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

(Siehe das Buch von Kleyers Encyklopädie, welches über die 4 Grundrechnungsarten und die Proportionen handelt.)

$$6(u+v+w) - (u+v+w) = 360$$

oder:

$$5(u+v+w) = 360$$

$$(u+v+w) = \frac{360}{5}$$

mithin:

5). $(u+v+w) = 72$

Berücksichtigt man dies, so erhält man aus Gleichung 1).:

$$(x+y+z) - 72 = 360$$

oder:

$$(x+y+z) = 360 + 72$$

mithin:

6). . . . $(x+y+z) = 432$

Da nun die Gleichung 2). eine **laufende Proportion** ist, so ergibt sich nach dem in der Erkl. 16 angeführten Summensatz:

7). $\frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{x}{5}$ oder $= \frac{y}{4}$ oder $= \frac{z}{3}$

Setzt man aus Gleich. 6). den für die Summe: $x+y+z$ gefundenen Wert, so erhält man:

$$\frac{432}{5+4+3} = \frac{x}{5} \text{ oder } = \frac{y}{4} \text{ oder } = \frac{z}{3}$$

oder:

$$\frac{432}{12} = \frac{x}{5} \text{ oder } = \frac{y}{4} \text{ oder } = \frac{z}{3}$$

und hieraus erhält man:

$36 = \frac{x}{5}$; $x = 36 . 5$ oder $x = 180$ kg
$36 = \frac{y}{4}$; $y = 36 . 4$ oder $x = 144$ „
$36 = \frac{z}{3}$; $z = 36 . 3$ oder $x = 108$ „

(die gesuchten Komponenten der einen Gruppe.)

Auf analoge Weise kann man für die Gleichung 3). schreiben:

$$\frac{u+v+w}{3+2+1} = \frac{u}{3} \text{ oder } = \frac{v}{2} \text{ oder } = \frac{w}{1}$$

oder für die Summe: $(u+v+w)$ aus Gleichung 5). den gefundenen Wert gesetzt:

$$\frac{72}{3+2+1} = \frac{u}{3} \text{ oder } = \frac{v}{2} \text{ oder } = \frac{w}{1}$$

oder:

$$\frac{72}{6} = \frac{u}{3} \text{ oder } = \frac{v}{2} \text{ oder } = \frac{w}{1}$$

und hieraus erhält man bezw.:

$12 = \frac{u}{3}$; $u = 3 . 12 = 36$ kg
$12 = \frac{v}{2}$; $v = 2 . 12 = 24$ „
$12 = \frac{w}{1}$; $w = 1 . 12 = 12$ „

(die gesuchten Komponenten der andern Gruppe.)

c). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 7. Auf einen Punkt wirken in gerader Linie und nach derselben Richtung die Kräfte: a). 20, 30, 40, 50 kg; b). $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung der Aufg. 1 unter Berücksichtigung von Satz 1 (siehe Antwort auf Frage 10).

$^{7}/_{8}$ kg; c). 0,56, 37,8 und 0,056 kg Wie gross ist in jedem dieser Fälle die Resultante, und welches ist deren Richtung?

Aufgabe 8. Auf einen Punkt wirken in gerader Linie die Kräfte:

a). + 15, + 10, + 30, — 18, — 20, — $2^{1}/_{2}$;
b). + 30, + 25, — 10, — 17, — 20, — 8;
c). + 7, + 3,5, + 11, — 15, — 19 kg.

Wie gross ist in jedem dieser Fälle die Resultante, und welches ist deren Richtung?

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung der Aufg. 2 unter Berücksichtigung von Satz 3 (siehe Antwort auf Frage 11).

Aufgabe 9. Zwischen den auf einen Punkt in gerader Linie wirkenden Kräften:

a). + 500, + 70, — 60, — 650, — 95;
b). + 30, + 17, + 2, — 20, — 9

soll durch Hinzufügung einer neuen Kraft Gleichgewicht hergestellt werden; welches ist in den einzelnen Fällen die Grösse und die Richtung dieser Kraft?

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung der Aufgabe 3.

Aufgabe 10. Eine Kraft von 1000 kg soll in zwei Komponenten zerlegt werden, wenn a) beide in der Richtung jener Kraft wirken; b). eine derselben in der Richtung, die andere in entgegengesetzter Richtung jener Kraft wirkt und das Verhältnis 3 : 2 der Komponenten gegeben ist.

Andeutung. Auflösung entsprechend den Auflösungen der Aufgaben 4 und 5.

Aufgabe 11. Eine Kraft von 72 kg soll in 6 mit jener Kraft gleichgerichteten Komponenten zerlegt werden, die in dem Verhältnis 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 stehen. Wie gross sind diese Komponenten?

Andeutung. Bezeichnet man die erste der Seitenkräfte mit x, so ist $x + 3x + 5x + 7x + 9x + 11x = 72$ u. s. w.

Aufgabe 12. Eine Kraft $R = 342$ kg soll in eine Gruppe von 3 mit dieser Kraft gleichgerichteten Komponenten, welche in dem Verhältnis 5 : 6 : 7 stehen und in eine Gruppe von 3 zu jener Kraft entgegengesetzt wirkenden Kräfte, welche im Verhältnis 4 : 3 : 2 stehen, zerlegt werden; vorausgesetzt, dass sich die Resultanten der einzelnen Gruppen wie 2 : 1 verhalten.

Andeutung. Die Auflösung ist analog der Auflösung der Aufgabe 6.

4). Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von solchen Kräften, welche unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirken und deren Richtungen in ein und derselben Ebene liegen.

a). Ueber die Beziehungen, welche zwischen zwei unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräften und deren Resultanten bestehen.

(Das Parallelogramm der Kräfte.)

Frage 12. Mittels welchen Satzes werden die Beziehungen zwischen den Intensitäten und den Richtungen zweier unter einem Winkel auf einen Punkt eines Körpers wir-

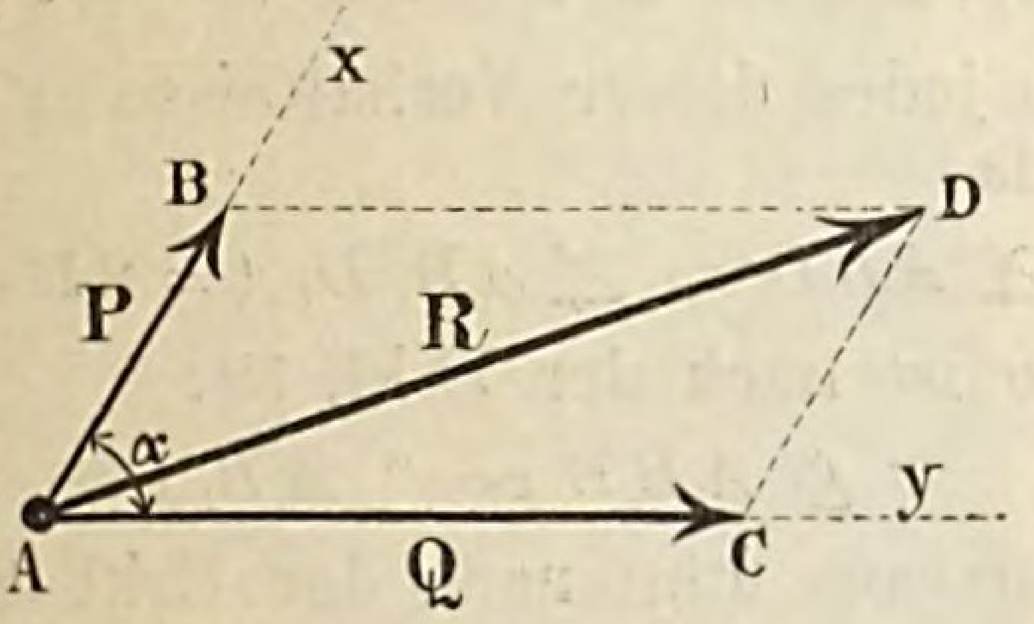
Antwort. Die in der Frage erwähnten Beziehungen werden durch folgenden Satz ausgedrückt:

kenden Kräfte und der Intensität und Richtung der Resultierenden derselben allgemein ausgedrückt; welchen Namen führt dieser Satz und wie kann man die Richtigkeit desselben darthun?

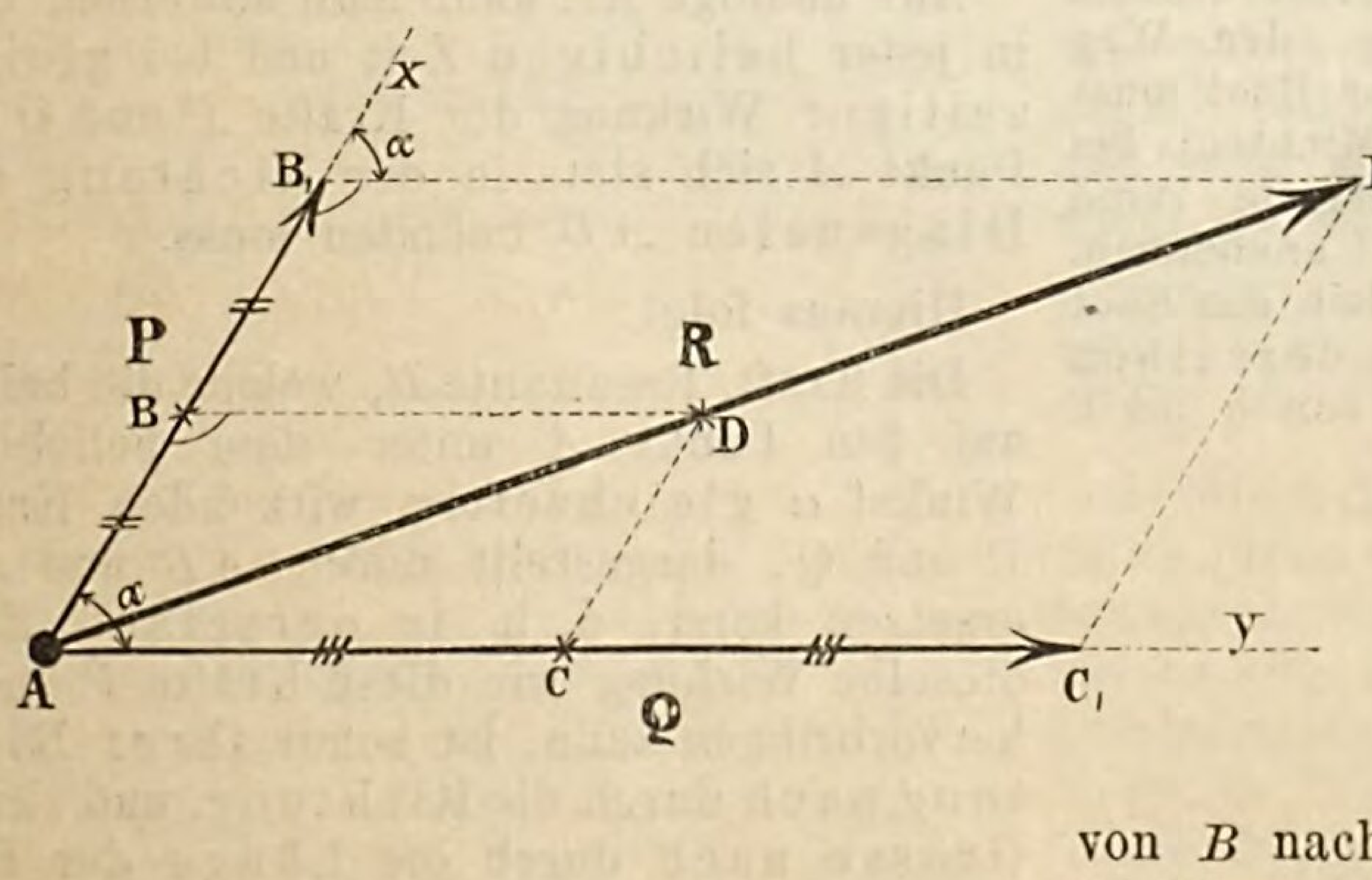
Erkl. 17. Von den vielen, teilweise gekünstelten und oft weitläufigen Beweisen über diesen merkwürdigen und sehr wichtigen Satz sei hier abstrahiert und der natürlichste Beweis skizziert.

Erkl. 18. Die Menge des Stoffes, aus dem ein Körper besteht, heisst dessen Masse, ein sehr kleines Massenteilchen wird materieller Punkt genannt.

Figur 9.



Figur 10.



Satz 6. Wirken, siehe Figur 9, zwei Kräfte P und Q, deren Richtungen und Intensitäten bezw. durch die Richtungen und Längen der Strecken AB und AC dargestellt sind, unter einem beliebigen Winkel α auf einen Punkt A eines starren Körpers, so ist die Resultante dieser Kräfte, sowohl ihrer Richtung als Grösse nach, gleich der Diagonale AD des über den Kräften P und Q, bezw. über den Linien AB und AC konstruiert gedachten Parallelogramms.

Dieser Satz führt den Namen: Satz des Parallelogramms der Kräfte, die Richtigkeit desselben kann man durch folgende Beweise darthun:

1). **Mathematischer Beweis** [1]). In der Figur 9 seien die Richtungen der auf den materiellen Punkt A [2]) wirkenden Kräfte P und Q durch die Linien Ax und Ay vorgezeichnet; α ist mithin der Winkel, unter welchem die Kräfte in dem Punkt A wirken.

Ferner seien die Grössen der Kräfte P und Q, bezw. das Verhältnis derselben, nach der Erkl. 11 durch das Verhältnis der Längen der Strecken AB und AC dargestellt, d. h. wirkt die Kraft P eine gewisse Zeit auf den Punkt A, und sie bewegt denselben von A nach B, alsdann wird in derselben Zeit die Kraft Q den Punkt A von A nach C bewegen.

Wenn nun der Punkt A während einer gewissen Zeit der gleichzeitigen Einwirkung beider Kräfte ausgesetzt ist, so ist offenbar die Wirkung dieselbe, als ob während dieser Zeit der Punkt A erst der Einwirkung der einen, und dann während derselben Zeit der Einwirkung der anderen Kraft ausgesetzt wird.

Denkt man sich hiernach die beiden Kräfte P und Q wirkten nacheinander auf den Punkt A, so wird in der gedachten Zeit die Kraft P den Punkt von A nach B bewegen; hört in dem Augenblicke, in welchem der Punkt in B anlangt, die Kraft P auf zu wirken und die Kraft Q wirkt alsdann auf den Punkt ein, so wird in derselben Zeit die Kraft Q den Punkt von B nach D (nämlich $BD = AC$) bewegen.

[1]) Siehe Erkl. 17.
[2]) Siehe Erkl. 18.

In diesem Punkte D wird also auch der Punkt A anlangen, wenn beide Kräfte gleichzeitig während der gedachten Zeit auf denselben wirkten.

Wirkten ferner die Kräfte P und Q wiederum nacheinander auf den beweglichen Punkt A, und zwar z. B. je die doppelte Zeit wie vorhin, so wird die Kraft P, wenn dieselbe für sich allein wirkt, in dieser doppelten Zeit den Punkt A auch den doppelten Weg wie vorher, nämlich $2AB = AB_1$, siehe Figur 10, vorwärts treiben, ebenso wird die Kraft Q, wenn dieselbe von da ab ihre Wirkung beginnt, den Punkt während derselben Zeit auch den doppelten Weg wie vorher, nämlich: $2AC = 2BD = B_1D_1$ vorwärts treiben.

Wirken die beiden Kräfte P und Q wiederum gleichzeitig, so werden sie in dieser doppelten Zeit den Punkt A nach D_1 (Figur 10) fortbewegen.

Da nun in Figur 10 die Proportion besteht:

$$\overline{AB_1} : \overline{AB} = \overline{B_1D_1} : \overline{BD} \; (= \overline{B_1D_1} : \overline{AC})$$

indem jedes dieser Verhältnisse $= 2:1$ ist, und da

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AB_1D_1 \; (= 2R - \alpha)$$

ist, so ist nach der Erkl. 19:

$$\triangle ABD \sim \triangle AB_1D_1$$

und hieraus folgt nach der Erkl. 20, dass:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle B_1AD_1$$

ist, mithin liegen die beiden Punkte D und D_1 in einer geraden Linie, d. h. D_1 muss auch ein Punkt der Diagonalen AD des durch AB, AC und α bestimmten Parallelogramms sein.

Auf analoge Art kann man beweisen, dass in jeder beliebigen Zeit und bei gleichzeitiger Wirkung der Kräfte P und Q der Punkt A sich stets in der Richtung der Diagonalen AD befinden muss.

Hieraus folgt:

Die Kraft, Resultante R, welche die beiden auf den Punkt A unter dem beliebigen Winkel α gleichzeitig wirkenden Kräfte P und Q, dargestellt durch AB und AC, ersetzen kann, d. h. in derselben Zeit dieselbe Wirkung wie diese Kräfte P und Q hervorbringen kann, ist somit ihrer Richtung nach durch die Richtung, und ihrer Grösse nach durch die Länge der Diagonalen AD des Parallelogramms $ABCD$ bestimmt (siehe Erkl. 21).

Erkl. 19. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn das Verhältnis zweier Seiten in beiden Dreiecken dasselbe ist und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind.“

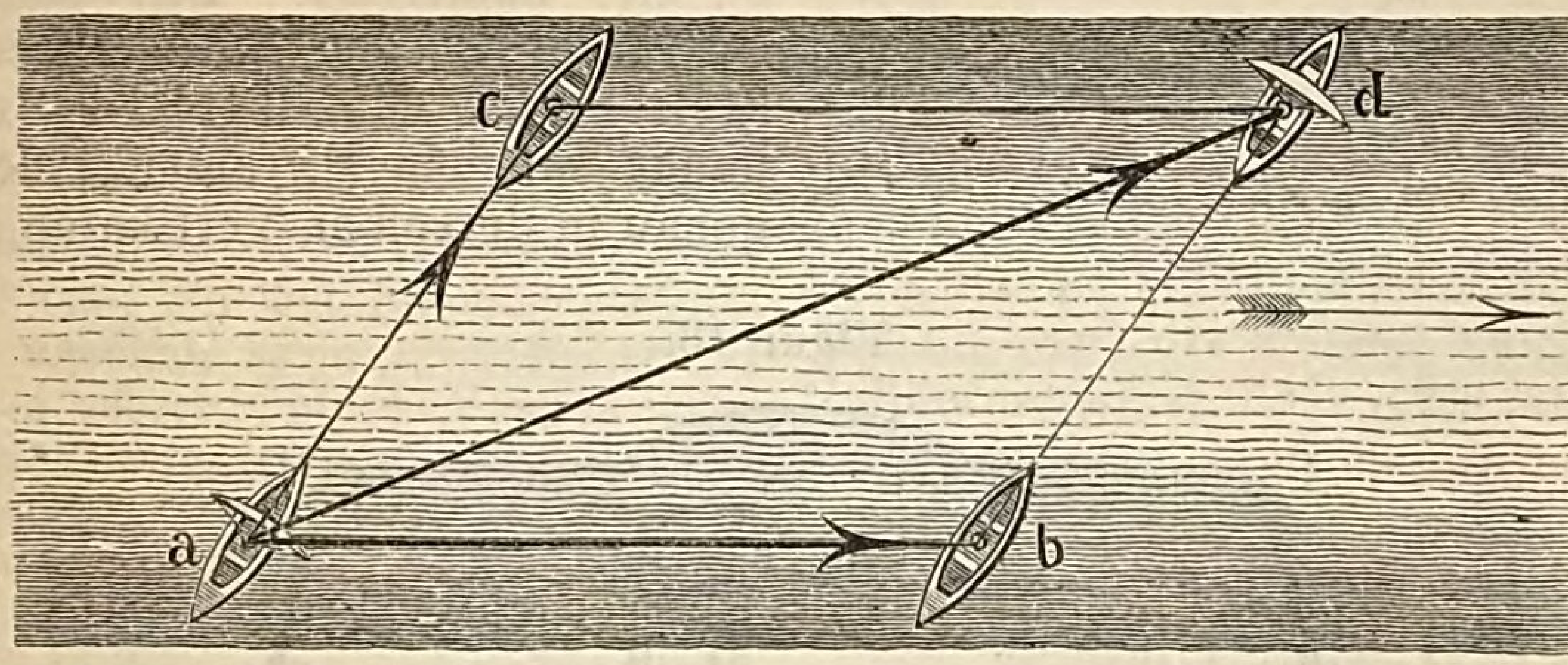
(Siehe diejenigen Bücher von Kleyers Encyklopädie, welche über die Planimetrie handeln.)

Erkl. 20. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „In ähnlichen Dreiecken sind die homologen Winkel bezw. einander gleich.“

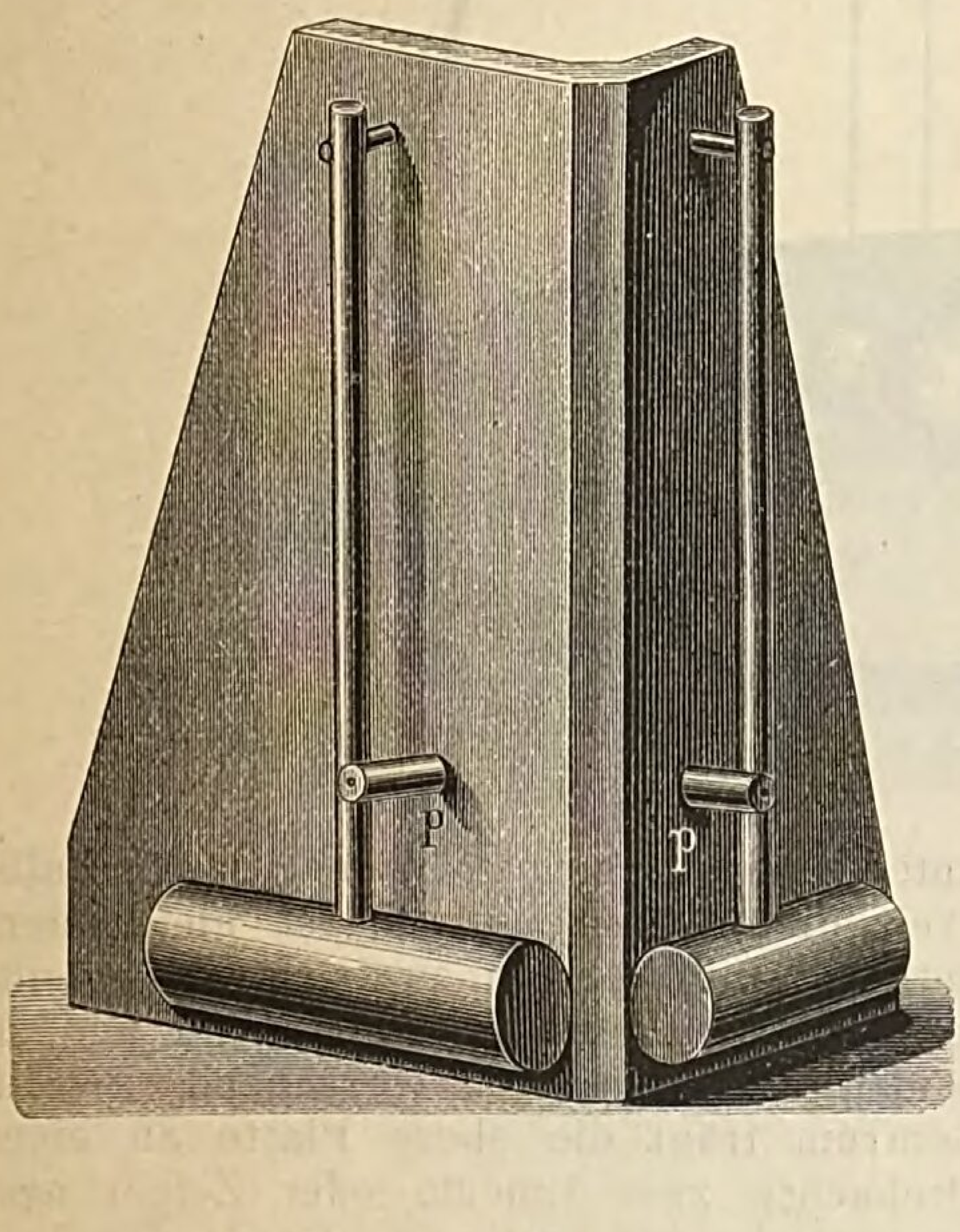
Erkl. 21. Den in nebenstehender Antwort aufgestellten Satz über das Parallelogramm der Kräfte kann man unter anderem an folgendem Beispiel erläutern:

Von einem Punkt a an dem Ufer eines Flusses, siehe Figur 11, fährt ein Boot ab, auf dasselbe wirken gleichzeitig die Kraft des Stromes in der Richtung ab und die Kraft des Windes in der Richtung ac. Nimmt man an, das Schiff werde durch den Strom allein in einer gewissen Zeit (z. B. in 10 Minuten) von a nach b, und durch den Wind allein, wenn die Wirkung des Stromes aufhörte, in derselben Zeit von a nach c getrieben, so muss das Boot in der gedachten Zeit (10 Minuten), wenn beide Kräfte Strom und Wind gleichzeitig wirken, den Weg von a bis d zurücklegen, d. h. das Boot muss nach der gewissen Zeit (10 Minuten) bei gleichzeitiger Wirkung der Kräfte Wind und Strom, in demselben Punkt d ankommen, als ob diese Zeit der Strom allein das Boot von a nach b, und von da ab in derselben Zeit der Wind allein das Boot von b bis d getrieben hätte.

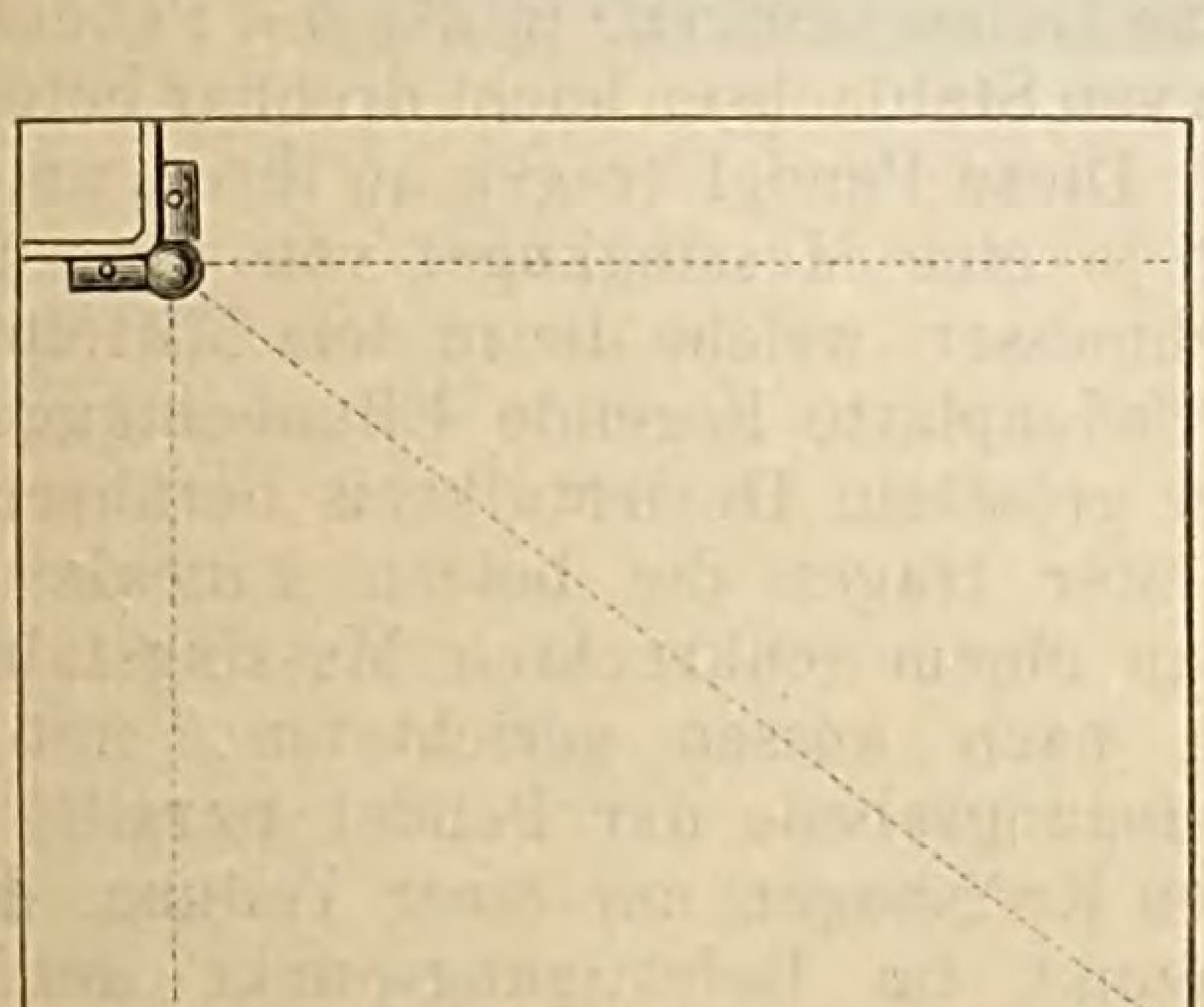
Figur 11.



Figur 12a.



Figur 12b.

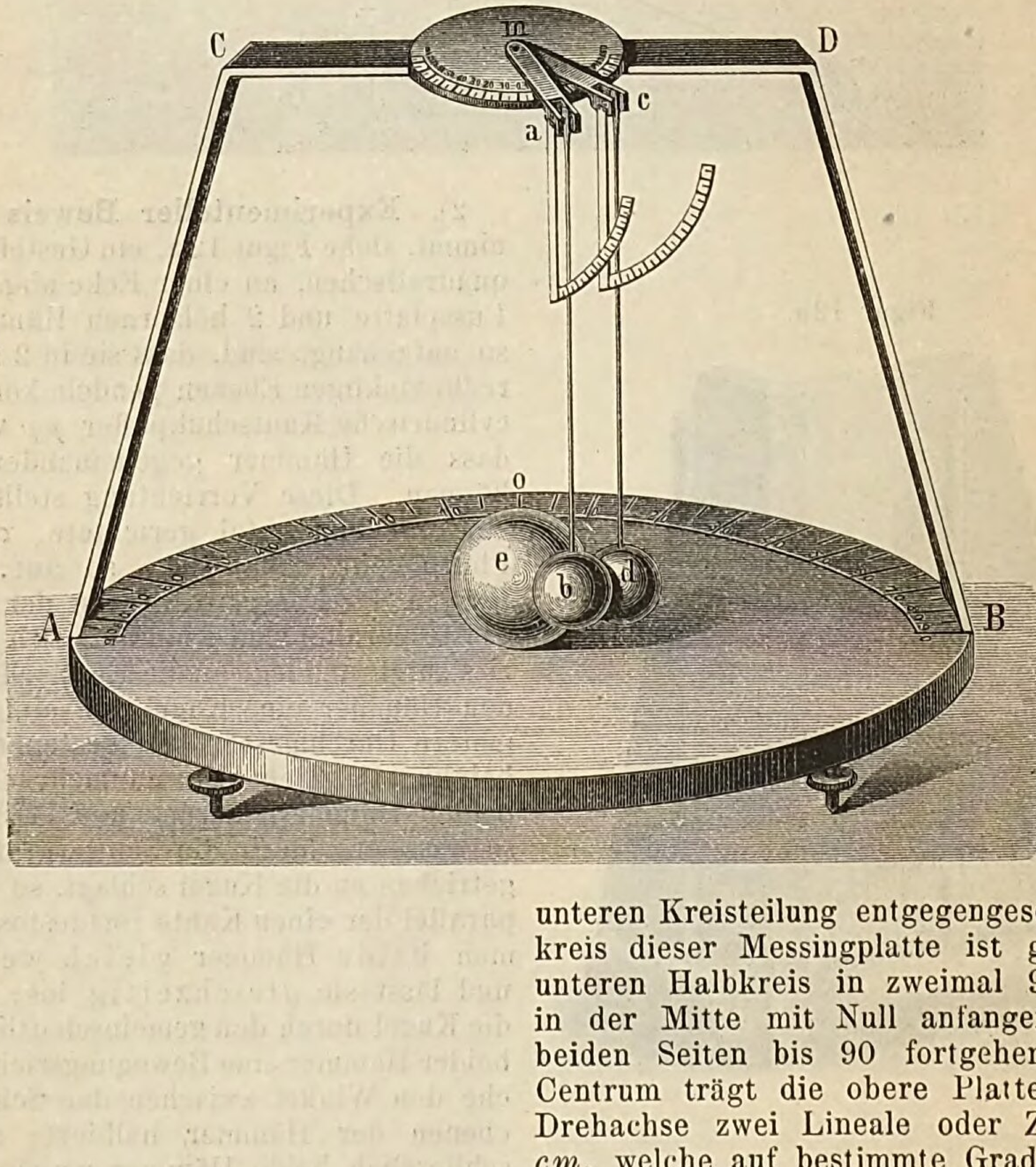


2). **Experimenteller Beweis 1.** Man nimmt, siehe Figur 12a, ein Gestell mit einer quadratischen, an einer Ecke abgestumpften Fussplatte und 2 hölzernen Hämmern, die so aufgehängt sind, dass sie in 2 zueinander rechtwinkligen Ebenen pendeln können; zwei cylindrische Kautschukpuffer *pp* verhindern, dass die Hämmer gegeneinander schlagen können. Diese Vorrichtung stellt man auf eine gut horizontal gerichtete, rechteckige Platte nahe einer Ecke so auf, dass die Kanten der Fussplatte denen der grösseren Platte parallel sind wie Figur 12b im Grundriss zeigt, und legt an die Endflächen der beiden Hämmer eine Kugel von einigen Centimetern Durchmesser (am besten eine Elfenbeinkugel). Zieht man nunmehr einen von beiden Hämmern zurück und lässt ihn los, so dass er durch die Schwerkraft abwärts getrieben an die Kugel schlägt, so wird diese parallel der einen Kante fortgestossen; zieht man beide Hämmer gleich weit zurück und lässt sie gleichzeitig los, so erhält die Kugel durch den gemeinschaftlichen Stoss beider Hämmer eine Bewegungsrichtung, welche den Winkel zwischen den Schwingungsebenen der Hämmer halbiert; zieht man schliesslich beide Hämmer ungleich weit zurück, so erhält man durch ihr Anschlagen eine Bewegung der Kugel in einer Richtung, welche mit der Schwingungsebene des höher gehobenen und also stärker stossenden Hammers einen kleineren Winkel bildet, als mit der des andern.

3). **Experimenteller Beweis 2.** Man benützt, siehe Figur 13, ähnlich wie oben, als bewegende Kräfte 2 Pendel *ab* und *cd*, durch welche eine Elfenbeinkugel *e*, von etwa 4 cm Durchmesser, bewegt wird, die auf einem kreisförmigen Brett *AB* von 50—60 cm Durchmesser liegt. Letzteres ist genau horizontal gestellt und zur Hälfte am Rand in 180° geteilt. Die Grade werden vom mittleren

Teilpunkt aus nach beiden Seiten hin von 0—90° numeriert. Die obere Querleiste *CD* trägt in der Mitte ihrer Länge eine kreisförmige Messingplatte, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Fussbrettes genau in derselben Vertikalen liegt. Der der

Figur 13.



unteren Kreisteilung entgegengesetzte Halbkreis dieser Messingplatte ist gleich dem unteren Halbkreis in zweimal 90° geteilt, in der Mitte mit Null anfangend und zu beiden Seiten bis 90 fortgehend. — Im Centrum trägt die obere Platte an einer Drehachse zwei Lineale oder Zeiger *am*, *cm*, welche auf bestimmte Grade der Teilung eingestellt werden können und welche in eine Gabel endigen, in der die Pendel mit Hilfe von Stahlachsen leicht drehbar befestigt sind. Diese Pendel tragen an ihrem unteren Ende je eine Messingkugel von etwa 2 cm Durchmesser, welche die in dem Mittelpunkt der Bodenplatte liegende Elfenbeinkugel in deren grösstem Horizotalkreis berühren.

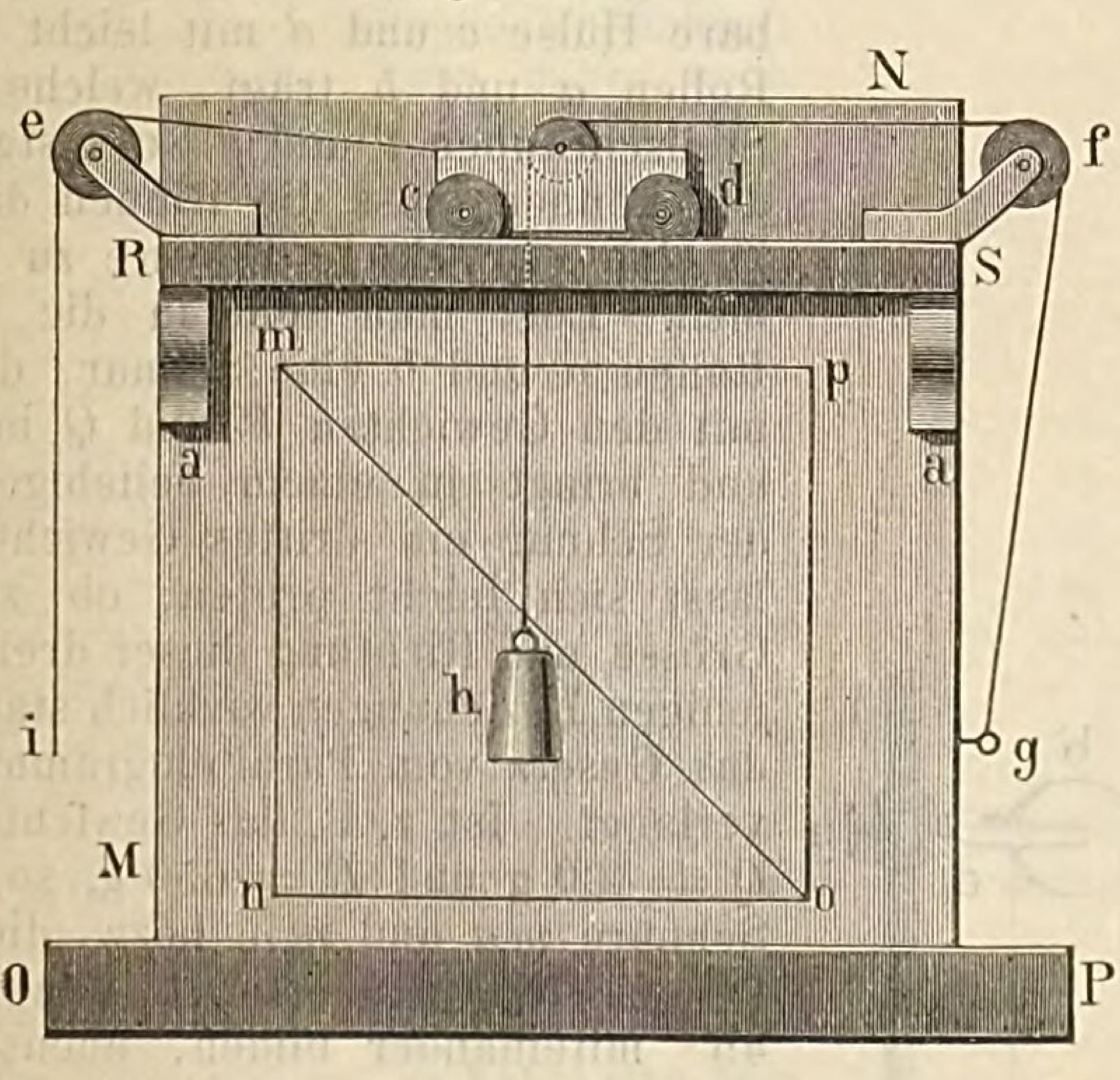
Weiter tragen die beiden Lineale *am*, *cm* an einem senkrechten Messingstabe je einen nach aussen gerichteten, mit der Schwingungsebene der Pendel parallel laufenden Kreisbogen mit einer Teilung, deren Nullpunkt im Befestigungspunkt des Bogens liegt. Man richtet nun die Lineale so, dass sie einen für den Versuch ge-

Erkl. 22. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, den man als den Fundamentalsatz der Mechanik ansehen kann, wurde zuerst von Galilei bei seinen Untersuchungen über krummlinige Bahnen angewandt; erst 30 Jahre später wurde er von dem englischen Mathematiker Newton als das „zweite Gesetz der Bewegung" in seinem berühmten Werk „Prinzipien der Naturphilosophie" aufgestellt.

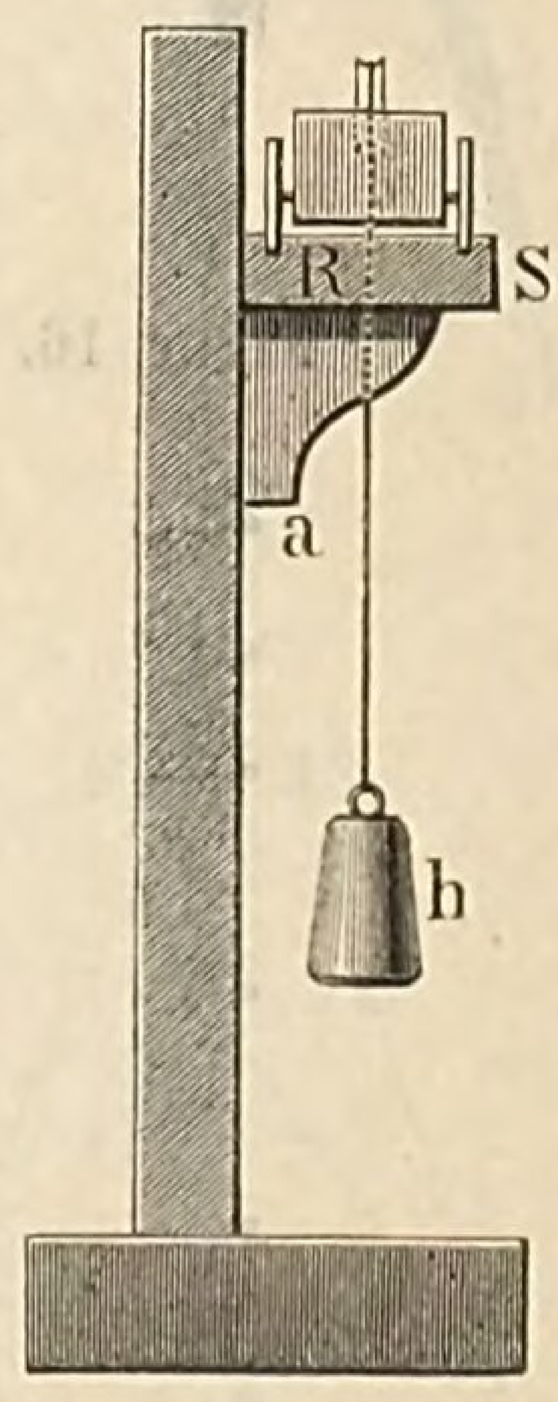
wählten Winkel einschliessen, bezeichnet mit spitzer Kreide die Richtung der Schenkel desselben auf der geteilten Hälfte der Fussplatte, hebt beide Pendel bis zu gleichen Höhen, welche auf den Messingbögen abgelesen werden können, und lässt dann beide Pendel vollkommen gleichzeitig fallen; alsdann wird die Elfenbeinkugel sich in der Halbierungslinie des vorgezeichneten Winkels bewegen.

Lässt man die Pendelkörper aus verschiedenen Höhen fallen, so beschreibt die Elfenbeinkugel die Diagonale eines Parallelogramms, welches (nach der später folgenden Bestimmung der Resultierenden durch Konstruktion) vorher aufgezeichnet wird, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Stosskräfte, welche zwei Pendel von gleicher Länge und Masse annehmen, wenn sie um die Winkel α und β gehoben werden und wieder in die Vertikale zurückfallen, sich verhalten wie $\sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2}$ [1]).

Figur 14a.



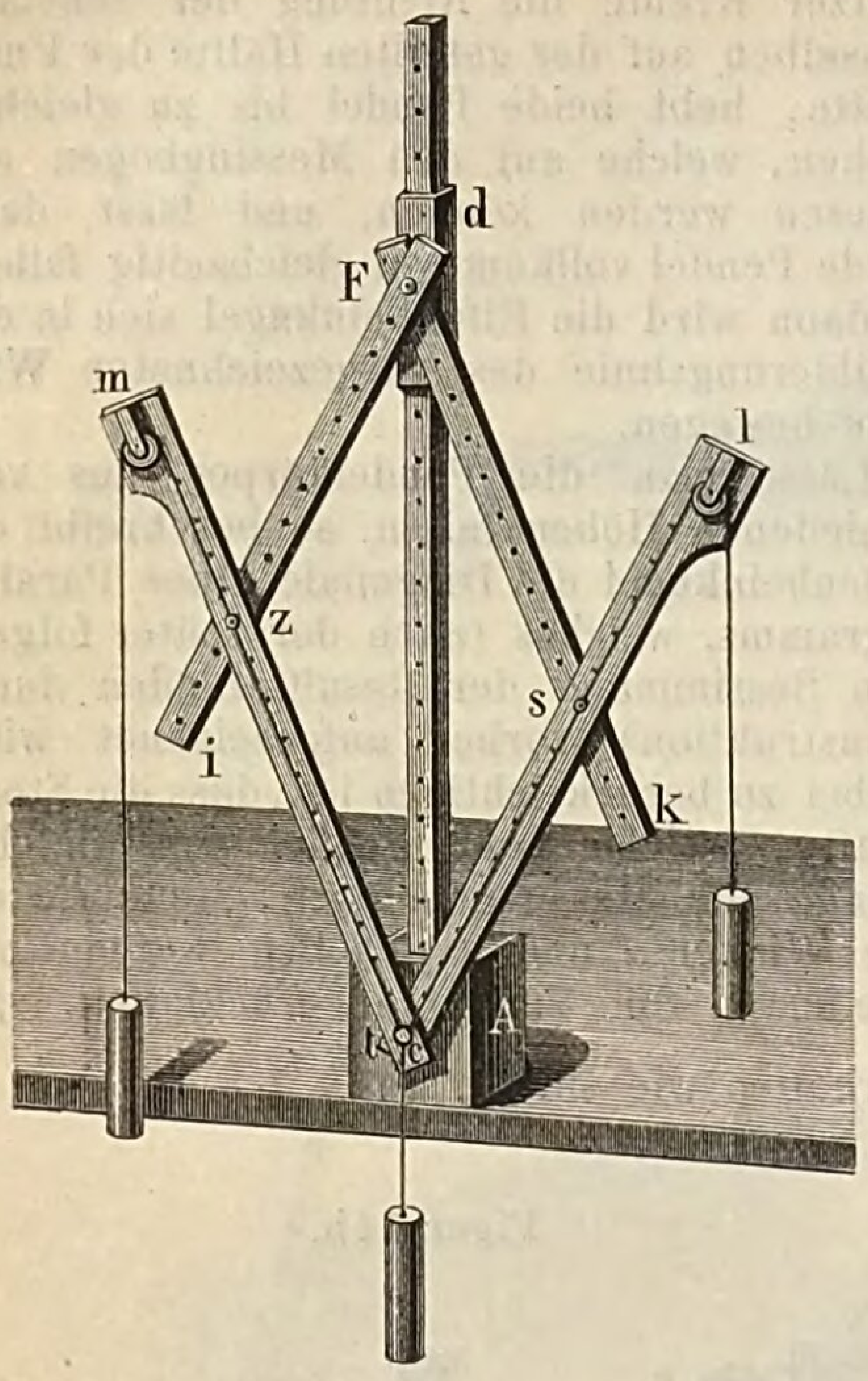
Figur 14b.



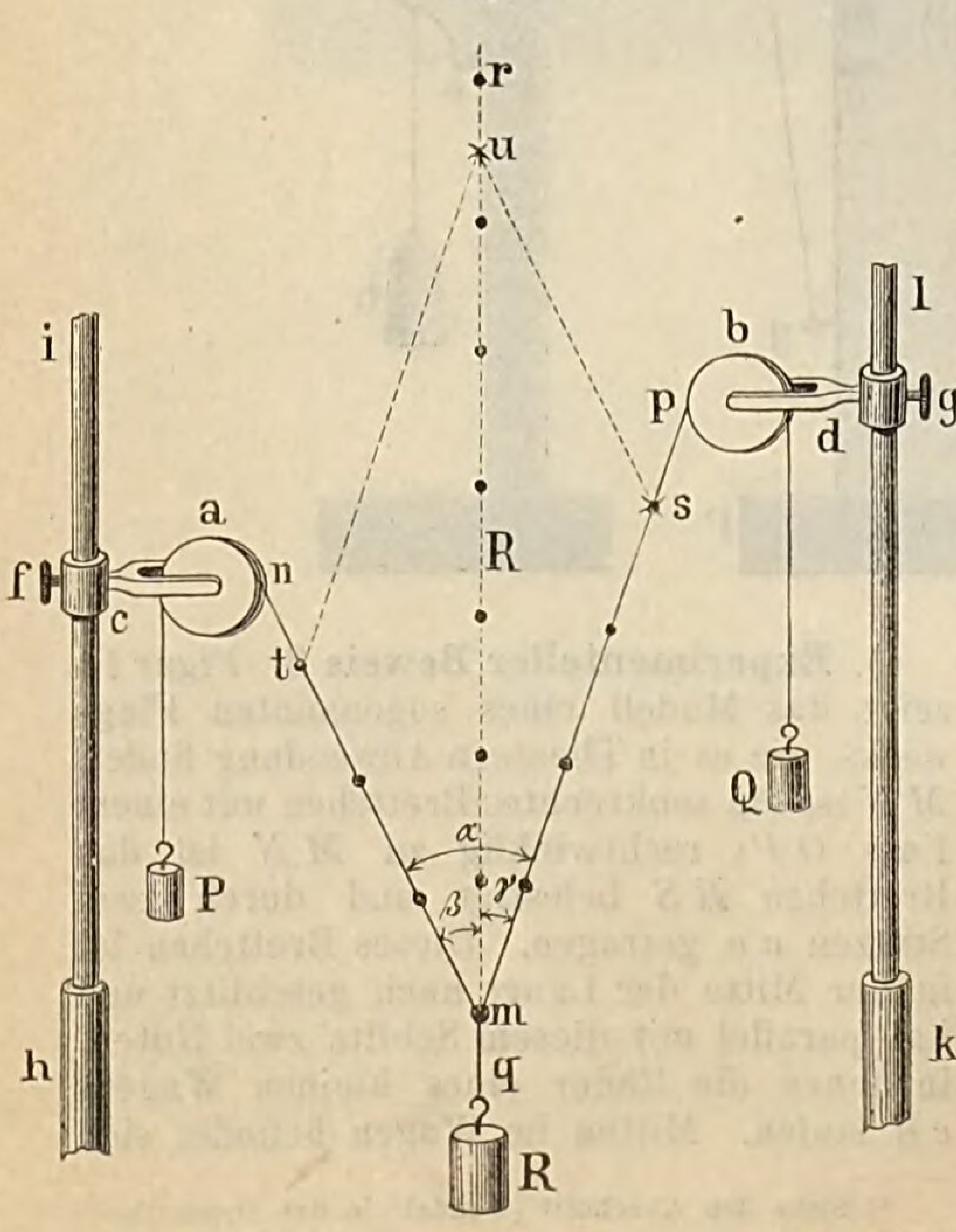
4). **Experimenteller Beweis 3.** Figur 14 zeigt das Modell eines sogenannten Flugwerks, wie es in Theatern Anwendung findet. MN ist ein senkrechtes Brettchen mit einem Fuss OP; rechtwinklig zu MN ist das Brettchen RS befestigt und durch zwei Stützen $a\,a$ getragen. Dieses Brettchen ist in der Mitte der Länge nach geschlitzt und hat parallel mit diesem Schlitz zwei Nuten, in denen die Räder eines kleinen Wagens $c\,d$ laufen. Mitten im Wagen befindet sich

[1]) Siehe den Abschnitt „Pendel" in der Dynamik.

Figur 15.



Figur 16.



eine Rolle, über welche eine bei *g* befestigte Schnur geschlungen ist, die das Gewicht *h* trägt. Wird nun mittels der bei *C* am Wagen befestigten über die Rolle *e* laufenden Schnur *i*, dieser über das Brettchen *RS* weggezogen, so steigt zugleich das Gewicht *h* nach der Diagonale *mo* des Parallelogramms *mnop*.

5). **Experimenteller Beweis 4.** Der *Crahay*sche Apparat, siehe Fig. 15, besteht aus vier eingeteilten verstellbaren Holzschienen, mit denen man Parallelogramme von verschiedenen Seiten und Winkeln bilden kann; an zwei Ecken *m* und *l* sind Messingrollen, über welche zwei Schnüre laufen, die von einem Ring *c* ausgehen, an welchem eine dritte Schnur hängt; durch Gewichte, welche an den zwei ersten Schnüren gleich den Seiten, und an der dritten gleich der Diagonale des Parallelogramms befestigt sind, wird immer Gleichgewicht hergestellt.

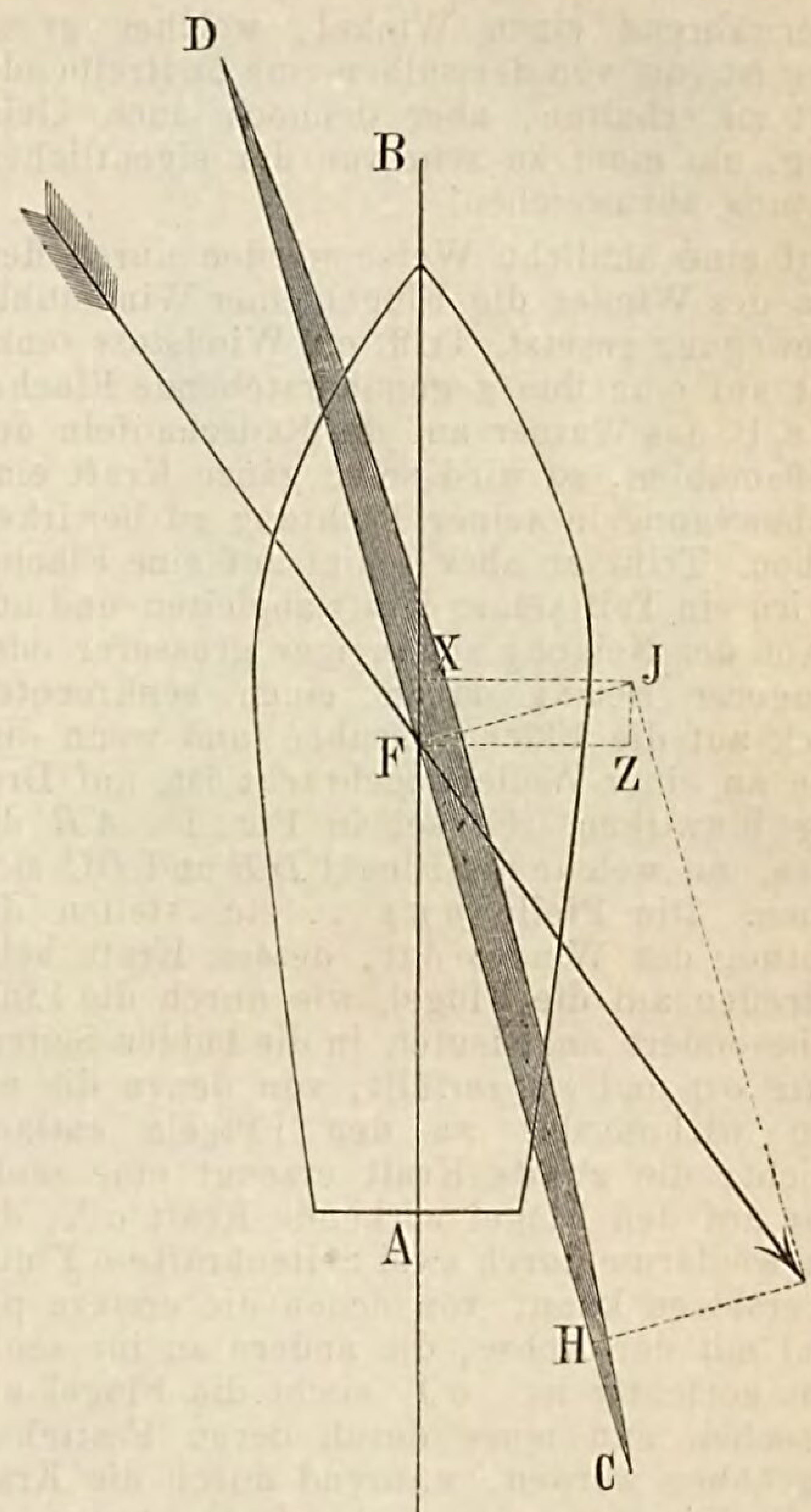
6). **Experimenteller Beweis 5.** An einer Tischplatte sind 2 senkrechte Stäbe *ih* und *lk* angeschraubt, deren jeder eine verschiebbare Hülse *c* und *d* mit leicht beweglichen Rollen *a* und *b* trägt, welche mittels der Stellschrauben *f* und *g* so festgestellt werden können, dass die Rinnen dieser Rollen in eine vertikale Ebene zu liegen kommen. Legt man nun in die Rinnen der Rollen *a* und *b* eine Schnur, deren Enden mit den Gewichten *P* und *Q* belastet sind, und bringt in einem beliebigen Punkt *m* der Schnur ein drittes Gewicht *R* an, so lässt sich leicht prüfen, ob zwischen der Grösse und Richtung dieser drei Kräfte diejenigen Beziehungen wirklich stattfinden, die das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte verlangt. Ist z. B. das Gewicht $P = 300$ g, $Q = 400$ g und $R = 650$ g, so müssen die Schnüre *mn* und *mp*, bezw. die in *m* wirkenden Kräfte *P* und *Q* den Winkel von 45° miteinander bilden, ebenso muss die nach *mr* rückwärts verlängerte Richtung der Kraft *R* die Winkel $\beta = 26°$ und $\gamma = 19°$ mit den Richtungen *mn* und *mp* bilden. Dass dies der Fall ist, davon kann man sich überzeugen, wenn man ein aus denselben Zahlen auf Papier konstruiertes Parallelogramm so hinter die Schnüre des Apparats in Figur 16 hält, dass zwei Seiten desselben mit den Schnüren *tm* und *sm* zur Deckung kommen und *mq* die geradlinige Verlängerung der Diagonale des gezeichneten Parallelogramms bildet.

Erkl. 23. Der in vorstehender Antwort angeführte Satz vom Parallelogramm der Kräfte findet nicht allein bei Dach- und Brückenkonstruktionen die vielseitigste Anwendung, auch im alltäglichen Leben begegnen wir Erscheinungen, die sich mittels jenes Satzes leicht erklären lassen: so z. B. wendet ein Schiffer, welcher mit seinem Boot das gegenüberliegende Ufer erreichen will, den genannten Satz unbewusst an, und die Erscheinung, dass ein Stein, der aus einem dahineilenden Eisenbahnwagen fällt, in diagonaler Richtung fällt, oder das Herabrollen eines Körpers auf einer schiefen Ebene, das Eindringen eines Keils in den Holzklotz, sowie die Bewegungen eines Pendels u. dergl. m. lassen sich durch den Satz vom Kräfteparallelogramm leicht erklären.

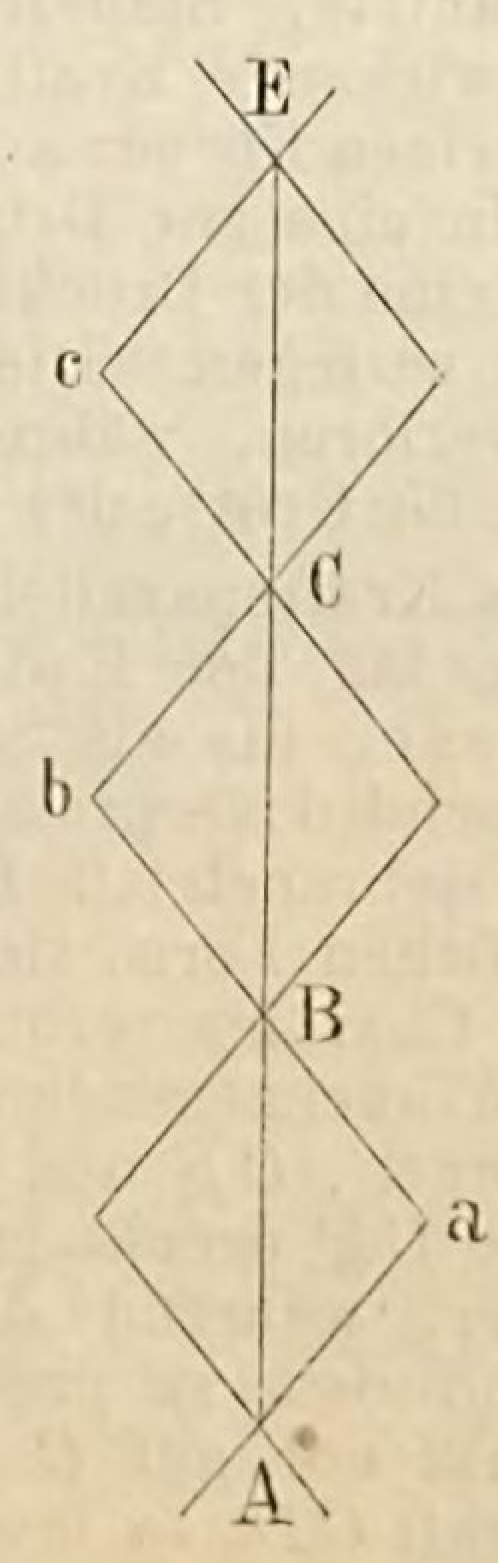
Die Weltkörper schlagen ununterbrochen die diagonale Richtung zwischen den beiden Kräften ein, die auf sie wirken, zwischen ihrer eigenen lebendigen Kraft und der Anziehung eines Zentralkörpers (siehe Lehrbuch der Dynamik, Zentralbewegung). Besonders zahlreich sind die Anwendungen jenes Satzes zur Zerlegung von Kräften.

Wenn ein Körper sich nicht in derjenigen Richtung bewegen kann, in welcher eine Kraft auf ihn einwirkt, so kommt nur die in die Richtung der Bewegung fallende Seitenkraft zur Wirkung; umgekehrt kann daher auch eine Kraft in einer andern Richtung wirken, als in ihrer eigenen, aber nur mit einem Teile ihres Betrages. Es sei in Figur 17 AB die Längsachse eines Schiffes, CD die Stellung des Segels und FG die Richtung des Windes; dessen Kraft kann man zerlegt denken in die beiden Seitenkräfte FH und FJ, von denen nur die senkrecht gegen das Segel gerichtete Kraft FJ zur Wirkung kommt. Diese Kraft lässt sich wieder in die zwei Seitenkräfte FX und FZ zerlegen, von denen die erste das Schiff in seiner Längsachse, die zweite senkrecht dagegen, dasselbe nach der Seite fortzutreiben sucht. Da aber das Schiff, infolge seiner Form, bei einer seitlichen Bewegung einen viel grösseren Widerstand des Wassers zu überwinden hat als bei seiner Bewegung nach vorn, so wird sich dasselbe vorzugsweise in der Richtung seiner Längsachse fortbewegen. Bläst hingegen der Wind dem Schiffe direkt entgegen, so kann man dem Segel keine Stellung geben, welche zum Forttreiben des Schiffes dienlich wäre. In diesem Falle wird die Richtung, die das Schiff eigentlich einschlagen soll, in zwei Seitenrichtungen zerlegt, in welchen man abwechselnd segelt; ein Verfahren, welches **Lavieren** genannt wird. Soll sich z. B. ein Schiff von A nach E, s. Fig. 18, bewegen und der Wind bläst von E nach A, so wird die Richtung der Bewegung AB in zwei andere Richtungen zerlegt, indem man AB als die Diagonale eines Parallelogramms ansieht, dessen Seiten Aa, aB vom Schiff nacheinander durchsegelt werden, anstatt dass es sich durch die Diagonale AB bewegt. Auf

Figur 17.



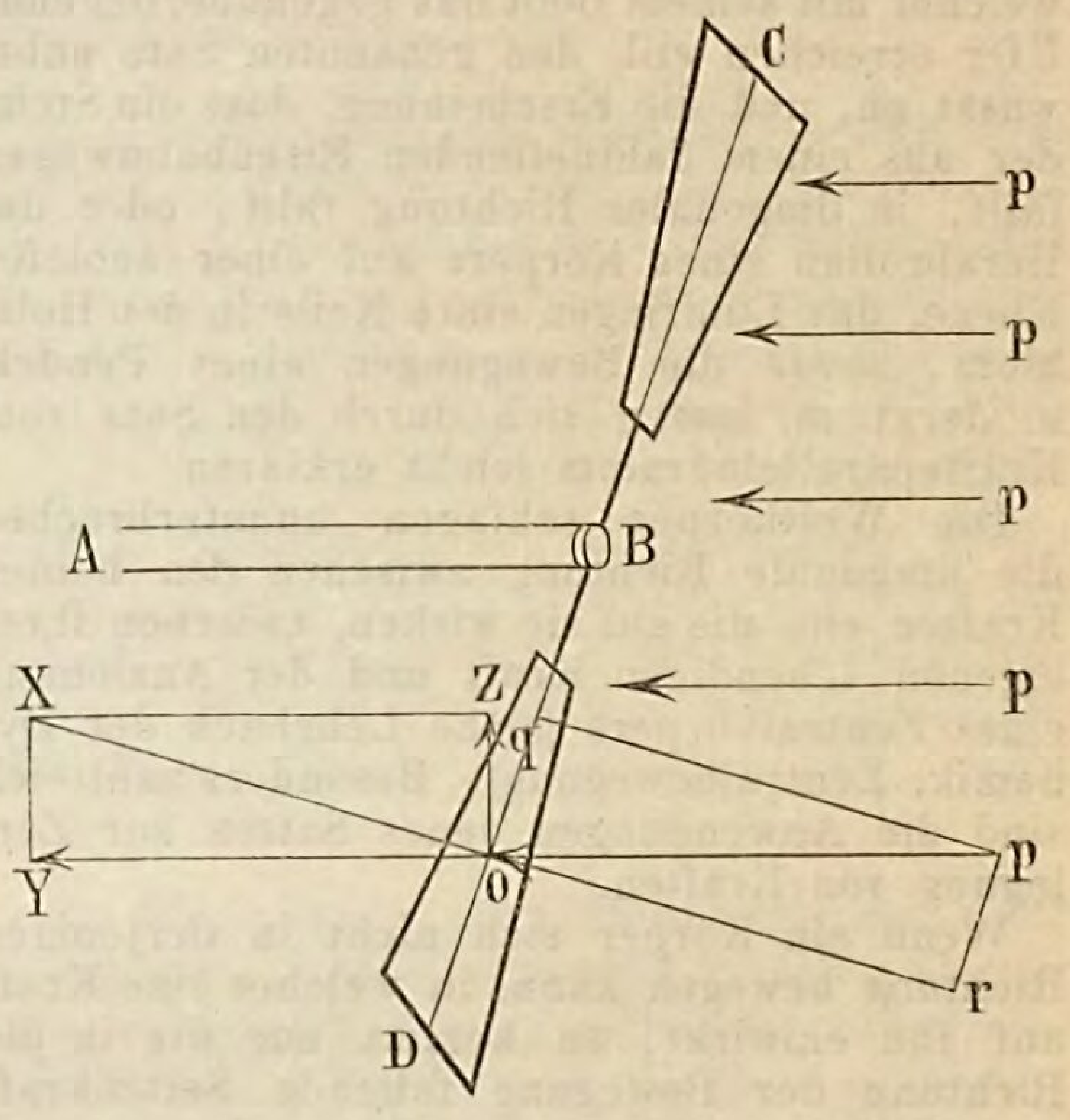
Figur 18.



diese Weise bewegt sich das Schiff durch Bb, bC, Cc und cE und bildet mit dem Winde immerwährend einen Winkel, welcher gross genug ist, um von demselben eine forttreibende Kraft zu erhalten, aber dennoch auch klein genug, um nicht zu sehr von der eigentlichen Richtung abzuweichen.

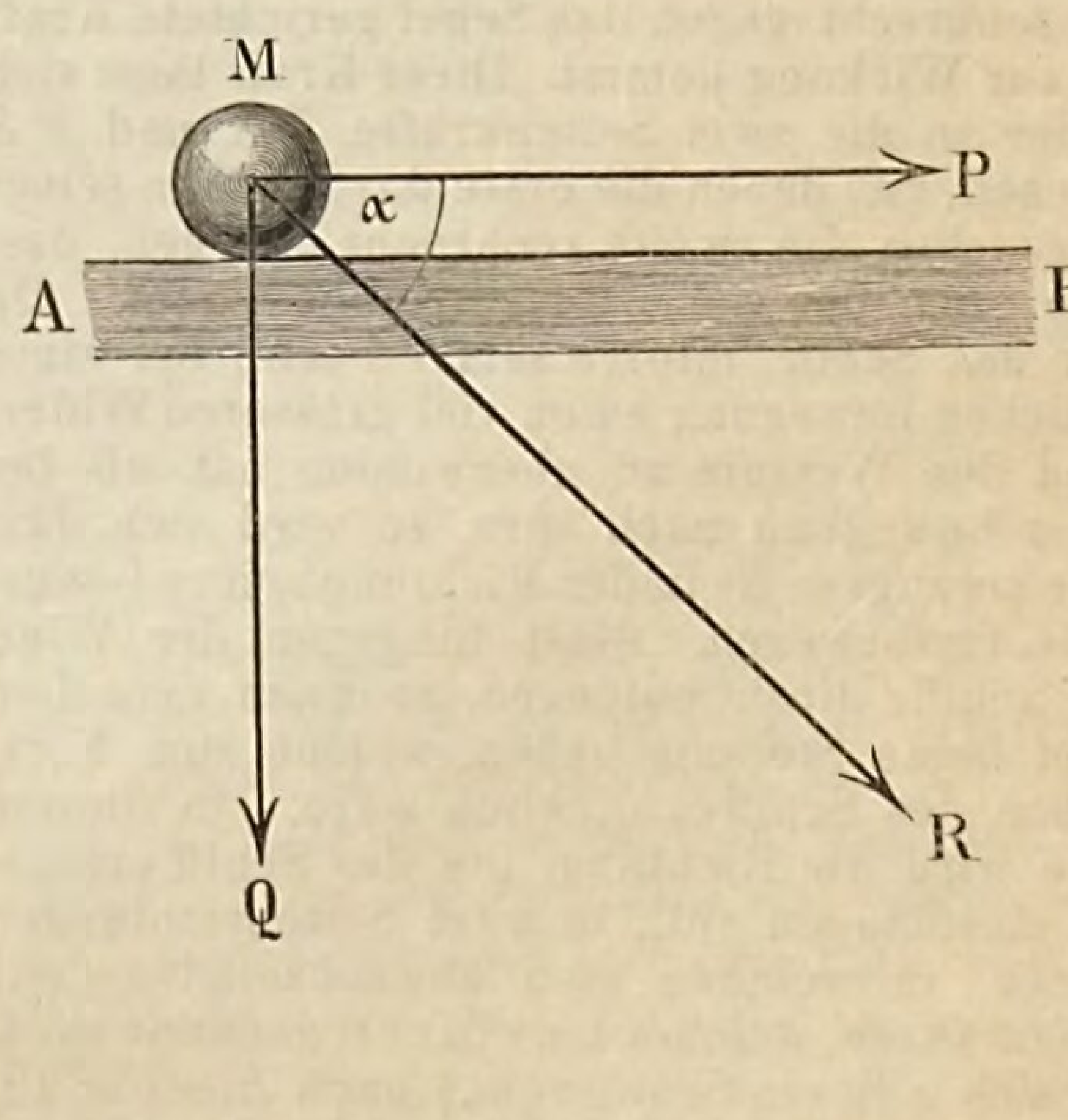
Auf eine ähnliche Weise werden durch den Stoss des Windes die Flügel einer Windmühle in Bewegung gesetzt. Trifft ein Windstoss senkrecht auf eine ihm gegenüberstehende Fläche, wie z. B. das Wasser auf die Radschaufeln der Schiffsmühlen, so wird seine ganze Kraft eine Fortbewegung in seiner Richtung zu bewirken streben. Trifft er aber schief auf eine Fläche, so wird ein Teil seiner Kraft abgleiten und nur ein von der Neigung abhängiger grösserer oder geringerer Betrag davon einen senkrechten Druck auf die Fläche ausüben und wenn dieselbe an einer Welle angebracht ist, auf Drehung hinwirken. Es sei in Fig. 19 AB die Achse, um welche die Flügel DB und BC sich drehen. Die Pfeile $ppp\ldots$ etc. stellen die Richtung des Windes dar, dessen Kraft beim Auftreffen auf die Flügel, wie durch die Linie op besonders angedeutet, in die beiden Seitenkräfte oq und ro zerfällt, von denen die erstere wirkungslos an den Flügeln entlang streicht; die zweite Kraft erzeugt eine senkrecht auf den Flügel wirkende Kraft oX, die man wiederum durch zwei Seitenkräfte oY und oZ ersetzen kann, von denen die erstere parallel mit der Achse, die andere zu ihr senkrecht gerichtet ist. oY sucht die Flügel abzubrechen und muss durch deren Festigkeit aufgehoben werden, während durch die Kraft oZ die Flügel in eine drehende Bewegung um ihre Achse versetzt werden.

Figur 19.



Auch bei dem Drachen oder Windvogel der Knaben wirkt die Kraft in ähnlicher Weise, gleichwie beim schiefen Stosse des Wassers gegen Räderschaufeln, Steuerruder u. dergl. mehr. Soll die wirkende Kraft MR, Fig. 20, einen Druck auf einen Körper ausüben, so muss man sie immer in eine zur Druckfläche senkrechte MQ und eine der Druckfläche parallele Seitenkraft MP zerlegen. Die letztere geht für den Druck verloren, während die erstere durch ihre Länge die Grösse des Druckes angibt.

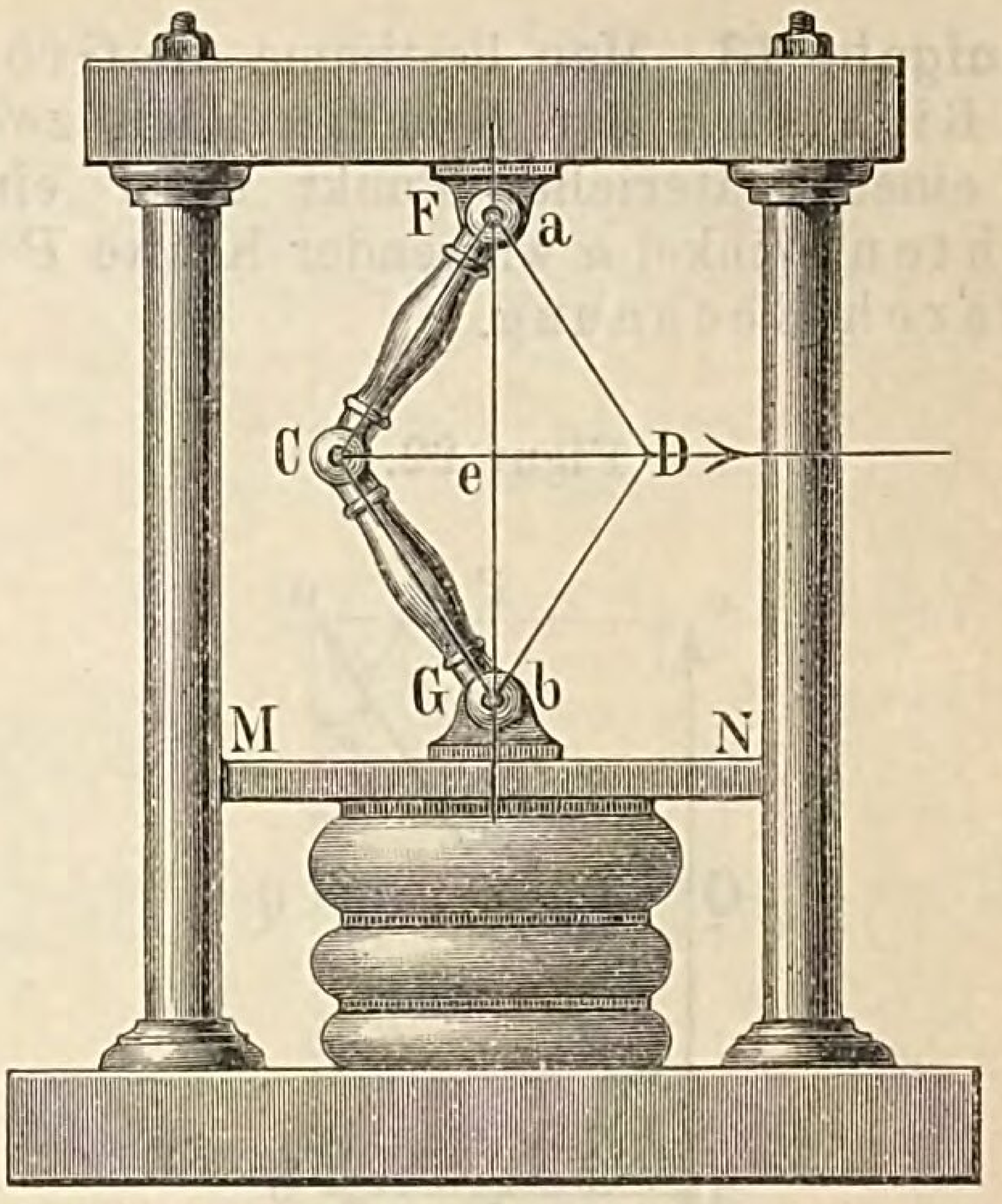
Figur 20.



Das Gesetz des Kräfteparallelogramms findet auch Anwendung bei der Kniepresse oder Kniehebelpresse, die als Siegelpresse, als amerikanische Buchdruckerpresse und als Münzprägmaschine in Gebrauch ist. Dieselbe besteht in ihrer gewöhnlichen Form, siehe Fig. 21, aus zwei durch ein Charnier verbundenen, unter einem stumpfen Winkel gegeneinander geneigten festen Metallstangen, CF und CG, das freie Ende der Stange CF drückt bei F gegen ein festes Widerlager, während das der andern Stange bei G auf dem zu pressenden Gegenstand ruht. Wirkt nun auf C in wagerechter Richtung die Kraft CD, so lässt sich dieselbe zunächst in die den beiden Armen CF und CG

parallelen Kräfte *Ca* und *Cb* zerlegen. Weil aber jeder Druck auf eine Unterlage nur in senkrechter Richtung wirkt, so muss man, um die Grösse des senkrechten Drucks zu finden, welchen die in der Richtung *CG* wirkende Kraft *Cb* bei *G* ausübt, dieselbe noch in 2 Seitenkräfte zerlegen, von denen die eine auf *MN* senkreckt, die andere damit parallel ist. Da nun die Grössen dieser Kräfte durch die Linien *be* und *Ce* dargestellt werden, von denen *be* den auf *MN* ausgeübten senkrechten Druck angibt, so verhält sich beim Knie die wirkende Kraft zum ausgeübten Druck wie *CD* zu *be*. Der Gewinn an Kraft wird daher um so grösser, je mehr der zusammengepresste Gegenstand nachgibt und infolge davon die Schenkel *CF* und *CG* einen immer grösseren Winkel einschliessen und sich dem gestreckten Winkel (d. h. der geraden Linie) nähern.

Figur 21.



b). Ueber die Zusammensetzung zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte.

Frage 13. Worin besteht die Zusammensetzung zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte im allgemeinen und auf welche Weise kann diese Zusammensetzung vorgenommen werden?

Erkl. 24. Die Resultate können bei Ermittelung der Resultierenden durch Konstruktion (besonders bei grossen Werten für *P* und *Q*, und wenn die Winkel auf Minuten, womöglich auf Sekunden genau festgestellt, bezw. gemessen werden sollen) nicht besonders genau ausfallen, weil dieselben einer sinnlichen Wahrnehmung unterliegen. Da wo es auf grosse Genauigkeit nicht ankommt, genügt die in nebenstehender Antwort erwähnte konstruktive oder graphische Methode, und führt, ohne dass die Kenntnis höherer Rechnungsarten notwendig ist, ziemlich rasch zum Ziele. Wo es sich dagegen um genaue Ermittelung der Grösse und Richtung der Resultierenden handelt, wendet man trigonometrische Rechnung an.

Antwort. Die Zusammensetzung zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte besteht im allgemeinen darin, dass man mit Zuhilfenahme des Satzes über das Parallelogramm der Kräfte aus den bekannten Intensitäten jener zwei Kräfte und dem bekannten Winkel, welchen die Richtungen derselben miteinander bilden, die Intensität der Resultante der beiden Kräfte, sowie deren Richtung in bezug auf die Richtungen jener Kräfte bestimmt [1]). Die erwähnte Zusammensetzung kann entweder auf graphische Weise, bezw. durch Konstruktion, oder auf mathematische Weise, bezw. durch Rechnung vorgenommen werden.

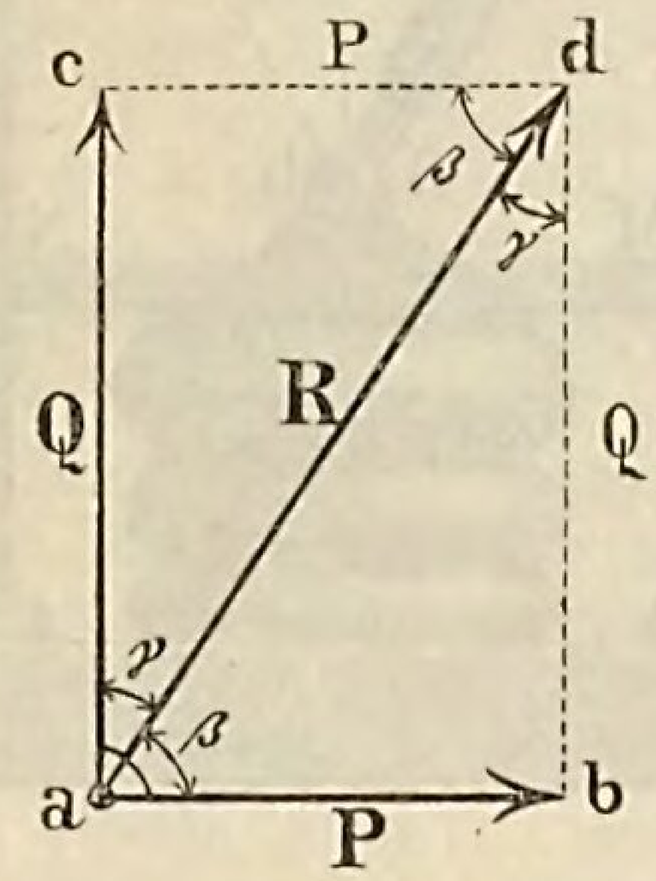
[1]) Siehe Erkl. 24.

Anmerkung 1. In nachstehenden gelösten Aufgaben ist gezeigt, wie man bei der Zusammensetzung zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte in den einzelnen Fällen zu verfahren hat und wie diese Zusammensetzung zur Lösung anderweitiger praktischer Aufgaben benutzt wird.

c). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Man bestimme die Grösse und Richtung der Resultierenden zweier auf einen materiellen Punkt unter einem rechten Winkel α wirkender Kräfte P und Q durch Rechnung.

Figur 22.



Erkl. 25. Schneiden sich zwei gerade Linien in einem Punkt so, dass die entstehenden vier Winkel sämtlich gleich gross sind, so nennt man jeden dieser Winkel einen rechten und sagt, die Linien stehen senkrecht zueinander; sind aber die entstehenden vier Winkel nicht von gleicher Grösse, so nennt man die zwei kleineren spitze, die zwei grösseren stumpfe Winkel. Spitze und stumpfe Winkel nennt man auch schiefe Winkel.

Erkl. 25a. Ein planimetr. Lehrsatz heisst: „Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter Winkel, so sind auch alle übrigen Winkel rechte Winkel, d. h. das Parallelogramm ist ein rechteckiges Parallelogramm oder ein Rechteck.“ (Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie).

Erkl. 26. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie heisst: „Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.“

Dieser Satz ist unter dem Namen des pythagoräischen Lehrsatzes bekannt.

In den rechtwinkligen Dreiecken abd und acd der Fig. 22 besteht nach diesem Satz die Relation:

$$\overline{ad}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bd}^2$$

oder:

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

Erkl. 27. Unter dem „Sinus“ eines spitzen Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete a zur Hypotenuse c dieses Dreiecks, in Zeichen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Auflösung. Stellen, siehe Figur 22 und Erklärung 11, die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ die Intensitäten der gegebenen Kräfte P und Q vor, welche unter dem Winkel $a = 90^0$ an dem materiellen Punkt a wirken, so kann die Grösse und Richtung der Resultierenden folgendermassen durch Rechnung bestimmt werden:

Konstruiert man sich nach dem Satz von dem Parallelogramm der Kräfte über den Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ das Parallelogramm $abdc$, so ist die Resultante dieser Kräfte durch die Diagonale $\overline{ad}$ des Parallelogramms ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt. Da nun in letzterem

$$\overline{cd} = \overline{ab} \text{ oder } = P$$

$$\overline{bd} = \overline{ca} \text{ oder } = Q$$

ist und sämtliche Winkel nach Erkl. 25a rechte [1]) sind, so hat man nun in jedem der rechtwinkligen Dreiecke abd und acd nach dem pythagoräischen Lehrsatz[2]) für die Resultierende R

A). . . . $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck nach Erkl. 29 zur Berechnung des Winkels β, welchen die Resultante R mit der Kraft P bildet, die Relation:

B). $\operatorname{tg}\beta = \frac{Q}{P}$

und weiter ergibt sich nach der Erkl. 29 aus dem rechtwinkligen Dreieck zur Berechnung des Winkels γ, welchen die Resultante R mit der Kraft Q bildet, die Relation:

C). $\operatorname{tg}\gamma = \frac{P}{Q}$

Will man zur Berechnung der Winkel β und γ die bereits bestimmte Resultante benutzen, so kann man hierzu die sich aus dem rechtwinkligen Dreieck nach Erkl. 27 und 28 ergebenden Relationen benutzen:

D). $\sin\beta = \frac{Q}{R}$

und

E). $\sin\gamma = \frac{P}{R}$

oder auch:

F). $\cos\gamma = \frac{Q}{R}$

und

G). $\cos\beta = \frac{P}{R}$

1) Siehe Erkl. 25.
2) Siehe Erkl. 26

Erkl. 28. Unter dem Kosinus eines spitzen Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck, versteht man das Verhältnis der diesem Winkel anliegenden Kathete b zur Hypotenuse c dieses Dreiecks; in Zeichen:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Erkl. 29. Unter der trigonometr. Tangente oder der „Tangens" eines spitzen Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete a zur anliegenden Kathete b dieses Dreiecks; in Zeichen:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{a}{b}$$

Erkl. 30. Unter der „Kotangens" eines spitzen Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der diesem Winkel anliegenden Kathete b zur gegenüberliegenden Kathete a dieses Dreiecks; in Zeichen:

$$\text{ctg}\, \alpha = \frac{b}{a}$$

(S. Kleyers Lehrb. d. Goniometrie u. eben. Trigonometrie.)

Aufgabe 14. Bestimme die Grösse und Richtung der Resultierenden zweier auf einen materiellen Punkt unter einem rechten Winkel wirkender Kräfte P und Q durch Konstruktion.

Erkl. 31. Ein Transporteur oder Winkelmesser ist ein halbkreisförmiges Instrument, dessen Rand genau in Grade eingeteilt ist. Der innere Raum dieses Halbkreises ist meist bis auf den ca. 1 cm breiten Rand ausgeschnitten und in der Richtung des Durchmessers von 0° bis 180° durch eine linealförmige Fläche, welche auf beiden Enden ein kleines Stückchen über den Halbkreis hinausragt, geschlossen. An diesem Lineal ist der Mittelpunkt des Kreises markiert, meist durch ein kleines, ausgeschnittenes rechtwinkliges Dreieck, so dass die rechtwinklige Ecke den Mittelpunkt des Halbkreises bezeichnet. Der zu messende oder zu zeichnende Winkel hat den Mittelpunkt des Transporteurs als Scheitel und den Halbmesser desselben als den einen Schenkel.

Auflösung. Man konstruiere, siehe Fig. 22, zunächst den rechten Winkel und trage auf den Schenkeln desselben Stücke ab, welche den gegebenen Kräften P und Q entsprechen. Wirkt z. B. in der Richtung von $\overline{ab}$ eine Kraft von 8 und in der Richtung von $\overline{ac}$ eine Kraft von 15 kg, so trage man auf ab eine Strecke gleich 8, und auf ac eine Strecke gleich 15 jener Einheiten ab, deren eine die Krafteinheit repräsentiert; dann konstruiere man über den so bestimmten Seiten $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ das Parallelogramm $abdc$ und messe mit Hilfe eines Zirkels oder mit Hilfe eines Centimetermassstabes die Diagonale desselben, wodurch man die Anzahl der zu Grunde gelegten Einheiten oder die Grösse der Resultante erhält. Durch Messung des Winkels β mittels des Transporteurs [1]) erhält man die Richtung der Resultante.

[1]) Siehe Erkl. 31.

Aufgabe 15. Es wirken zwei Kräfte, $P = 12$ kg und $Q = 35$ kg unter einem rechten Winkel auf einen materiellen Punkt. Welches ist die Richtung und Grösse der Resultierenden?

Hilfsrechnungen:

1). . $12 . 12 = 144$
$35 . 35 = 1225$
$\overline{1369}$

2). . $\sqrt{13|69} = 37$
9
$\overline{6 : 469}$
469
$\overline{{}^{\prime\prime}}$

Auflösung. Nach Gleichung A). in Auflösung der Aufgabe 13 ist in Rücksicht der für P und Q gegebenen Zahlenwerte:

$$R = \sqrt{12^2 + 35^2}$$

Hieraus erhält man:

$$R = \sqrt{1369} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

oder:

1). . . $R = 37$ kg „ „ 2)

Hilfsrechnungen.

3). Aus der nebenstehenden Gleichung:

$$\sin\beta = \frac{35}{37}$$

kann man den Winkel β wie folgt berechnen:

$$\log\sin\beta = \log 35 - \log 37$$

Nun ist: $\log 35 = 1{,}5440680$
$-\log 37 = -1{,}5682017$
$\log\sin\beta = 9{,}9758663-10$

mithin:

num-log sin β oder $\beta = 71^0\,4'\,31{,}2''$

4). Aus der nebenstehenden Gleichung:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{35}{12}$$

kann man den Winkel β wie folgt berechnen:

$$\log\operatorname{tg}\beta = \log 35 - \log 12$$

Nun ist: $\log 35 = 1{,}5440680$
$-\log 12 = 1{,}0791812$
$\log\operatorname{tg}\beta = 0{,}4648868$

mithin:

num-log tg β oder $\beta = 71^0\,4'\,31{,}2''$

Nach Gleichung D). in Auflösung der Aufgabe 13 ist:

$$\sin\beta = \frac{35}{37}$$

oder:

2). . . $\beta = 71^0\,4'\,31{,}2''$ (siehe Hilfsrechn. 3)

Den Winkel γ erhält man aus der Relation:

$$\gamma = 90^0 - \beta$$

oder:

3). . . $\gamma = 18^0\,55'\,28{,}8''$

Benutzt man aber zur Berechnung des Winkels β Gleichung B), in Auflösung der Aufgabe 13, so erhält man:

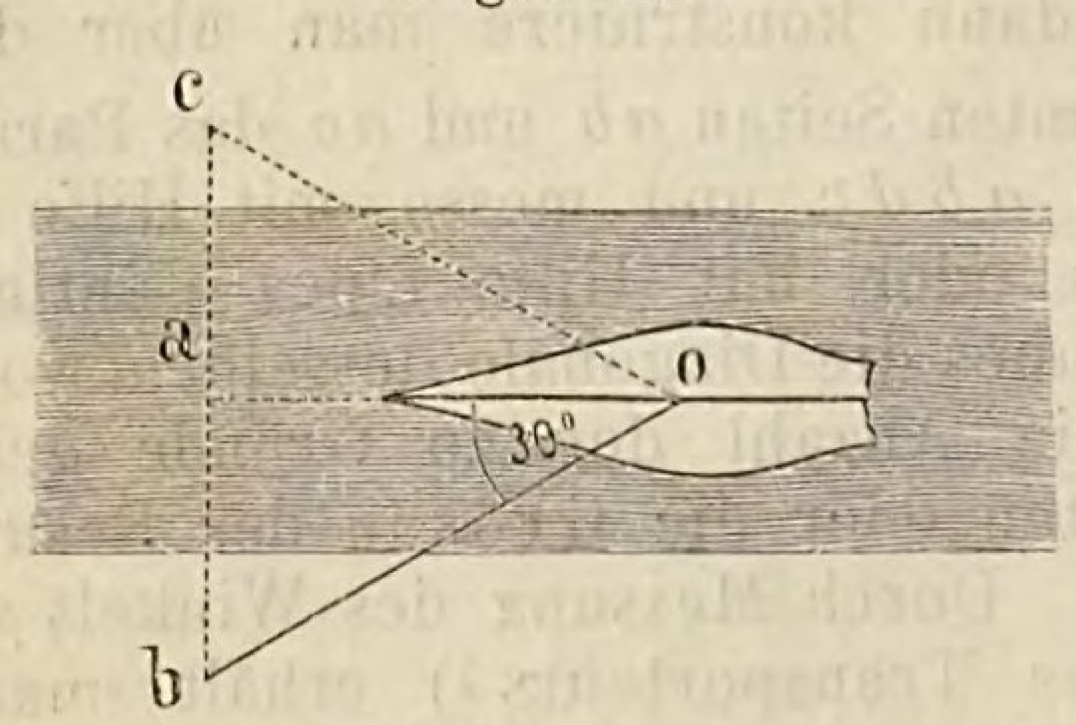
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{35}{12}$$

und hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 4:

$$\beta = 71^0\,4'\,31{,}2'' \text{ (s. o.)}$$

Aufgabe 16. Ein Schiff wird durch ein Seil, dessen Richtung mit der Richtung des Flusses einen Winkel von 30⁰ bildet, mit einer Kraft von 430 kg stromaufwärts gezogen. Mit welcher Kraft bewegt sich dasselbe gegen den Strom und mit welcher Kraft wird es seitwärts getrieben?

Figur 23.



Erkl. 32. Bezeichnet man die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit h, die Seite desselben mit s, so besteht die Relation:

a). $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$

(siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Nach dieser Gleichung erhält man zwischen der Seite $\overline{ob}$ des gleichseitigen Dreiecks cob und der Höhe $\overline{oa}$ desselben die Relation:

b). $\overline{oa} = \frac{\overline{ab}}{2}\sqrt{3}$

Auflösung. In Figur 23 stelle $\overline{ob}$ die durch das Seil auf das Schiff wirkende Kraft von 430 kg vor. Die Kraft, mit welcher sich das Schiff gegen den Strom bewegt, wird dargestellt durch die Linie $\overline{oa}$; dieselbe bildet bei dem gegebenen Winkel von 30⁰ die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks. Nach Erkl. 32 besteht somit die Relation:

$$\overline{oa} = \frac{1}{2}\cdot\overline{ob}\cdot\sqrt{3}$$

oder:

$$\overline{oa} = \frac{1}{2}\cdot 430\,.\sqrt{3}$$

oder:

$$\overline{oa} = 215\,.\sqrt{3}$$

oder:

$$\overline{oa} = 215\,.\,1{,}732$$

oder:

$$\overline{oa} = 372{,}38$$

Die Linie $\overline{ab}$, welche der Kraft entspricht, mit der das Boot seitwärts getrieben wird, ist aber:

$$\overline{ab} = \frac{1}{2}\,.\,\overline{ob} \quad\text{oder}\quad \overline{ab} = \frac{1}{2}\cdot 430$$

oder: $\overline{ab} = 215$

Aufgabe 17. Auf einen materiellen Punkt wirken unter einem rechten Winkel zwei Kräfte, nämlich

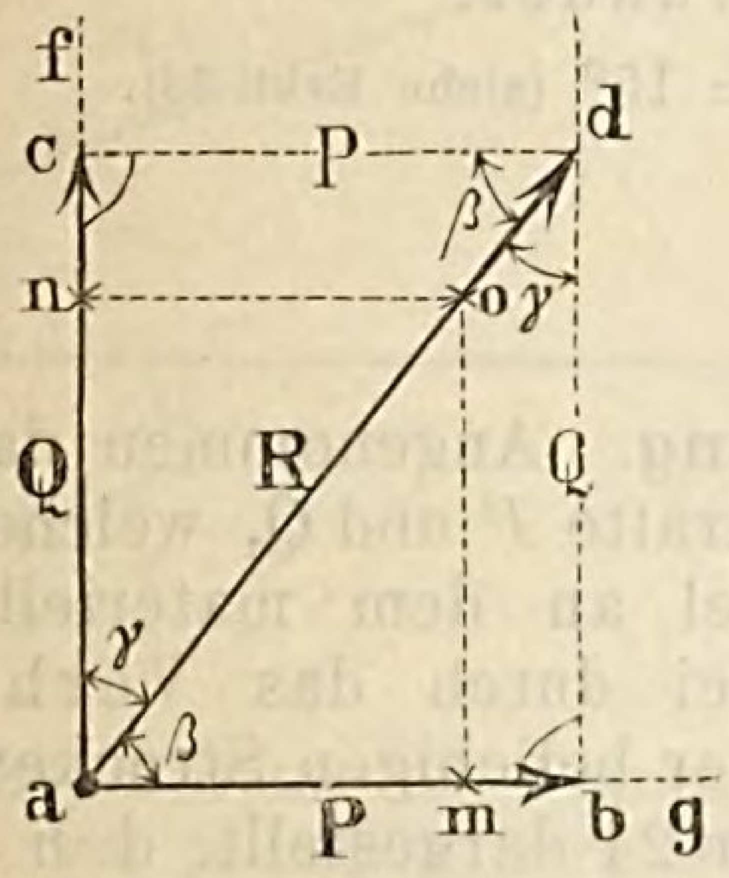
$$P = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

und

$$Q = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \text{ kg}$$

Wie gross ist die Resultante dieser Kräfte und wie gross sind die Winkel, welche die Resultante mit den gegebenen Kräften bildet?

Figur 24.



Hilfsrechnung.

$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$

```
  1
2|200
  189
34|1100
   1029
346|7100
    6924
     176 u. s. f.
```

Auflösung. Nach dem pythag. Lehrsatz erhält man, siehe Fig. 24, für die gesuchte Resultante R:

$$R = \sqrt{\left(\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{8+4\sqrt{3}}\right)^2}$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$R = \sqrt{8 - 4\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3}}$$

oder:

$$R = \sqrt{16}$$

und

$$R = 4$$

Die gesuchte Resultante ist somit $= 4$ kg

Zur Berechnung des Winkels β, siehe Figur 24, welchen die Resultante R mit der Kraft P bildet, hat man in dem bei b rechtwinkligen Dreieck abd, unter anderem, die Relation:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{bd}{ab}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Q}{P}$$

Setzt man für P und Q die gegebenen Werte ein, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{8 + 4 . 1{,}732}{8 - 4 . 1{,}732}}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{8 + 6{,}928}{8 - 6{,}928}}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{14{,}928}{1{,}072}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} (\log 14{,}928 - \log 1{,}072)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 14{,}928 &= 1{,}1740016 \\ -\log 1{,}072 &= -0{,}0301948 \\ &\overline{1{,}1438068} \\ &\cdot \tfrac{1}{2} \\ \log \operatorname{tg} \beta &= 0{,}5719034 \\ &\underline{\phantom{0{,}57}8633} \\ &\phantom{=-0{,}571}401 \end{aligned}$$

mithin:

$$\beta = 74^0\, 59'\, 54{,}76''$$

oder, abgerundet:

$$\beta = 75^0 \text{ (siehe Erkl. 33)}$$

Den Winkel γ, welchen die Resultante R mit der anderen Seitenkraft P bildet, kann man unabhängig von β aus dem rechtwinkligen Dreieck abd, mit Hilfe der Relation:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{P}{Q}$$

auf analoge Weise bestimmen, oder man kann denselben abhängig von β bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass:

$$\beta + \gamma = \sphericalangle\, b\,a\,c \text{ und } \sphericalangle\, bac = 90^0$$

mithin:

$$\gamma = 90^0 - \beta$$

oder: $\gamma = 90^0 - (74^0 59' 54{,}76'')$

ist. Hiernach erhält man:

$$\gamma = 15^0\, 0'\, 5{,}24''$$

oder abgerundet:

$$\gamma = 15^0$$ (siehe Erkl. 33).

Erkl. 33. Das Berechnen der Winkel bis auf Sekunden genau hat bei Anwendung der Statik in der Praxis keinen Wert.

Die genaue Berechnung der Winkel in diesem Werke ist für die Fälle, in welchen diese Aufgaben dem Studierenden zugleich auch zur Einübung mathematischer (logarithmischer) Regeln dienen sollen.

Aufgabe 18. Zwei Kräfte P und Q, deren Intensitäten im Verhältnis von 4 : 5 stehen, greifen unter rechtem Winkel an einem materiellen Punkt an; welche Winkel bildet die Resultante mit diesen Kräften P und Q?

Auflösung. Angenommen das Verhältnis 4 : 5 der Kräfte P und Q, welche unter rechtem Winkel an dem materiellen Punkt a wirken, sei durch das Verhältnis der Längen der beliebigen Strecken ab und ac, siehe Figur 24 dargestellt, d. h. ab sei $= 4$ und $ac = 5$ irgend welcher Längeneinheiten. — Die Richtung der Resultante R jener Kräfte ist alsdann, nach Satz 6 Frage 12, durch die Richtung der Diagonalen ad des Rechtecks $abdc$ gegeben.

Zur Berechnung des Winkels β, welchen die Resultante R mit der Kraft P bildet, hat man in dem rechtwinkligen Dreieck abd, die Relation:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b\,d}{a\,b}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{4}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log\operatorname{tg}\beta = \log 5 - \log 4$$

mithin ist nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$\beta = 51^0\, 20'\, 24{,}6''$$

oder, abgerundet:

$$\beta = 51^0\, 20'$$

Den Winkel γ findet man auf einfache Weise aus der Betrachtung, dass:

$$\gamma + \beta = 90^0$$

oder:

$$\gamma = 90^0 - 51^0\, 20'\, 24{,}6''$$

hiernach ist:

$$\gamma = 38^0\, 39'\, 35{,}4''$$

oder, abgerundet:

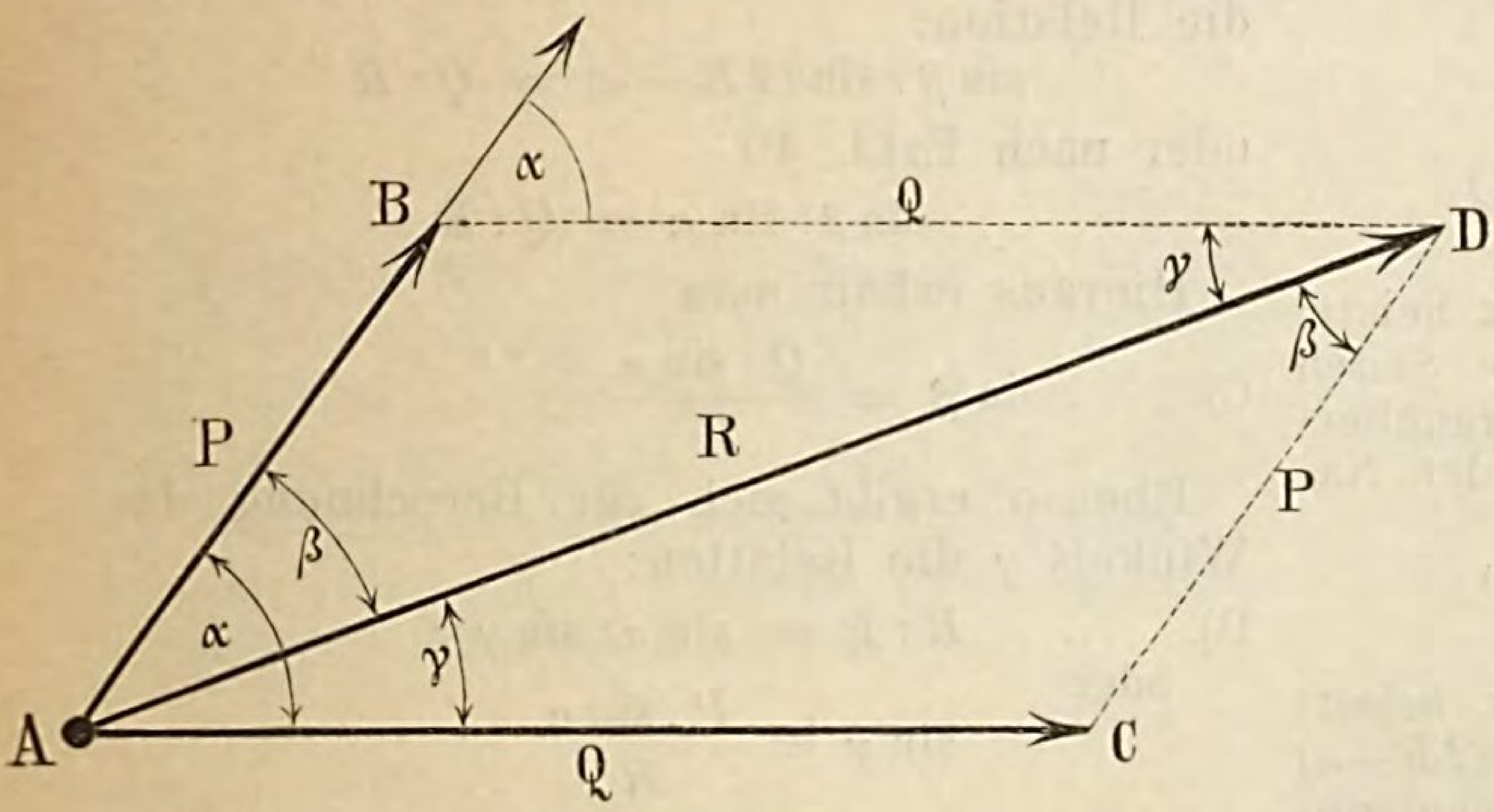
$$\gamma = 38^0\, 40'$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} \log 5 &= 0{,}6989700 \\ -\log 4 &= -0{,}6020600 \\ \hline \log\operatorname{tg}\beta &= 0{,}0969100 \\ && 8898 \\ && 202 \\ && 172{,}4 \\ && 29{,}6 \\ && 25{,}8 \end{aligned}$$

Aufgabe 19. Man bestimme die Grösse und Richtung der Resultierenden zweier auf einen materiellen Punkt unter dem schiefen Winkel α wirkenden Kräfte P und Q durch Rechnung!

Figur 25.



Erkl. 34. Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet: „Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden durchschnitten, so betragen je zwei Gegenwinkel zusammen $= 2R$.“
(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie.)

Erkl. 35. Ueber die Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke findet man ausführliches in Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.

Erkl. 36. Ein trigonometrischer Satz lautet: „In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten mal dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.“ Dieser Satz führt den Namen Carnotscher oder Kosinussatz oder Kosinusregel.
(Siehe Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.)

Erkl. 37. Ein goniometrischer Satz heisst: „Der Kosinus eines stumpfen Winkels $(2R-\alpha)$ ist gleich dem negativen Kosinus seines Supplementwinkels (α);“ in Zeichen:

$$\cos(2R-\alpha) = -\cos\alpha$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Formel 20.)

Auflösung. Man nimmt nach Erkl. 11 an, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ in Figur 25 die Intensitäten der Kräfte P und Q vorstellen und den gegebenen Winkel α einschliessen. Nach dem Satz über das Kräfteparallelogramm ist auch in diesem Fall die Resultante R der beiden gegebenen Kräfte durch die Diagonale $\overline{AB}$ des über $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ konstruierten Parallelogramms bestimmt.

In letzterem ist nun:

$$\overline{BD} = \overline{AC}$$

und jede dieser Grössen gleich Q, ferner

$$\overline{CD} = \overline{AB}$$

und jede dieser Grössen gleich P, endlich

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$$

und jeder derselben $= 2R - \alpha$ [1]) mithin kann man in jedem der Dreiecke ABD und ACD des gedachten Parallelogramms nach trigonometrischen Sätzen [2]) Beziehungen zwischen den Seiten $\overline{AB}$ $(= \overline{CD})$, $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ $(= \overline{AC})$ bezw. zwischen den Kräften P, R und Q und dem Winkel $(2R-\alpha)$ aufstellen.

Nach der Erkl. 36 ergibt sich aus dem Dreieck ABD die Relation:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,\overline{AB}\,.\,\overline{BD}\,.\cos(2R-\alpha)$$

oder:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2P\,.\,Q\,.\cos(2R-\alpha)$$

Da nun, nach Erkl. 37

$$\cos(2R-\alpha) = -\cos\alpha$$

ist, so erhält man

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2P\,.\,Q\,.\cos\alpha$$

somit

$$\text{A)} \ldots R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P\,.\,Q\,.\cos\alpha}$$

Ferner hat man zur Berechnung der Winkel, welche die Resultante mit den Kräften P und Q bildet, nach Erkl. 38 die Relation

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{Q+P}{Q-P}$$

oder da $\beta + \gamma = \alpha$ ist:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{Q+P}{Q-P}$$

[1]) Siehe Erkl. 34.
[2]) Siehe Erkl. 35.

Erkl. 38. Ein trigonometrischer Lehrsatz heisst: „Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks verhält sich zur Differenz dieser beiden Seiten, wie die Tangens der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel zur Tangens der halben Differenz dieser Winkel;" in Zeichen:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.)

Erkl. 39. Ein trigonometrischer Satz heisst: „In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel." Dieser Satz führt den Namen Sinussatz oder Sinusregel.
(Siehe Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.)

Erkl. 40. Ein goniometrischer Satz heisst: „Der Sinus eines stumpfen Winkels $(2R-\alpha)$ ist gleich dem Sinus seines Supplementwinkels (α)." In Zeichen:

$$\sin(2R-\alpha) = \sin\alpha$$

(S. Formel 17 in Kleyers Lehrb. d. eben. Trigonometrie.)

und hieraus erhält man

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{Q-P}{Q+P}$$

woraus man $\beta-\gamma$ berechnen kann. (Siehe die folgenden Aufgaben).

Soll die Berechnung der Winkel β und γ mit Hilfe der bereits ermittelten Resultante R stattfinden, so hat man nach Erkl. 39 die Relation:

$$\sin\beta : \sin(2R-\alpha) = Q : R$$

oder nach Erkl. 40

$$\sin\beta : \sin\alpha = Q : R$$

Hieraus erhält man

$$\text{C)} \ldots \sin\beta = \frac{Q\,.\,\sin\alpha}{R}$$

Ebenso ergibt sich zur Berechnung des Winkels γ die Relation:

$$\text{D)} \ldots R : P = \sin\alpha : \sin\gamma$$

oder

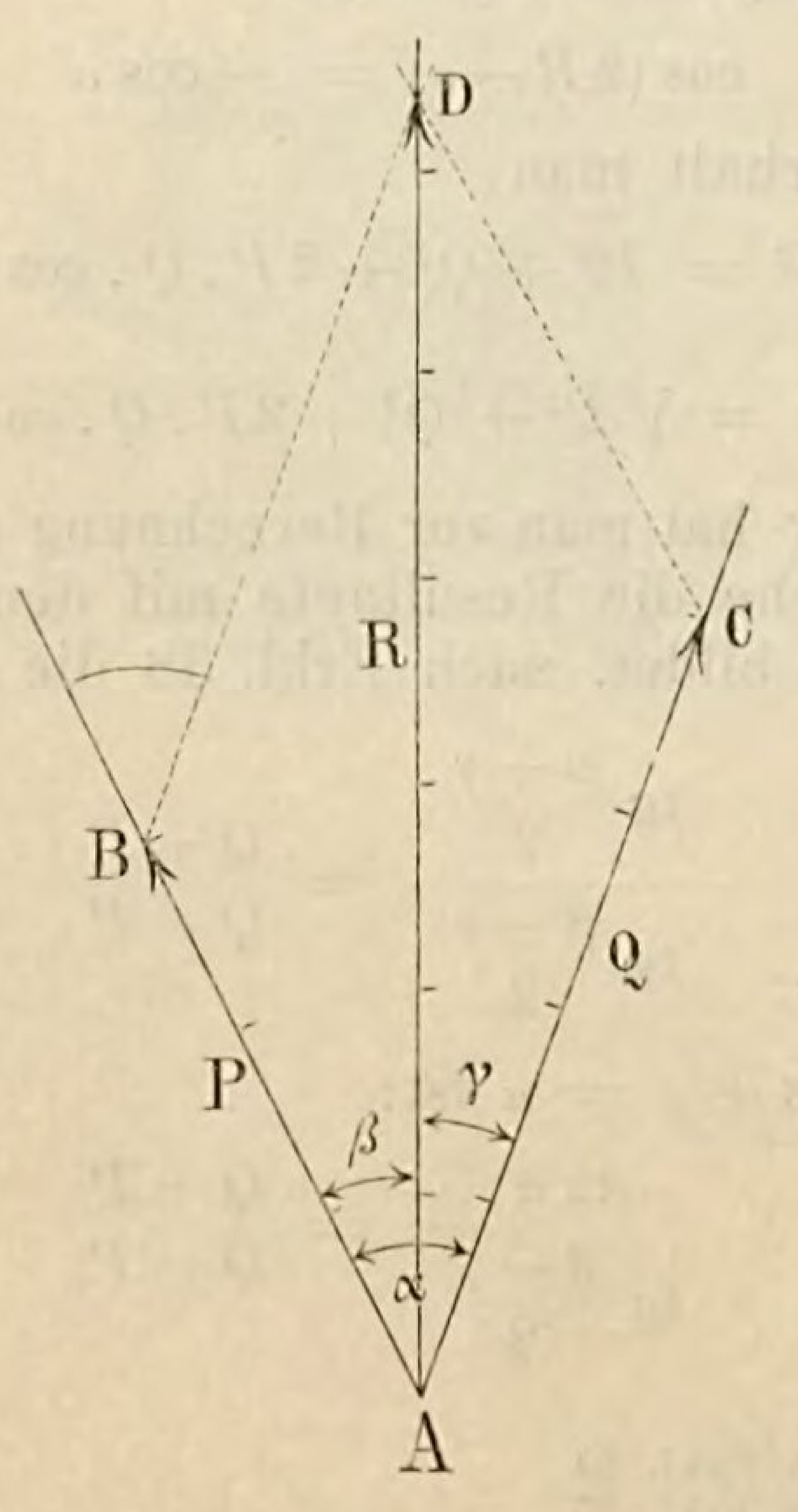
$$\sin\gamma = \frac{P\,.\,\sin\alpha}{R}$$

Aus den Gleichungen 2) und 3) erhält man endlich noch durch Division

$$\text{E)} \ldots \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{Q}{P}$$

Aufgabe 20. Man bestimme die Grösse und Richtung der Resultierenden zweier unter einem Winkel α auf einen Punkt wirkender Kräfte P und Q graphisch, d. h. durch Konstruktion.

Figur 26.



Auflösung. Da die Grösse der beiden Kräfte P und Q nach Erkl. 11 stets in Kilogramm ausgedrückt wird, z. B.: P sei $= 300$ kg und $Q = 400$ kg, so wähle man eine bekannte Längeneinheit, z. B. das Zentimeter, und sage: ein Zentimeter entspreche 100 kg, mithin entsprechen 300 kg der Länge einer Strecke von 3 cm und 400 kg der Länge einer Strecke von 4 cm, siehe die Figuren 26 u. 27.

Da ferner der Winkel α, unter welchem die Kräfte P und Q an dem Punkt A wirken, bekannt ist, derselbe sei z. B. $= 45^0$, so trage man mittels eines Transporteurs den Winkel $\alpha = 45^0$ ab oder man halbiere einen Winkel von 90^0 und trage auf dessen einen Schenkel $AB = 3$ cm und auf dessen andern Schenkel $= 4$ cm ab. Alsdann ziehe man BD parallel AC und CD parallel AB und schliesslich noch die Diagonale AD. Untersucht man nun, wie lang die Diagonale AD in Zentimetern ausgedrückt ist, und setzt für 1 cm $= 100$ kg, so findet man die Grösse der Resultante R $(= AD)$ in Kilogramm ausgedrückt. Man findet durch Messung $AD = 6{,}5$ cm, mithin ist

Figur 27.

1 cm = 100 kg

AD oder $R = 6{,}5 \, . \, 100$

oder: $R = 650$

d. h. die Grösse der Resultante beträgt 650 kg.

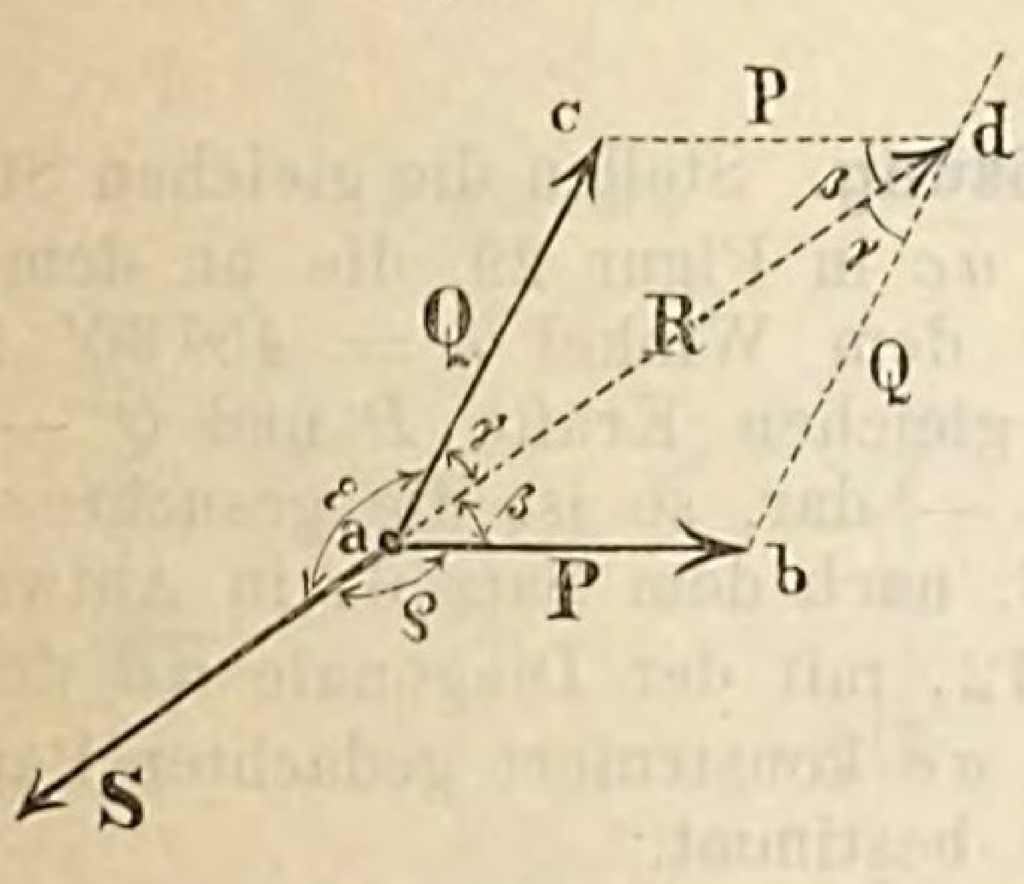
Die Richtung der Resultierenden R zu den Komponenten P und Q findet man durch direkte Messung der Winkel β und γ mittels eines Winkelmessers; diese Messung ergibt für Winkel $\beta = 26^0$ und für Winkel $\gamma = 19^0$, beide zusammen

$$\beta + \gamma = \alpha$$

oder: $\beta + \gamma = 45^0$

Aufgabe 21. Zwei Kräfte: $P = 400$ kg und $Q = 600$ kg, wirken unter einem Winkel von $40^0 \, 35'$ auf einen materiellen Punkt; wie gross ist die Kraft, welche den Kräften P und Q das Gleichgewicht hält, und welche Winkel bildet jene fragliche Kraft mit den gegebenen Kräften P und Q?

Figur 28.



Hilfsrechnungen.

1). . $\log 480000 \, . \cos 40^0 \, 35' = \log 480000 + \log \cos 40^0 \, 35'$

Nun ist: $\log 480000 = 5{,}6812412$

$+ \log \cos 40^0 \, 35' = 9{,}8805052 - 10$

$15{,}5617464 - 10$

oder: $\log 480000 . \cos 40^0 35' = 5{,}5617464$

7452

mithin ist: 12

$480000 \, . \cos 40^0 \, 35' = 364541$ 11,9

2). $\sqrt{88|45|41} = 940{,}5$

81

18|745

736

1880|94100

94025

75

Auflösung. Die gesuchte Kraft, welche den gegebenen Kräften P und Q das Gleichgewicht hält, ist gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante R dieser Kräfte.

Stellt daher, Figur 28, $abdc$ das über den gegebenen Kräften P und Q konstruierte Parallelogramm dar, so ist die gesuchte Kraft S, welche diesen das Gleichgewicht hält, gleich und entgegengesetzt gerichtet der Diagonale ad.

Für diese Diagonale $ad = R$, erhält man analog der Aufg. 19

$$ad^2 \text{ oder } R^2 = P^2 + Q^2 - 2P \, . \, Q \, . \cos(2R - \alpha)$$

oder mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte und der Erkl. 37

$$R = \pm \sqrt{160000 + 360000 + 480000 \, . \cos 40^0 35'}$$

Nach der Hilfsrechnung 1). ergibt sich hieraus:

$$R = \sqrt{520000 + 364541}$$

oder:

$$R = \sqrt{884541}$$

Für die Resultante R, bezw. für die gesuchte Kraft S, welche den gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält, ergibt sich somit nach Hilfsrechnung 2).:

A). . . R oder $S = 940{,}5$ kg

Die gesuchten Winkel ϱ und ε, siehe Figur 28, welche die Kraft S mit den Kräften P und Q bildet, findet man aus den Gleichungen:

1). $\varrho = 180^0 - \beta$

2). $\varepsilon = 180^0 - \gamma$

Da nun zur Berechnung des Winkels β die Relation besteht:

$$\frac{\sin \beta}{\sin(2R - \alpha)} = \frac{Q}{R} \quad \text{(siehe Erkl. 39)}$$

und sich hieraus mit Rücksicht der gege-

Hilfsrechnungen.

3). . $\log \sin \beta = \log 600 + \log \sin 40^0 35' - \log 940{,}5$

Nun ist: $\log 600 = 2{,}7781513$
$+ \log \sin 40^0 35' = 9{,}8132829 - 10$
$12{,}5914342 - 10$
$- \log 940{,}5 = -2{,}9733588$
$\log \sin \beta = 9{,}6180754 - 10$
0502
252
231
21

mithin ist:

$\beta = 24^0 31' 15''$

Erkl. 41. Den Winkel γ in Figur 28 findet man, unter anderem, durch Abzug aus der Gleichung:

$$\gamma = \measuredangle cab - \beta \text{ oder } \gamma = \alpha - \beta$$

oder $\gamma = 40^0 35' - 24^0 31' 15''$

oder $\gamma = 16^0 3' 45''$

benen Zahlen, der Erkl. 40 und des für R gefundenen Wertes:

B). . . $\sin \beta = \frac{600 \,.\, \sin 40^0 35'}{940{,}5}$

ergibt, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung 1). und nach der Hilfsrechn. 3).:

$\varrho = 180^0 - 24^0 31' 15''$

mithin:

$\varrho = 155^0 28' 45''$

oder, abgerundet:

C). . . $\varrho = 155^0 29'$

Aus obiger Gleichung 2). und der Erkl. 41 erhält man schliesslich:

$\varepsilon = 180^0 - 16^0 3' 45''$

mithin:

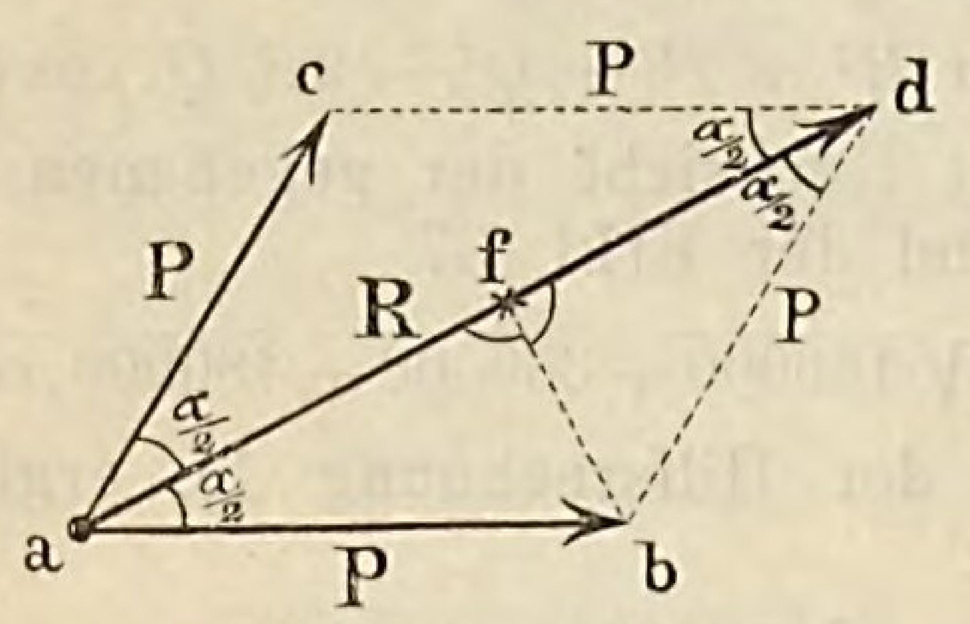
$\varepsilon = 163^0 56' 15''$

oder, abgerundet:

D). . . $\varepsilon = 163^0 56'$

Aufgabe 22. An einem materiellen Punkt wirken zwei gleiche Kräfte von je 200 kg unter einem Winkel von $45^0 30'$; wie gross ist die Resultante dieser Kräfte?

Figur 29.



Erkl. 42. Sind in einem Parallelogramm zwei anstossende Seiten gleich, so sind alle vier Seiten gleich, d. h. das Parallelogramm ist ein gleichseitiges — eine sogenannte Raute.

Erkl. 43. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich. Im gleichseitigen Parallelogramm werden die Winkel durch die Diagonalen halbiert.

Erkl. 44. Zwischen der Basis (R), dem Schenkel (P) und dem Basiswinkel $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ eines gleichschenkligen Dreiecks (abd in Figur 29), besteht die Relation:

$R = 2P \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}$ (siehe Kleyers Trigonometrie, das gleichschenkl. Dreieck)

denn: Fällt man in Figur 29 das Perpendikel bf auf die Basis ad $(= R)$ des gleichschenkl.

Auflösung. Stellen die gleichen Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ in Figur 29, die an dem Punkt a unter dem Winkel $\alpha = 45^0 30'$ angreifenden gleichen Kräfte P und Q — je $=$ 200 kg — dar, so ist die gesuchte Mittelkraft R, nach dem Satz 6, in Antwort auf Frage 12, mit der Diagonale $\overline{ad}$ des über $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ konstruiert gedachten Parallelogramms bestimmt.

Da nun das Parallelogramm $abdc$ nach der Erkl. 42 ein gleichseitiges, eine Raute ist, weil:

$$\overline{ab} = \overline{ac} \text{ und } \overline{bd} = \overline{cd}$$

also auch

$$P = Q = 200 \text{ kg}$$

mithin auch nach der Erkl. 43:

$$\measuredangle dab = \measuredangle cad \text{ und } \measuredangle adb = \measuredangle adc$$

und jeder dieser Winkel $=$

$$\frac{\alpha}{2} \text{ oder } \frac{45^0 30'}{2} \text{ oder } 22^0 45'$$

gross ist, so hat man in jedem der gleichschenkligen Dreiecke abd und acd zwischen den durch die Linien ab, ac und ad dargestellten Kräften P, Q und R, nach der Erkl. 44, die Relation:

$$R = 2P \,.\, \cos \frac{\alpha}{2}$$

Substituiert man in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte, so ist:

Dreiecks abd, so entstehen die rechtwinkligen und kongruenten Dreiecke abf und bdf. In jedem derselben hat man:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{af}}{\overline{ab}} \text{ oder } \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{R}{2}}{P}$$

$$\text{oder } \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{2P}$$

mithin ist:

$$R = 2P \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$R = 2 \cdot 200 \cdot \cos 22^0\,45'$$

oder:

$$R = 400 \cdot \cos 22^0\,45'$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log R = \log 400 + \log\cos 22^0\,45'$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2{,}6020600 \\ +\log\cos 22^0\,45' &= 9{,}9648256-10 \\ \hline \log R &= 2{,}5668856 \end{aligned}$$

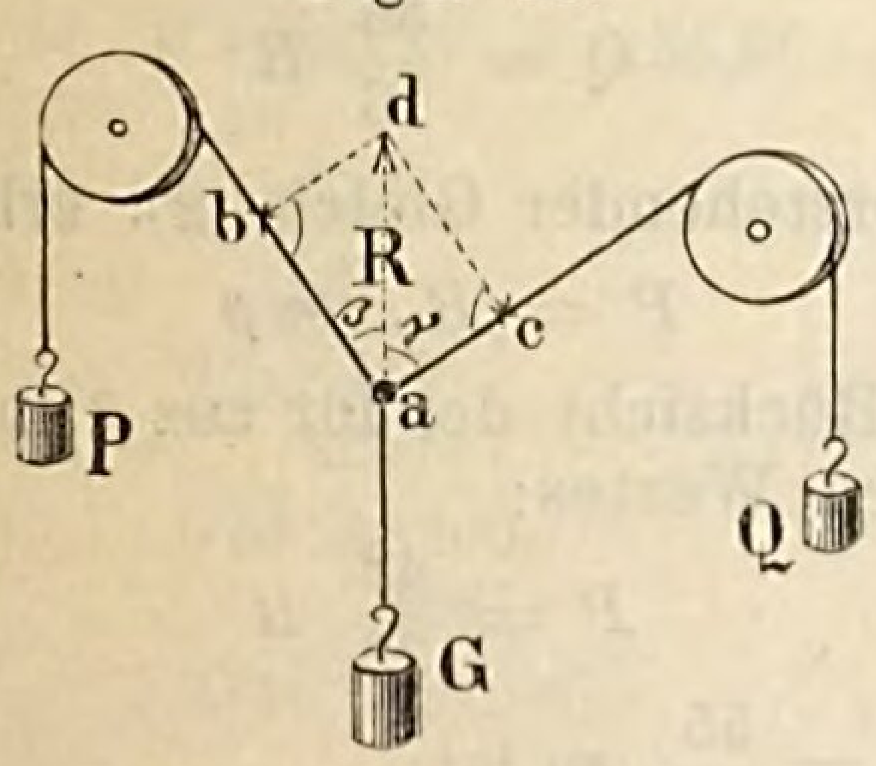
$\frac{51}{5}$

und

$$R = 368{,}88$$

Aufgabe 23. Ueber zwei Rollen geht ein Seil, an dessen Enden die Gewichte $P = 16$ und $Q = 12$ kg hängen; wie gross muss ein zwischen diesen Rollen an dem Seil angebrachtes Gewicht G sein, damit Gleichgewicht zwischen diesen Gewichten besteht und der Winkel bac (siehe Figur 30) ein rechter ist?

Figur 30.



Auflösung. Denkt man sich in der Figur 30 von dem Angriffspunkt a des Gewichts G die beliebigen, aber in dem Verhältnis der Kräfte (Gewichte) P und Q stehenden Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ auf dem Seil abgetragen und über bac das Parallelogramm, bezw. das Rechteck $bacd$ konstruiert (der Winkel bac ist $= R$), so stellt die Diagonale ad die Resultante R der Kräfte P und Q dar. Soll nun zwischen den Gewichten P, Q und G Gleichgewicht bestehen, so muss das Gewicht G gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultanten R sein.

Für die Grösse der Resultante R hat man in dem bei c rechtwinkligen Dreieck acd, die Relation:

$$R^2 = \overline{ac}^2 + \overline{cd}^2 \text{ oder } R^2 = \overline{ac}^2 + \overline{ab}^2$$

oder:

$$R^2 = Q^2 + P^2$$

mithin ist:

$$R^2 = 12^2 + 16^2$$

oder:

$$R = \pm\sqrt{144 + 256}$$

oder:

$$R = \pm\sqrt{400} \text{ oder } R = 20$$

Die Resultante R, bezw. das gesuchte Gewicht G ist somit $= 20$ kg.

Aufgabe 24. Die an einem materiellen Punkt wirkende beliebige (unbestimmte) Kraft R soll in zwei rechtwinklig gegen einander wirkende Kräfte P und Q, welche in dem Verhältniss 48 : 55 stehen, zerlegt werden. Wie gross ist jede der Komponenten?

Auflösung. Man denke sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels fag, Figur 24, von a zwei Strecken $\overline{am}$ und $\overline{an}$, welche sich wie 48 : 55 verhalten, abgetragen

Erkl. 45. Da in Figur 24 die Strecke $\overline{am}$ ($=\overline{no}$) 48 und die Strecke $\overline{an}$ ($=\overline{mo}$) 55 irgend welcher Längeneinheiten darstellt, so ist:

$$\overline{ao}^2 = \overline{am}^2 + \overline{mo}^2$$

bezw.

$$\overline{ao} = \sqrt{48^2+55^2}$$

derselben Längeneinheiten, und man hat:

$$\sin\beta = \frac{\overline{mo}}{\overline{ao}} \text{ oder } \sin\beta = \frac{55}{\sqrt{48^2+55^2}}$$

oder:

$$\sin\beta = \frac{55}{73} \text{ (s. Hülfsrechn. 1)., 2). u. 3).)}$$

Erkl. 46. Analog der Erkl. 45 erhält man:

$$\cos\beta = \frac{\overline{am}}{\overline{ao}} \text{ oder } \cos\beta = \frac{48}{\sqrt{48^2+55^2}}$$

oder:

$$\cos\beta = \frac{48}{73} \text{ (s. Hülfsrechn. 1)., 2). u. 3).)}$$

Hilfsrechnungen:

1). . . . 48 . 48
384
192
2304

2). . . . 55 . 55
275
275
3025

3). . . . $\sqrt{2304+3025} = \sqrt{53|29} = 73$
49
14|429
429
= = =

4). . . log 55 = 1,7403627
— log 73 = —1,8633229
log sin β = 9,8770398—10

mithin:
num-log sin β oder $\beta = 48^0\,53'\,16''$

und das Rechteck *amon* über *nam* konstruiert, alsdann gibt die Diagonale $\overline{ao}$ die Richtung der gegebenen beliebigen Kraft R an.

Nimmt man nun an, die Intensität der gegebenen Kraft R sei z. B. durch die Länge der in der Richtung von $\overline{ao}$ abgetragenen Strecke $\overline{ad}$ dargestellt, und man zieht durch d:

$$\overline{dc} \parallel \overline{ag}$$

und

$$\overline{db} \parallel \overline{af}$$

so repräsentieren die Längen der Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ die gesuchten Komponenten P und Q der beliebigen Kraft R, und man kann in jedem der rechtwinkligen Dreiecke *abd* und *acd* die Relationen aufstellen:

1). $\sin\beta = \frac{Q}{R}$

2). $\cos\beta = \frac{P}{R}$

Aus vorstehender Gleich. 1). erhält man:

$$Q = R \cdot \sin\beta$$

oder mit Rücksicht des für sin β in Erkl. 45 gefundenen Wertes:

$$Q = \frac{55}{73}\,R$$

Aus vorstehender Gleich. 2). erhält man:

$$P = R \cdot \cos\beta$$

oder mit Rücksicht des für cos β in Erkl. 46 gefundenen Wertes:

$$P = \frac{48}{73}\,R$$

Da $\sin\beta = \frac{55}{73}$, so ist:

$$\log\sin\beta = \log 55 - \log 73$$

und somit nach Hilfsrechnung 4:

$$\beta = 48^0\,53'\,16''$$
$$\gamma = 90^0 - \beta \text{ oder } \gamma = 41^0\,6'\,44''$$

Aufgabe 25. Auf einen materiellen Punkt wirken unter einem Winkel α von $75^0\,30'$ zwei Kräfte, nämlich $P = 250$ kg und $Q = 300$ kg; wie gross sind die Winkel, welche die Resultante R dieser Kräfte mit den Kräften P und Q bildet?

Auflösung. Man denke sich das Parallelogramm der Kräfte P und Q konstruiert, so kennt man in jedem der beiden Dreiecke, welche durch die Diagonale R entstehen, zwei Seiten und die Summe der zwei diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, nämlich

1). . . $\beta+\gamma = \alpha$ oder $\beta+\gamma = 75^0\,30'$

Zur Berechnung der Winkel β und γ hat man nach dem in der Erkl. 38 angeführten Tangentensatz die Relation:

Hilfsrechnungen:

1). . . $\log \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \log \operatorname{tg} 37^0 45' - \log 11$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 37^0 45' &= 9{,}8888996 - 10 \\ -\log 11 &= -1{,}0413927 \\ \hline \log \operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2} &= 8{,}8475069 - 10 \\ & 3585 \\ \hline & 1484 \end{aligned}$$

mithin:

$\frac{\beta - \gamma}{2} = 4^0\, 1'\, 35''$ und $\beta - \gamma = 8^0\, 3'\, 10''$

2). . . $\frac{250 \,.\, 250}{= 62500}$; $\frac{300 \,.\, 300}{= 90000}$; $\frac{2 \,.\, 250 \,.\, 300}{= 500 \,.\, 300}$ $= 150000$

3). . . . $\log 150000 = 5{,}1760913$
$+ \log \cos 75^0\, 30' = 9{,}3985996 - 10$
$4{,}5746909$

also: $150000 \,.\, \cos 75^0\, 30' = 37557$

4) . . . 62500
+ 90000
+ 37557
$\sqrt{19|00|57} = 435{,}95$
16
8 : 300
249
86 : 5157
4325
870 : 83200
78381
8718 : 481900

Erkl. 47. Aus der Ermittelung der Resultierenden zweier Kräfte durch Rechnung sowohl als auch durch Konstruktion ergiebt sich:

a). Der Winkel, welchen die Resultante R mit der grösseren Kraft bildet, ist kleiner als der Winkel, den dieselbe mit der kleineren Kraft bildet.

Da ferner in dem Fall, in welchem die Seitenkräfte P und Q einander gleich sind, das konstruiert gedachte Parallelogramm ein gleichseitiges (eine Raute) ist, so ergiebt sich hieraus:

b). Die Winkel, welche die Resultante R mit den Kräften P und Q bildet, sind gleich, wenn diese Kräfte P und Q einander gleich sind.

a). . . $\frac{Q + P}{Q - P} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}}$

Setzt man hierein für P, Q und $\beta + \gamma$ die gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$\frac{300 + 250}{300 - 250} = \frac{\operatorname{tg} 37^0 45'}{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}}$$

oder:

$$\frac{550}{50} = \frac{\operatorname{tg} 37^0 45'}{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}}$$

mithin für

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{50 \,.\, \operatorname{tg} 37^0 45'}{550}$$

oder:

2). . . . $\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg} 37^0 45'}{11}$

und hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 1).

3). . . . $\beta - \gamma = 8^0\, 3'\, 10''$

Aus den Gleichungen 1). und 3). erhält man durch Addition

$$2\beta = 83^0\, 33'\, 10''$$

und für den gesuchten Winkel β, welchen die Resultante R mit der Komponente P bildet, ergibt sich hieraus

A). $\beta = 41^0\, 46'\, 35''$

Ferner erhält man durch Subtraktion der Gleichungen 1). und 2).

$$2\gamma = 67^0\, 26'\, 50''$$

Für den gesuchten Winkel γ, welchen die Resultante R mit der Komponente Q bildet, erhält man hiernach:

B). $\gamma = 33^0\, 43'\, 25''$

Zur Berechnung von R besteht nach dem in der Erkl. 36 erwähnten Kosinussatz die Relation

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \,.\, \cos(180 - \alpha)$$

und hieraus erhält man in Rücksicht auf die Erkl. 37

b). . $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2P \,.\, Q \,.\, \cos\alpha}$

setzt man hierein die für P, Q und α gegebenen Zahlenwerte, so erhält man

$$R = \sqrt{250^2 + 300^2 + 2 \,.\, 250 \,.\, 300 \,.\, \cos\alpha}$$

oder nach Hilfsrechnung 2). bis 4).

$$R = \sqrt{190057}$$

mithin:

C). $R = 435{,}95$

d). Ueber die Zerlegung einer Kraft in zwei unter einem Winkel auf einen Punkt wirkende Seitenkräfte.

Frage 14. Worin besteht die Zerlegung einer Kraft in zwei unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkende Seitenkräfte im allgemeinen und auf welche Weise kann diese Zerlegung vorgenommen werden?

Erkl. 48. Bei der Zerlegung einer Kraft in 2 Seitenkräfte ist eine bestimmte Lösung erst dann möglich, wenn ausser der zu zerlegenden Kraft entweder

a). eine der beiden Seitenkräfte der Richtung und Grösse nach, oder

b). eine Seitenkraft der Richtung, die andere der Grösse nach, oder

c). beide Seitenkräfte der Grösse nach, oder

d). beide Seitenkräfte der Richtung nach gegeben sind.

Der letztgenannte Fall ist der am häufigsten vorkommende.

Antwort. Die Zerlegung einer Kraft in zwei unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkende Seitenkräfte besteht im allgemeinen darin, dass man mit Zuhilfenahme des Satzes über das Parallelogramm der Kräfte, aus der Intensität der gegebenen Kraft, zu der noch zwei andere Bestimmungsstücke gegeben sein müssen[1]), die Intensitäten der beiden Kräfte resp. deren Richtungen in bezug auf die Richtung jener Kraft bestimmt. Die erwähnte Zerlegung kann entweder auf graphische Weise, bezw. durch Konstruktion oder auf mathematische Weise, bezw. durch Rechnung vorgenommen werden.

[1]) Siehe Erkl. 48.

Anmerkung 2. In den nachstehend gelösten Aufgaben ist gezeigt, wie man bei der Zerlegung einer gegebenen Kraft in zwei Seitenkräfte, die unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirken, in den einzelnen Fällen zu verfahren hat und wie diese Zerlegung zur Lösung anderweitiger praktischer Aufgaben benutzt wird.

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Man soll eine gegebene Kraft R in zwei Seitenkräfte, von welchen die eine Kraft die Intensität P hat und mit jener Kraft R den Winkel β bildet, so zerlegen, dass die Wirkungen der beiden neuen Kräfte der Wirkung jener Kraft R gleichkommen. Wie gross muss die zweite Kraft Q sein und welchen Winkel muss dieselbe mit der Kraft R bilden?

Erkl. 49. Berechnet man, wie nebenstehend, ausser dem Winkel γ auch den Winkel, welcher der gegebenen Kraft R gegenüberliegt, mittels des Sinussatzes, so kann die Winkelsumme als Probe für die Richtigkeit der Rechnung dienen. Will man den Winkel γ direkt aus den gegebenen Stücken berechnen, so kann man hierzu die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta \,.\, P}{\sqrt{P^2 + R^2 - 2PR \,.\cos\beta}}$$

benutzen. Dieselbe ergibt sich aus den nebenstehenden Gleichungen 1). und 2).

Erkl. 50. Sollen in dem gegebenen Falle beide Kräfte P und Q unter einem rechten Winkel auf den gemeinsamen Angriffspunkt wirken, dann ist nach Erkl. 24:

$$Q = \sqrt{R^2 - P^2} \quad \text{und} \quad \gamma = 90^\circ - \beta$$

Auflösung. Aus den beiden gegebenen Kräften R und P, deren eine, nämlich R, durch 2 andere Kräfte ersetzt werden soll, und dem gegebenen Winkel β, den R mit P einschliesst, ermittelt man die Grösse der Kraft Q nach dem Kosinussatz[1]); man erhält hiernach:

$$Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR \,.\cos\beta$$

oder

$$1). \quad . \quad Q = \sqrt{P^2 + R^2 - 2PR \,.\cos\beta}$$

Ist hiernach Q berechnet, so kann man die Richtung der Kraft Q oder den Winkel γ nach dem Sinussatz[2]) aus der Proportion:

$$\sin\gamma : \sin\beta = P : Q$$

berechnen; man erhält:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad \sin\gamma = \frac{\sin\beta\, P}{Q} \text{ }^{3})$$

[1]) Siehe Erkl. 36.
[2]) Siehe Erkl. 39.
[3]) Siehe Erkl. 49

Aufgabe 27. Berechne aus der Resultierenden $R = 5549$, der Komponente $P = 2002$ und dem Winkel $\beta = 50^0$, welchen die beiden gegebenen Kräfte miteinander bilden, die Komponente Q sowie den Winkel γ, den Q mit R bildet.

Hilfsrechnungen:

1). 2 . 2002 . 5549
= 4004 . 5549
22196
22196
22218196

2002 . 2002
4004
4004
4008004

5549
5549
49941
22196
27745
27745
30791401

2). log 22218196 = 7,3467050 P.P. = 195
19,5
175,5
117
7,3467088
+ log cos 50⁰ = + 9,8080675 — 10
7,1547763 P.P. = 304
7586
177
152
250

mithin:
$22218196 . \cos 50^0 = 14281582$

3). 4008004
+ 30791401
34799405
— 14281582
$Q^2 = 20517823$

$\log Q = \frac{1}{2} \log 20517823$

Nun ist:
4). . log 20517823 = 7,3121139 P.P. = 211
+ 169,6
424
636
7,3121313
1
. .
2
mithin: $\log Q = 3,6560657$
und 599
$Q = 4529,6$ 58

Aus der Gleichung:
$\log \sin \gamma = \log 2002 + \log \sin 50^0 - \log 4529,6$
findet man γ wie folgt:

5). . . . log 2002 = 3,3014641
+ log sin 50⁰ = + 9,8842540 — 10
13,1857181 — 10
— log 4529,6 = — 3,6560657
also: log sin γ = 9,5296524 — 10
6298
mithin:
$\gamma = 19^0 47' 20''$ 585 : 2260 = 4″
+ 4″
24″

Auflösung. Nach der in der Auflösung der vorigen Aufgabe 26 enthaltenen Gleichung 1). besteht die Relation:

$$Q = \sqrt{2002^2 + 5549^2 - 2 . 2002 . 5549 . \cos 50^0}$$

hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 1 u. 2:

$$Q = \sqrt{4008004 + 30791401 - 14281582,24}$$

oder nach Hilfsrechnung 3:

$$Q = \sqrt{20517822,76}$$

mithin nach Hilfsrechnung 4:

A). $Q = 4529,6$

Nach der in der Auflösung der vorigen Aufgabe 26 enthaltenen Gleichung 2 erhält man bei Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte

$$\sin \gamma = \frac{2002 . \sin 50^0}{4529,6}$$

Logarithmiert man diese Gleichung, so erhält man:

$$\log \sin \gamma = \log 2002 + \log \sin 50^0 - \log 4529,6$$

und hieraus ergibt sich nach Hilfsrechn. 5:

B). $\gamma = 19^0 47' 24''$

1) Siehe Erkl. 28.
2) Siehe Erkl. 30.
3) Siehe Erkl. 49.

Aufgabe 28. Die auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft R soll durch zwei andere Kräfte ersetzt werden, von denen die erste die Intensität P hat, die zweite den Winkel γ mit der Kraft R bildet. Welchen Winkel muss jene Kraft P mit der Kraft R bilden und wie gross muss die Intensität der andern Kraft Q sein?

Erkl. 51. Sollen in dem gegebenen Fall die beiden Kräfte P und Q unter einem rechten Winkel auf den gemeinsamen Angriffspunkt wirken, dann ist nach Erkl. 26:

$$Q = \sqrt{R^2 - P^2} \text{ und } \beta = 90^0 - \gamma$$

Erkl. 52. Die Bestimmung des fehlenden Winkels durch den Sinus giebt zu einer Zweideutigkeit Veranlassung, da zu jedem gegebenen Sinus zwei Winkel, ein spitzer und ein stumpfer gehören, und es bleibt deshalb zweifelhaft, welcher von den beiden zu nehmen ist. Dies stimmt damit überein, dass ein Dreieck durch drei Stücke der hier vorausgesetzten Art nicht immer bestimmt ist, dass vielmehr, wenn der gegebene Winkel der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt, im allgemeinen zwei Dreiecke aus jenen Stücken möglich sind. Bestimmt wird die Aufgabe erst dann, wenn der der grösseren der beiden gegebenen Kräfte gegenüberliegende Winkel gegeben ist.

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie.)

Auflösung. Ist ausser der zu zerlegenden Kraft R die Grösse P der einen und die Richtung γ der andern Seitenkraft gegeben, so ermittelt man die fehlenden Grössen dadurch, dass man zunächst den der zu zerlegenden Kraft gegenüberliegenden Winkel $(2R - \alpha)$ und daraus die Richtung der gegebenen Komponente, sowie endlich nach dem Sinussatz[1]) die fehlende Komponente sucht. Es ist gegeben P, R und γ (s. Fig. 25); nach dem Sinussatz besteht die Relation:

$$\sin(2R - \alpha) : \sin\gamma = R : P$$

und hieraus erhält man:

$$1). \quad \sin(2R - \alpha) = \frac{R \cdot \sin\gamma}{P}$$

aus welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann.

Zur Berechnung des Winkels β kann man die Relation benutzen:

$$2). \quad \beta = \alpha - \gamma$$

Zur Ermittelung der Seitenkraft Q benutze man die Relation:

$$Q : P = \sin\beta : \sin\gamma$$

aus welcher sich für Q:

$$Q = \frac{P \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

ergibt.

[1]) Siehe Erkl. 39.

Aufgabe 29. Berechne aus der Resultierenden $R = 612$, der Komponente $P = 518$ und deren Winkel $\gamma = 47^0\,52'\,44{,}5''$, den die Komponente Q mit R bildet, die fehlende Komponente Q sowie die Richtung der gegebenen Komponente P, d. h. den Winkel β, den P mit R bildet.

Hilfsrechnungen:

$$\begin{aligned} 1). \ldots \quad \log 612 &= 2{,}7867514 \\ +\log\sin 47^0\,52'\,44{,}5 &= +9{,}8702461 - 10 \\ &12{,}6569975 - 10 \\ -\log 518 &= -2{,}7143298 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}9426677 - 10 \end{aligned}$$

mithin ist:

$$(2R - \alpha) = 61^0\,12'\,10''$$

Auflösung. Nach der Gleichung 1). in Auflösung der vor. Aufgabe 28 erhält man in Anbetracht der gegebenen Zahlenwerte zunächst für den der Resultierenden gegenüberliegenden Winkel $(2R - \alpha)$ die Relation:

$$\sin(2R - \alpha) = \frac{612 \cdot \sin 47^0\,52'\,44{,}5''}{518}$$

logarithmiert man diese Gleichung, so erhält man:

$$\log\sin(2R - \alpha) = \log 612 + \log\sin 47^0 52'\,44{,}5'' - \log 518$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$(2R - \alpha) = 61^0\,12'\,10''$$

und somit

$$\alpha = 180^0 - 61^0\,12'\,10''$$

oder: $\alpha = 118^0\,47'\,50''$

Zur Berechnung des Winkels β ist zu beachten, dass

$$\beta = \alpha - \gamma$$

oder: $\beta = 118^0\,47'\,50'' - 47^0\,52'\,44{,}5''$

oder: $\beta = 70^0\,55'\,5{,}5''$

Hilfsrechnung.

$$
\begin{aligned}
2).\;.\;.\; \log 518 &= 2{,}7143298 \\
+ \log \sin 70^0\,55'\,5{,}5'' &= 9{,}9754561-10 \\
&\; 12{,}6897859-10 \\
- \log \sin 47^0 52' 44{,}5'' &= -9{,}8702461-10 \\
\log Q &= 2{,}8195398
\end{aligned}
$$

mithin:
num-log Q oder $Q = 659{,}99$

Zur Berechnung von Q besteht nach der in Auflösung der vorigen Aufgabe 28 enthaltenen Gleichung 2). die Relation:

$$Q = \frac{P \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

setzt man hierein die gegebenen resp. berechneten Zahlenwerte, so erhält man:

$$Q = \frac{518 \cdot \sin 70^0\,55'\,5{,}5''}{\sin 47^0\,52'\,44{,}5''}$$

logarithmiert man diese Gleichung, so erhält man

$$\log Q = \log 518 + \log \sin 70^0\,55'\,5{,}5'' - \log \sin 47^0\,52'\,44{,}5''$$

und hieraus ergibt sich nach Hilfsrechn. 2).:

B). $Q = 659{,}99$

Aufgabe 30. Auf einen materiellen Punkt wirkt die Kraft R; dieselbe soll durch zwei andere Kräfte ersetzt werden, deren Intensitäten bezw. P und Q sind; welche Winkel müssen diese Kräfte P und Q mit der Kraft R bilden?

Erkl. 53. Ein trigonometr. Lehrsatz, heisst: „Der Sinus eines halben Winkels eines Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel, aus: dem Produkte aus den Differenzen, welche man erhält, wenn man von der halben Summe der drei Dreiecksseiten einmal die eine, ein andermal die andere der den betreff. Winkel einschliessenden Dreiecksseiten abzieht; dividiert durch das Produkt der Dreiecksseiten, welche den betreffenden Winkel einschliessen“,
in Zeichen:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

wenn S die halbe Summe der drei Dreiecksseiten, nämlich: $\frac{a+b+c}{2}$ bedeutet.

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.)

Erkl. 54. Für den Fall, dass die beiden Seitenkräfte unter einem Winkel von 90^0 auf den Angriffspunkt wirken, ermittelt man die Richtung derselben durch die Formel:

$$\sin\beta = \frac{Q}{R}$$

oder:

$$\cos\gamma = \frac{Q}{R}$$

Auflösung. Denkt man sich das Kräfteparallelogramm konstruiert, so kennt man die drei Dreiecksseiten P, Q und R und könnte zur Auffindung der Dreieckswinkel den in Erkl. 36 angegebenen Kosinussatz benutzen. Da aber dieser Satz eine logarithmisch unbequeme Gleichung liefert, so benutzt man in den Fällen, in welchen man die drei Seiten eines Dreiecks kennt, die in der Erkl. 53 angeführte trigonometrische Formel.

Nach derselben erhält man:

1). . . . $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(S-P)(S-R)}{P \cdot R}}$

und

2). . . . $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(S-Q)(S-R)}{Q \cdot R}}$

wenn in diesen Gleichungen

$$S = \frac{P+Q+R}{2}$$

angenommen wird.

Aufgabe 31. Berechne die Richtungen der beiden Komponenten, d. h. den Winkel β, den P mit R und den Winkel γ, den Q mit R bildet, wenn die Resultante $R = 1000$, die Komponente $P = 650$ und die Komponente $Q = 800$ gegeben ist.

Auflösung. Nach der Gleichung 1). in Auflösung der vorigen Aufgabe 30 erhält man mit Rücksicht der für P, Q und R gegebenen Werte und in Rücksicht, dass

Hilfsrechnungen:

1). $\log \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\log 575 + \log 225 - \log 650000)$

$$\begin{array}{rrl}
\text{Nun ist:} \quad \log 575 & = & 2{,}7596678 \\
+ \log 225 & = & 2{,}3521825 \\
 & & (+2)\, 5{,}1118503\, (-2) \\
- \log 650000 & = & -5{,}8129134 \\
 & & 1{,}2989369 - 2 \\
 & & \cdot \frac{1}{2} \\
 & & 0{,}6494684 - 1 \\
 & & + 10 \\
\log \sin \frac{\beta}{2} & = & 9{,}6494684 \\
 & & 4430 \\
 & & 254 \\
 & & 243{,}2
\end{array}$$

mithin:

$$\frac{\beta}{2} = 26^{0}\, 29'\, 46''$$

2). $\log \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\log 425 + \log 225 - \log 800000)$

$$\begin{array}{rrl}
\text{Nun ist:} \quad \log 425 & = & 2{,}6283889 \\
+ \log 225 & = & 2{,}3521825 \\
 & & (+2)\, 4{,}9805714\, (-2) \\
- \log 800000 & = & -5{,}9030900 \\
 & & 1{,}0774814 - 2 \\
 & & \cdot \frac{1}{2} \\
 & & 0{,}5387407 - 1 \\
 & & + 10 \\
\log \sin \frac{\gamma}{2} & = & 9{,}5387407 \\
 & & 7090 \\
 & & 317 \\
 & & 285{,}5
\end{array}$$

mithin:

$$\frac{\gamma}{2} = 20^{0}\, 13'\, 35''$$

$$S = \frac{650 + 800 + 1000}{2} = 1225$$

ist, die Relation

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(1225 - 650)(1225 - 1000)}{650 \,.\, 1000}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{575 \,.\, 225}{650000}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\log 575 + \log 225 - \log 650000)$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$\frac{\beta}{2} = 26^{0}\, 29'\, 46''$$

mithin:

A). . . . $\beta = 52^{0}\, 59'\, 32''$

Nach der Gleichung 2). in Auflösung der vor. Aufg. 30 erhält man durch Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte die Relation:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(1225 - 800)(1125 - 1000)}{800 \,.\, 1000}}$$

oder:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{425 \,.\, 225}{800000}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\log 425 + \log 225 - \log 800000)$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$\frac{\gamma}{2} = 20^{0}\, 13'\, 35''$$

mithin:

B). . . . $\gamma = 40^{0}\, 27'\, 10''$

Aufgabe 32. Auf einen Punkt wirkt die Kraft R; dieselbe soll durch zwei andere Kräfte ersetzt werden, welche mit der gegebenen Kraft die gegebenen Winkel β und γ bilden. Welches sind die Intensitäten dieser beiden Kräfte?

Erkl. 55. Ein planimetr. Lehrsatz lautet: „In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich $2R$; sind somit in einem Dreieck zwei Winkel gegeben, so ist auch der dritte Winkel bekannt.“
(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie.)

Erkl. 56. Für den Fall, dass die beiden Kräfte P und Q einen rechten Winkel bilden sollen, ist nach Erkl. 27:

$$P = R \,.\, \sin \gamma$$
$$Q = R \,.\, \sin \beta$$

Auflösung. Man kennt in diesem Fall vom Dreieck ABD (Figur 25) die Seite $\overline{AD} = R$ und die dieser Seite anliegenden beiden Winkel β und γ, folglich auch den dritten Winkel $(2R - \alpha)$[1]) und man kann zwischen diesen Stücken und den gesuchten Kräften P und Q nach dem Sinussatz[2]) folgende Relationen aufstellen:

1). . . . $\frac{P}{R} = \frac{\sin \gamma}{\sin (2R - \alpha)}$

2). . . . $\frac{Q}{R} = \frac{\sin \beta}{\sin (2R - \alpha)}$

oder da: $\sin (2R - \alpha) = \sin \alpha$[3])

[1]) Siehe Erkl. 55.
[2]) Siehe Erkl. 39.
[3]) Siehe Erkl. 40.

so erhält man aus vorstehender Gleich. 1).:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{R \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

und aus Gleichung 2).:

$$4). \quad . \quad . \quad . \quad Q = \frac{R \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

Aufgabe 33. Die an einem materiellen Punkt wirkende Kraft $R = 340$ kg soll in zwei rechtwinklig gegeneinander wirkende Kräfte P und Q so zerlegt werden, dass die Kraft Q um 164 kg grösser ist wie die Kraft P. Wie gross sind diese Komponenten P und Q?

Erkl. 57. Ueber das Auflösen unrein quadratischer Gleichungen siehe Kleyers Lehrbuch „Die quadratischen Gleichungen".

Erkl. 58. Eine arithmetische Formel heisst:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

Dieselbe kann man bei der numerischen Ausrechnung der Differenz zweier Quadrate mit Vorteil benutzen. — (Vergl. Kleyers Lehrbuch der „Potenzen").

Hilfsrechnungen:

1). . . 82 . 82
164
656
6724

2). . . 504 . 88
4032
4032
44352

3). . . $\sqrt{5|10|76} = 226$
4
4|110
84
44|2676
2676

4). . . $\log 308 = 2{,}4885507$
$-\log 340 = -2{,}5314789$
$\log\sin\beta = 9{,}9570718 - 10$
0693
98 : 250 = 2,6
196
540

mithin:
$\beta = 64^0\, 56'\, 32{,}6''$

Auflösung. Zwischen den drei Kräften: P, Q und R besteht in dem rechtwinkligen Dreiecke abd, siehe Figur 22, nach dem pythagoreischen Lehrsatz, die Relation:

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

oder mit Rücksicht, dass:

$$R = 340 \text{ kg}$$

und $Q = (P + 164)$ kg ist:

$$340^2 = P^2 + (P + 164)^2$$

Diese Gleichung, nach P aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$340^2 = P^2 + P^2 + 2 \cdot 164 P + 164^2$$

$$2P^2 + 2 \cdot 164 P = 340^2 - 164^2$$

$$P^2 + 164 P = \frac{340^2 - 164^2}{2} \quad \text{(s. Erkl. 57)}$$

$$P^2 + 164 P + \left(\frac{164}{2}\right)^2 = \frac{340^2 - 164^2}{2} + \left(\frac{164}{2}\right)^2$$

$$\left(P + \frac{164}{2}\right)^2 = \frac{(340 + 164)(340 - 164)}{2} + \left(\frac{164}{2}\right)^2 \quad \text{(s. Erkl. 58)}$$

$$P + \frac{164}{2} = \pm\sqrt{\frac{504 \cdot 176}{2} + \left(\frac{164}{2}\right)^2}$$

$$P = -\frac{164}{2} + \sqrt{504 \cdot 88 + 82^2}$$

$$P = -82 + \sqrt{44352 + 6724} \quad \text{(s. Hilfsrechn. 1). u. 2).)}$$

$$P = -82 + \sqrt{51076}$$

$$P = -82 + 226 \quad \text{(s. Hilfsrechn. 3))}$$

Die gesuchte Komponente P ist hiernach $= 144$ kg, folglich ist die Komponente $Q = 144 + 164 = 308$ kg.

Zur Bestimmung der Richtungen der Kompenenten dient die Gleichung:

$$\sin\beta = \frac{Q}{R}$$

oder die Zahlenwerte eingesetzt:

$$\sin\beta = \frac{308}{340}$$

oder:

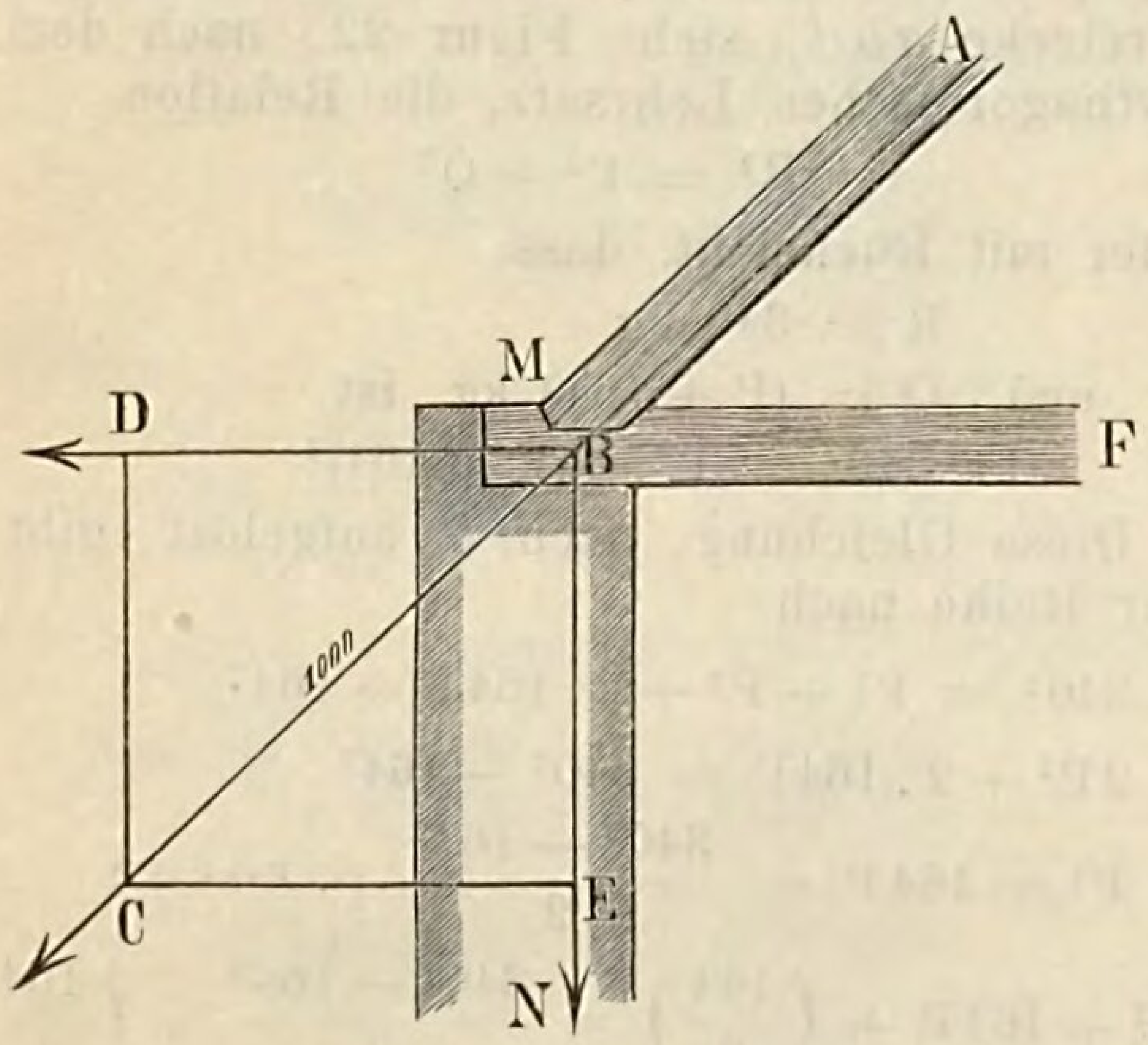
$$\log\sin\beta = \log 308 - \log 340$$
$$= 9{,}9570718 - 10 \quad \text{(s. Hilfsrechn. 4)}$$

und somit:

$$\beta = 64^0\, 56'\, 32{,}6''$$
$$\gamma = 25^0\, 3'\, 27{,}4''$$

Aufgabe 34. Nach der Richtung eines Dachsparrens $\overline{AB}$ in Fig. 33 wirke unter einem Winkel ABF ein Druck von 1000 kg; man soll den sogenannten Vertikaldruck und Horizontalschub berechnen, welcher hierdurch auf die Mauer MN ausgeübt wird, wenn der Winkel ABF a) 45°, b) 75° beträgt.

Figur 31.



Erkl. 59. Unter Vertikaldruck versteht man die in lotrechter oder senkrechter Richtung wirkende Seitenkraft, unter Horizontalschub dagegen die in wagerechter Richtung mehr schiebend als drückend wirkende Komponente der gegebenen Kraft.

Hilfsrechnungen:

1). . . $\sqrt{50|00|00} = 707{,}1$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 140:10000 \\ 9849 \\ 1414:15100 \end{array}$$

2). . . $\log \overline{DC} = \log 1000 + \log \sin 75^0$

Nun ist: $\log 1000 = 3{,}0000000$

$+ \log \sin 75^0 = 9{,}9849438 - 10$

$\log \overline{DC} = 2{,}9849438$

mithin ist:

numlog $\overline{DC}$ oder $\overline{DC} = 965{,}926$

Auflösung. In der Figur 31 bildet die Linie $\overline{BC}$ die Mittelkraft. Man ziehe $\overline{CD}$ parallel zu $\overline{BE}$ und $\overline{CE}$ parallel zu $\overline{BD}$, so ist $CDBE$ das Kräfteparallelogramm, in welchem die Seite $\overline{BD}$ den Horizontalschub und $\overline{BE}$ den Vertikaldruck im Punkt B angibt. Es ist aber nach dem pythag. Lehrsatz

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

folglich nach der Aufgabe:

$$1000^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

a). Beträgt nun der Winkel

$$ABF = 45^0$$

alsdann ist:

$$\overline{DC} = \overline{DB}$$

und daher:

$$1000^2 = 2 \, . \, \overline{BD}^2$$

oder:

$$\frac{1}{2} \cdot 1000^2 = \overline{BD}^2$$

hieraus ergibt sich für

$$\overline{BD} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 1000^2}$$

oder:

$$\overline{BD} = \sqrt{500000}$$

oder nach Hilfsrechnung 1).:

A). . . . $\overline{BD} = 707{,}1$

d. h. der Horizontalschub ist in diesem Fall gleich dem Vertikaldruck und jede dieser Grössen beträgt 707,1 kg.

Wird der Winkel, den der Dachsparren mit der Horizontalebene bildet, grösser, so wird auch der Vertikaldruck grösser, hingegen der Horizontalschub kleiner, wie die nachfolgende Berechnung beweist:

b). Beträgt der Winkel

$$ABF \text{ oder } DBC = 75^0$$

so ist:

1.) . . . $\sin \sphericalangle DBC = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$

2). . . . $\cos \sphericalangle DBC = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$

Aus vorstehender Gleichung 1). erhält man mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte:

$$\overline{DC} = 1000 \, . \sin 75^0$$

oder nach Hilfsrechn. 2).:

B). $\overline{DC} = 965{,}926$

d. h. der Vertikaldruck beträgt 965,926 kg.

Aus vorstehender Gleichung 2). erhält man mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte:

$$\overline{BD} = 1000 \cdot \cos 75^0$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

C). $\overline{BD} = 258{,}819$

d. h. der Horizontalschub ist in diesem Fall 258,8 kg.

Zur Kontrolle der Richtigkeit der berechneten Grössen setze man in die Gleichung

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

die entsprechenden Zahlenwerte ein.

Hilfsrechnung.

3). . . $\log \overline{BD} = \log 1000 + \log \cos 75^0$

Nun ist: $\log 1000 = 3{,}0000000$
$+ \log \cos 75^0 = 9{,}4129962$

$\log \overline{BD} = 2{,}4129962$

mithin ist:

numlog $\overline{BD}$ oder $\overline{BD} = 258{,}819$

Aufgabe 35. Berechne die beiden Komponenten P und Q aus der Resultierenden R = 1000 kg und den beiden Winkeln, welche die Resultierende mit den beiden Komponenten bildet. Der Winkel zwischen P und R sei $\beta = 30^0\,30'$ und der Winkel zwischen Q und R sei $\gamma = 40^0\,50'$.

Auflösung. Aus der Gleich. 3). in Auflösung der Aufgabe 32 erhält man mit Rücksicht der für R, β und γ gegebenen Werte:

$$P = \frac{1000 \cdot \sin 40^0\,50'}{\sin(30^0\,30' + 40^0\,50')}$$

oder:

$$P = \frac{1000 \cdot \sin 40^0\,50'}{\sin 71^0\,20'}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log P = \log 1000 + \log \sin 40^0\,50' - \log \sin 71^0\,20'$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 690{,}166$$

oder, abgerundet:

$$P = 690 \text{ kg}$$

Aus der Gleichung 4). in Auflösung der Aufgabe 32 erhält man:

$$Q = \frac{1000 \cdot \sin 30^0\,30'}{\sin 71^0\,20'}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log Q = \log 1000 + \log \sin 30^0\,30' - \log \sin 71^0 20$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$Q = 535{,}72$$

oder, abgerundet:

$$Q = 536 \text{ kg}$$

Hilfsrechnungen:

1). $\log P = \log 1000 + \log \sin 40^0 50' - \log \sin 71^0 20'$

Nun ist: $\log 1000 = 3{,}0000000$
$+ \log \sin 40^0\,50' = 9{,}8154854 - 10$

$12{,}8154854 - 10$
$- \log \sin 71^0\,20' = 9{,}9765318 - 10$
$- \quad +$

$\log P = 2{,}8389536$
9498
38
37,8

mithin:
$P = 690{,}166$

2). $\log Q = \log 1000 + \log \sin 30^0 30' - \log \sin 71^0 20'$

Nun ist: $\log 1000 = 3{,}0000000$
$+ \log \sin 30^0\,30' = 9{,}7054689 - 10$

$12{,}7054689 - 10$
$- \log \sin 71^0\,20' = 9{,}9765318 - 10$
$- \quad +$

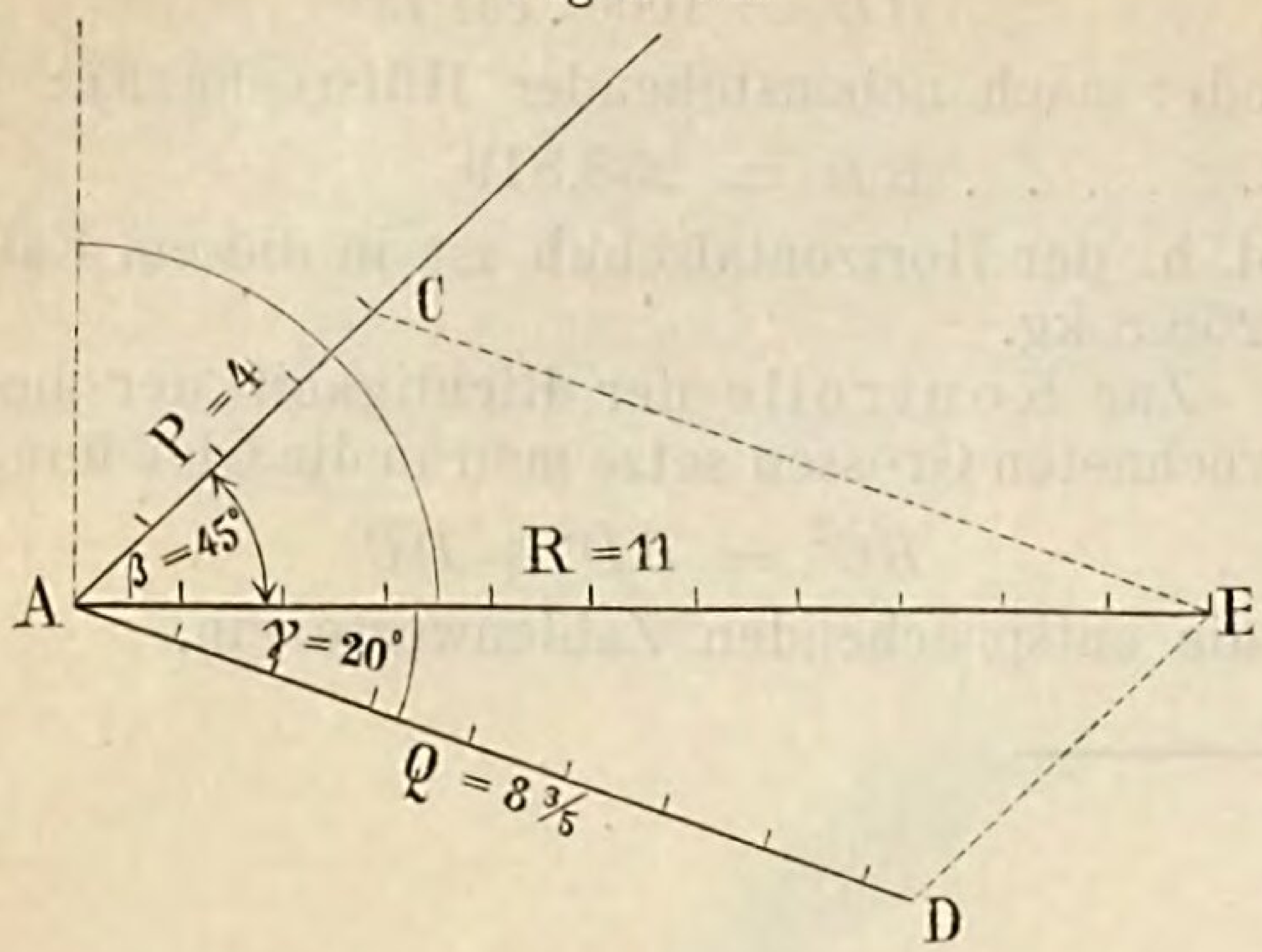
$\log Q = 2{,}7289371$
9379

mithin:
$Q = 535{,}72$

Aufgabe 36. Ermittele aus der Resultierenden R = 55, der Komponente P = 20 kg und dem Winkel, den diese beiden Kräfte einschliessen ($\beta = 45^0$) durch Konstruktion die Komponente Q und deren Richtung, d. h. den zwischen Q und R liegenden Winkel γ.

Auflösung. Man konstruiere, siehe Figur 32, den Winkel CAB, welcher gleich dem gegebenen Winkel $\beta = 45^0$ ist; alsdann trage man auf $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ Stücke ab, welche die gegebenen Kräfte vorstellen sollen. Wirkt in der Richtung $\overline{AB}$ die Kraft von 55 und in der Richtung $\overline{AC}$ die Kraft

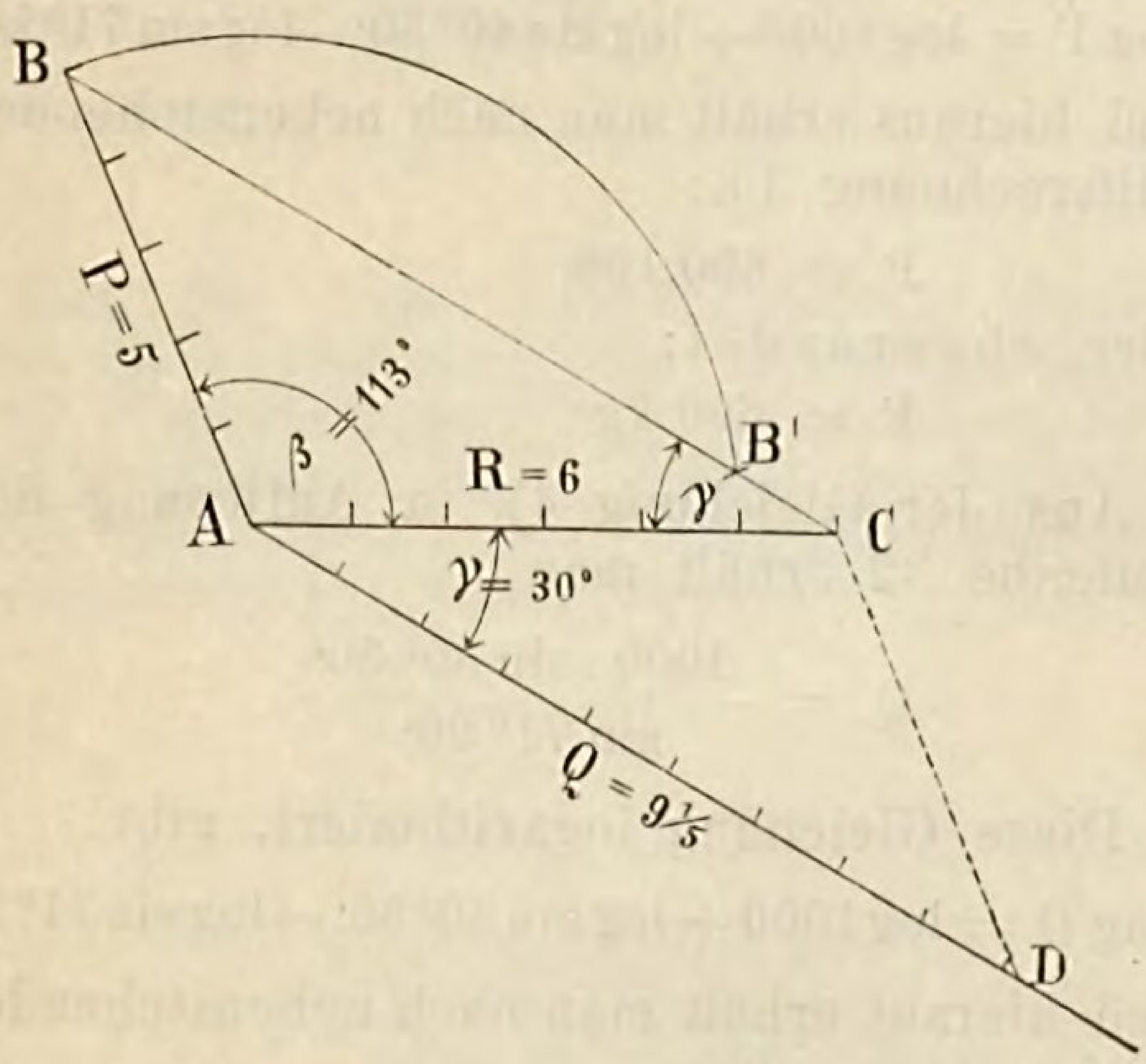
Figur 32.



von 20 kg, so trage man auf $\overline{AB} = 11$ und auf $\overline{AC} = 4$ gleiche Teile ab; ein solcher Teil stellt dann eine Kraft von 5 kg dar. Nun konstruiere man über den so bestimmten Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ und dem gegebenen Winkel BAC das Parallelogramm ACBD und messe sowohl die Seite $\overline{AD}$ sowie den Winkel BAD ab. Man findet dann, dass $\overline{AD} = 8\frac{3}{5}$ Teile lang und der Winkel BAD = ca. 20° ist. Somit ist die Intensität der gesuchten Kraft $Q = 8\frac{3}{5} \cdot 5$ oder Q = 43 kg und der Winkel γ, den Q mit R bildet, ist = 20°.

Aufgabe 37. Ermittele aus der Komponente P = 500 kg, der Resultierenden R = 600 kg und dem zwischen R und Q liegenden Winkel $\gamma = 30^0$ durch Konstruktion die fehlende Komponente Q und den Winkel β, der von R und P gebildet wird.

Figur 33.



Auflösung. Entsprechend der Auflösung zu Aufg. 36 zeichne man, s. Fig. 33, die Linie $\overline{AC}$ und trage auf derselben 6 gleiche Teile ab, deren jeder eine Kraft von 100 kg vorstellt. An C lege man den gegebenen Winkel $\gamma = 30°$, nehme 5 Teile der Linie $\overline{AC}$ in den Zirkel und schlage von A aus einen Bogen, der den Schenkel $\overline{CB}$ des Winkels γ schneidet; dies ist in B und B′ der Fall. Es sind somit in diesem Falle 2 Parallelogramme möglich (s. Erkl. 52) und die gesuchte Seitenkraft Q entspricht entweder der Linie $\overline{B'C}$ oder der Linie $\overline{BC}$; nehmen wir das letztere an, so ist $Q = 9\frac{1}{5}$, denn es lassen sich auf $\overline{AD} = \overline{BC}$ $9\frac{1}{5}$ der Teile der Linie $\overline{AC}$ abtragen und Q ist demnach $= 9\frac{1}{5} \cdot 100 = 920$ kg und der Winkel BAC oder $\beta = 113°$.

Aufgabe 38. Es sind gegeben die beiden Komponenten P = 600, Q = 800 und deren Resultante R = 1000. Konstruiere das Kräfteparallelogramm und ermittele die Winkel β und γ, welche P und Q mit R bilden.

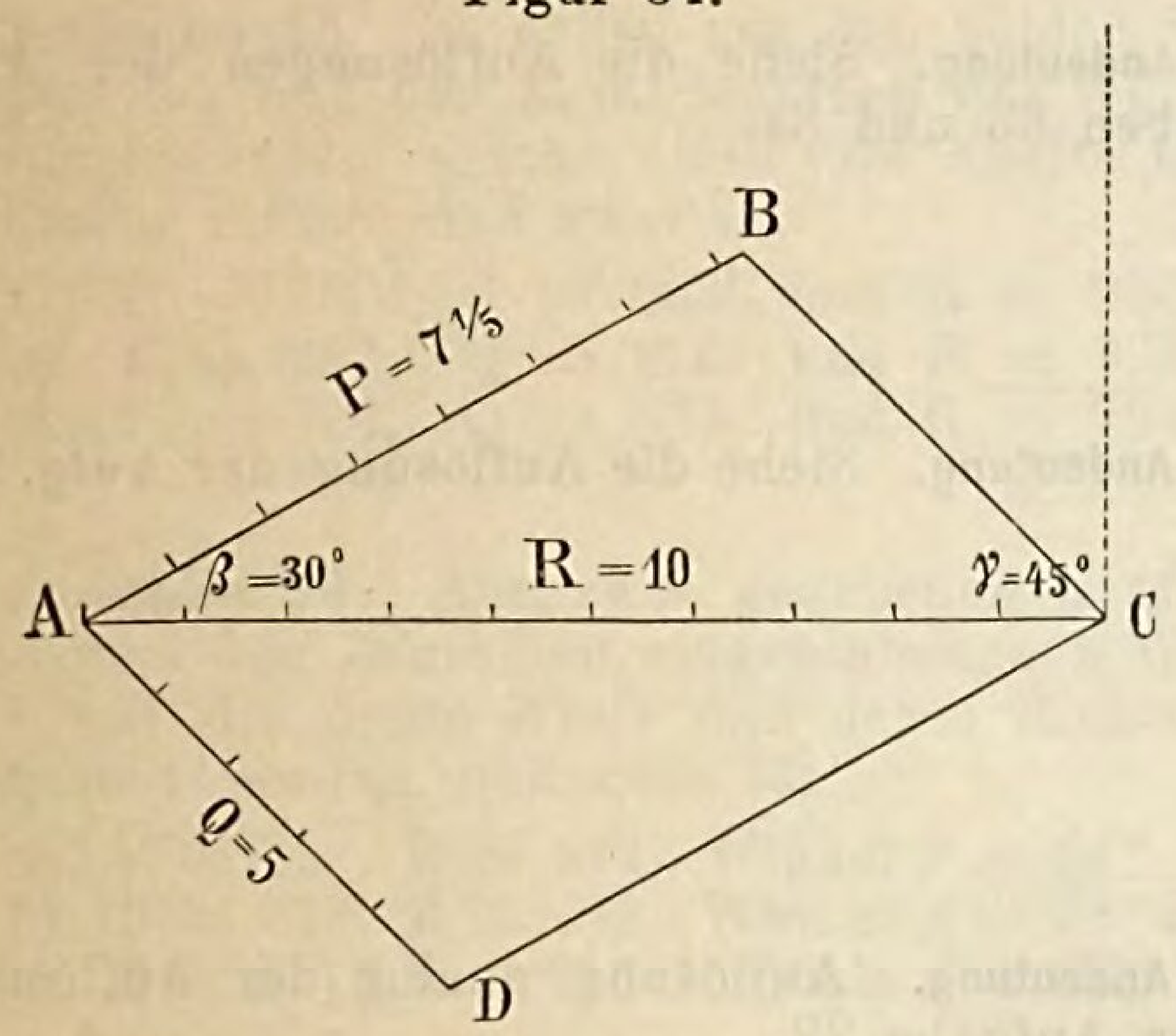
Auflösung. Man zeichne, entsprechend den gegebenen Zahlenwerten aus drei Geraden, die im Verhältnis 10 : 6 : 8 stehen, ein Dreieck und ergänze dasselbe zum Parallelogramm; die Messung der so entstandenen Winkel ergibt für

$$\beta = 52\tfrac{1}{2}$$

und für $\gamma = 37°$

Aufgabe 39. Ermittele die beiden Komponenten P und Q aus ihrer Resultante R $= 1000$ und den beiden Winkeln $\beta = 30^0$ und $\gamma = 45^0$, welche R mit P und Q bildet durch Konstruktion.

Figur 34.



Auflösung. Man trage auf einer Geraden, siehe Figur 34, 10 gleiche Teile ab, deren jeder eine Kraft von 100 kg darstellt, lege an A den Winkel $\beta = 30^0$, an C den Winkel $\gamma = 45^0$ und vollende das Parallelogramm. Durch Messung findet man:

$$\overline{AB} \text{ oder } P = 7\tfrac{1}{5} \,.\, 100$$
$$\text{oder: } P = 720 \text{ kg}$$
$$\overline{AD} \text{ oder } Q = 5 \,.\, 100$$
$$\text{oder: } Q = 500 \text{ kg}$$

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 40. Auf einen materiellen Punkt wirken unter einem rechten Winkel zwei Kräfte von 185 und 300 kg; wie gross ist die Resultante R dieser Kräfte und wie gross sind die Winkel, welche diese Resultante mit ihren Komponenten bildet?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus den Gleichungen in Auflösung der Aufgabe 13.

Aufgabe 41. Unter einem rechten Winkel wirken auf einen materiellen Punkt die Kräfte:

$$P = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

und

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}} \text{ kg};$$

wie gross sind die Winkel, welche die Resultante dieser Kräfte mit denselben bildet, und wie gross ist die Resultante selbst?

Andeutung. Siehe Auflösung der Aufgabe 13 und 17.

Aufgabe 42. Das Verhältnis zweier unter einem rechten Winkel gegeneinander wirkender Kräfte ist 9 : 10; wie gross sind die Winkel, welche die Resultante dieser Kräfte mit denselben bildet?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 18.

Aufgabe 43. Eine Kraft R = 700 kg soll in zwei gegeneinander rechtwinklig wirkende Kräfte P und Q so zerlegt werden, dass jene Kraft R z. B. mit der gesuchten Komponente Q einen Winkel von $52^0 45'$ bildet; wie gross sind die Komponenten P und Q?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 34.

Aufgabe 44. Eine Kraft R = 5600 kg soll in zwei gegeneinander rechtwinklig wirkende Kräfte P und Q so zerlegt werden, dass die eine derselben um $\frac{1}{30}$ der andern grösser ist als letztere; wie gross sind die Seitenkräfte P und Q?

Andeutung. Siehe die entsprechende gelöste Aufgabe 34. $P = \frac{31}{30} Q$.

Aufgabe 45. Eine Kraft R = 8250 kg soll in zwei gegeneinander rechtwinklig wirkende Kräfte P und Q so zerlegt werden, dass dieselben im Verhältnisse $1 : \sqrt{3}$ stehen; wie gross sind die Kräfte P und Q?

Andeutung. Siehe die Auflösungen der Aufgaben 33 und 34.

Aufgabe 46. Eine Kraft R = 780 kg soll in zwei rechtwinklig zueinander wirkende Kräfte P und Q, von welchen die eine, z. B. P = 400 kg ist, zerlegt werden; wie gross ist die andere Kraft Q und wie gross sind die Winkel, welche die Mittelkraft R mit den Komponenten P und Q bildet?

Andeutung. Siehe die Auflösung der Aufg. 33.

Aufgabe 47. Auf einen materiellen Punkt wirken zwei gleiche Kräfte von 560 kg unter einem Winkel von $44^0 53'$; wie gross ist die Resultante dieser Kräfte?

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung der Aufgabe 22.

Aufgabe 48. Eine Kraft R = 3456 kg soll in zwei gleiche Komponenten von je = 2303 kg zerlegt werden; wie gross sind die Winkel, welche die Kraft R mit ihren Komponenten bildet?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der gelösten Aufgabe 22.

Aufgabe 49. Eine Kraft R = 864 kg soll in zwei gleiche Komponenten, die unter einem Winkel von 60^0 gegeneinander wirken, zerlegt werden; wie gross sind diese Komponenten?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der gelösten Aufgabe 22.

Aufgabe 50. Wie gross ist die Resultante R zweier an einem materiellen Punkt wirkender Kräfte von 75 und 50 kg, wenn der Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels $= \frac{1}{5}$ ist?

Andeutung. Auflösung entsprechend der gelösten Aufgabe 25.

Aufgabe 51. Die an einem Punkte wirkenden Kräfte von 680 und 860 kg schliessen einen Winkel von $88^0 23'$ ein; wie gross ist die Mittelkraft R derselben und wie gross sind die Winkel, welche dieselbe mit den gegebenen Kräften bildet?

Andeutung. Siehe die gelöste Aufgabe 25.

Aufgabe 52. Zwei an einem materiellen Punkt wirkende Kräfte von 685 und 1250 kg sollen durch eine einzige von 1500 kg ersetzt werden; welche Richtung muss diese Kraft in bezug auf die beiden ersteren Kräfte haben?

Andeutung. Siehe die gelöste Aufgabe 31.

Aufgabe 53. Eine Kraft von 20000 kg soll in zwei Komponenten zerlegt werden, von welchen die eine = 10000 kg, die andere = 12000 kg sein soll; wie gross sind die Winkel, welche die drei Kräfte miteinander bilden?

Andeutung. Siehe die gelöste Aufgabe 31.

Aufgabe 54. Welche Kraft ist erforderlich, um zwischen zweien auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräften von 400 und 900 kg Gleichgewicht herzustellen, und welche Winkel bildet jene Kraft mit den gegebenen Kräften, wenn letztere einen Winkel von 120° 30′ einschliessen?

Andeutung. Man berechnet die Resultierende analog der Lösung der Aufgabe 21.

Aufgabe 55. Es sollen aus den beiden Seitenkräften und der Resultierenden die Winkel gesucht werden, welche diese drei Kräfte miteinander bilden, und zwar ist:

a). $P = 7628$, $Q = 6232$ und $R = 9832$.
b). $P = 247$, $Q = 312$ und $R = 328$.
c). $P = 724$, $Q = 586$ und $R = 724$.

Andeutung. Siehe die Lösung der Aufgabe 31.

Aufgabe 56. Aus zwei gegebenen Kräften und dem von denselben eingeschlossenen Winkel soll die dritte Kraft und deren Richtung ermittelt werden, und zwar ist:

a). $P = 168$, $R = 212$, Winkel $\beta = 64^0$
b). $P = 614$, $R = 718$, Winkel $\beta = 38^0\,27'$
c). $P = 6278$, $R = 39345$, Wink. $\beta = 123^0\,16'$

Andeutung. Siehe die Auflösungen der Aufgaben 26 und 27.

Aufgabe 57. Aus zwei Kräften und dem der einen Kraft gegenüberliegenden Winkel soll die dritte Kraft und der noch fehlende Winkel berechnet werden, und zwar ist gegeben:

a). $P = 763$, $R = 869$, $\gamma = 67^0\,18'$
b). $P = 304$, $R = 376$, $\gamma = 74^0\,12'\,30''$
c). $P = 144$, $R = 182$, $\gamma = 56^0\,18'$

Andeutung. Siehe die Auflösungen der Aufgaben 28 und 29.

Aufgabe 58. Aus der Resultierenden und den beiden Winkeln, welche die Resultierende mit den zwei Seitenkräften bildet, sollen die Seitenkräfte berechnet werden, und zwar ist:

a). $R = 67$ kg, $\beta = 64^0$, $\gamma = 87^0$
b). $R = 647$ kg, $\beta = 66^0\,27'$, $\gamma = 39^0\,12'$
c). $R = 387$ kg, $\beta = 62^0\,9'\,10''$, $\gamma = 47^0\,10'$

Andeutung. Siehe die Auflösung der Aufg. 32.

e). Ueber die Beziehungen, welche zwischen mehreren unter beliebigen Winkeln auf einen Punkt in ein und derselben Ebene wirkenden Kräften und deren Resultante bestehen.

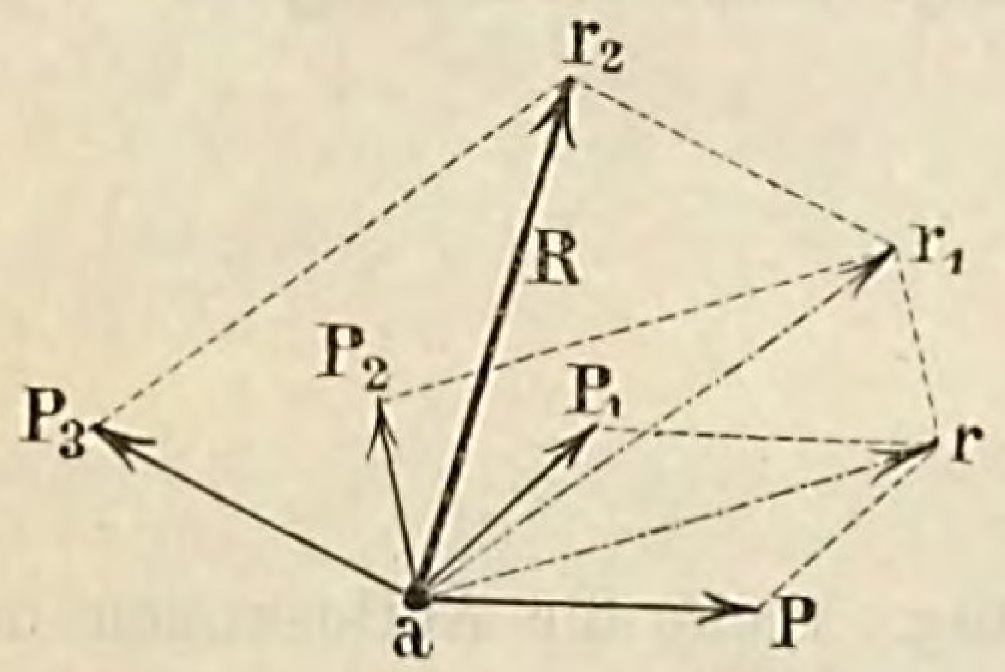
Wirken mehr als zwei Kräfte auf einen materiellen Punkt, so kann man in bezug auf die gegenseitigen Lagen der Richtungen dieser Kräfte im allgemeinen zwei Fälle unterscheiden, nämlich:

1.) die Richtungen sämtlicher Kräfte liegen in ein und derselben Ebene oder

2.) sie liegen nicht in ein und derselben Ebene, sondern haben verschiedene Lagen im Raum.

Frage 15. Durch welches Verfahren findet man die Grösse und Richtung der Resultante mehrerer, unter beliebigen Winkeln auf einen Punkt in ein und derselben Ebene wirkender Kräfte?

Figur 35a.



Antwort. Wirken mehr als zwei Kräfte an einem materiellen Punkt in derselben Ebene, wie z. B. die Kräfte P, P_1, P_2, P_3 in Fig. 35a, so findet man die Grösse und Richtung der Resultante R aller dieser Kräfte im allgemeinen dadurch, dass man, nach dem Satz des Kräfteparallelogramms, erst die Resultante r von zwei beliebigen dieser Kräfte, z. B. von P und P_1 bestimmt, dann die Resultante r_1, von der soeben gefundenen Resultante r und einer andern jener Kräfte, z. B. von P_2 sucht; hierauf die Resultante r_2 von der zuletzt gefundenen Resultante r, und einer weiteren jener Kräfte, z. B. von P_3 bestimmt u. s. f., bis die letzte der gegebenen Kräfte in Betracht gezogen ist. Die zuletzt gefundene Resultante ist die gesuchte Resultante R der Kräfte P, P_1, P_2, P_3 etc.

Man kann auch bei der Bestimmung der Resultante R mehrerer an einem materiellen Punkt wirkender Kräfte, deren Richtungen in ein und derselben Ebene liegen, folgendermassen verfahren:

Man lege sich durch den Angriffspunkt a der Kräfte P, P_1, P_2, P_3, siehe Figur 36, ein sogenanntes rechtwinkliges Koordinatensystem XX_1, YY_1 (dabei kann man vorteilhaft eine der Achsen, z. B. XX_1 mit der Richtung einer der Kräfte zusammenfallen lassen, wie es bei einigen der folgenden Aufgaben geschehen ist; dann zerlege man jede der Kräfte P, P_1, P_2 ... in zwei Komponenten, wie s und r, s_1 und r_1, s_2 und r_2 ..., deren Richtungen in die Achsen XX_1 und YY_1 zu liegen kommen. Sucht man ferner, nach Satz 3 in Antwort auf Frage 11, die Mittelkraft ϱ der in der Richtung der Achse XX_1 wirkenden Kräfte s, s_1, s_2, s_3 und ebenso die Mittelkraft ϱ_1 der in der Richtung der Achse YY_1 wirkenden Kräfte r, r_1, r_2, r_3, so bleiben schliesslich die zwei zueinander senkrecht wirkenden Kräfte ϱ und ϱ_1 übrig, deren Resultante die gesuchte Resultante R der Kräfte P, P_1, P_2 ... ist.

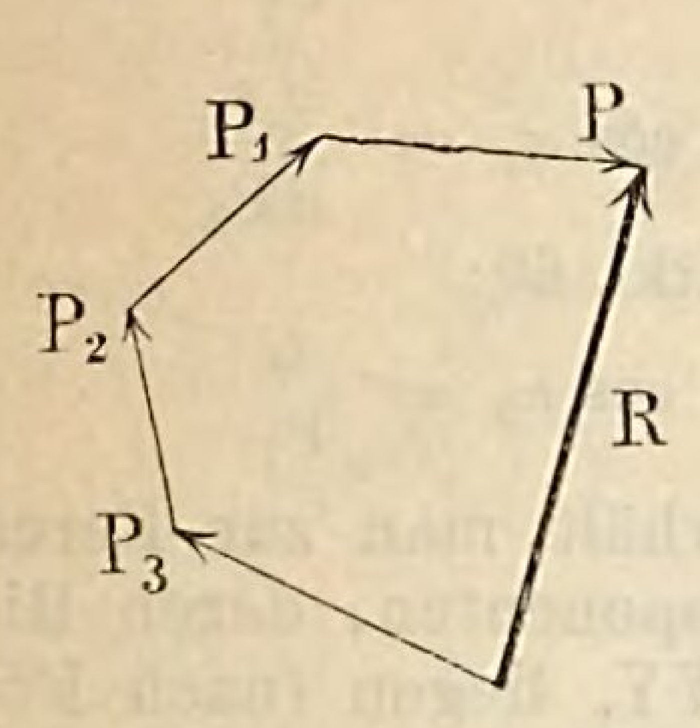
Diese Methode, welche sich auf die Bestimmung eines rechtwinkligen Koordinatensystems gründet, führt rascher und sicherer zum Ziel als jene allgemeine Methode.

Die Bestimmung der Resultante R der in der Figur 37 durch die Strecken aP, $a\mathrm{P}_1$, $a\mathrm{P}_2$, $a\mathrm{P}_3$ dargestellten Kräfte P, P_1, P_2, P_3 gestaltet sich hiernach wie folgt, und zwar:

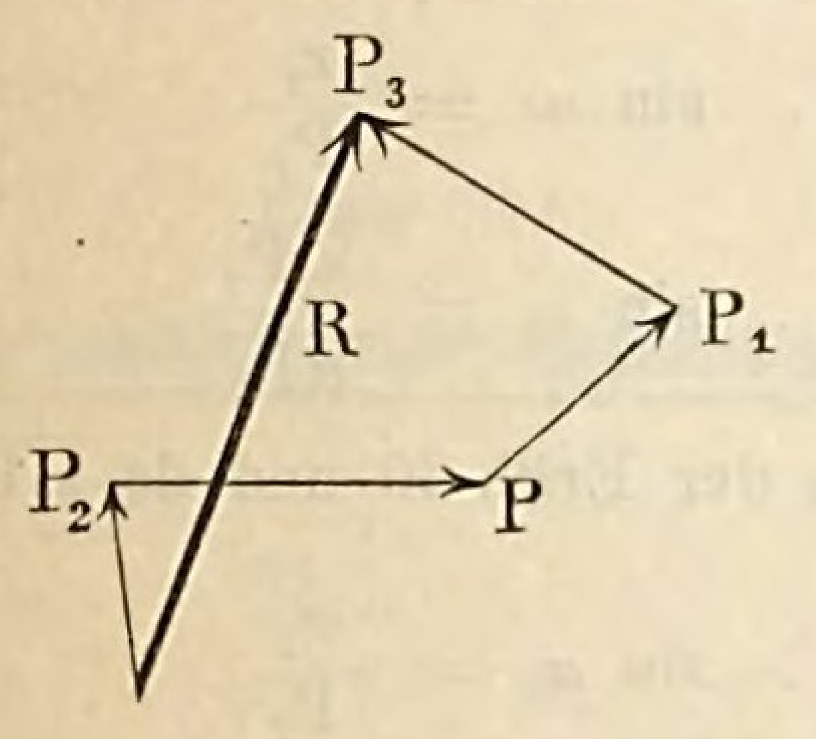
Erkl. 60. Um die Figuren durch allzuviel Buchstaben nicht zu überladen, soll da, wo es die Uebersichtlichkeit nicht beeinträchtigt, eine Kraft selbst, als auch der Endpunkt ihrer Richtung (bezw. ihrer graph. Grösse) durch ein und denselben Buchstaben bezeichnet werden.— Die Richtungen der Kräfte werden stets durch Pfeile angedeutet. In der Fig. 35 bedeutet z. B. der Buchstabe P_3 nicht allein eine in der Richtung $a\mathrm{P}_3$ wirkende Kraft P_3, sondern auch den Endpunkt der Richtung (Grösse) dieser Kraft P_3; ebenso bedeutet z. B. der Buchstabe r_2 nicht allein eine in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung $a\,r_2$ wirkende Kraft r_2, sondern auch den Endpunkt der Richtung (Grösse) dieser Kraft r_2.

Erkl. 61. Der Beweis der Richtigkeit des in nebenst. Antw. gegebenen allgemeinen Verfahrens ergibt sich daraus, dass z. B. in Figur 35a die Resultante r der Kräfte P und P_1 dieselbe Wirkung wie diese Kräfte hervorbringt, somit die Kräfte P und P_1 hinweggedacht und durch die Kraft r ersetzt werden können u. s. f. — Es ist hierbei nicht nötig, alle die in Figur 35a angedeuteten Parallelogramme mit ihren Diagonalen zu zeichnen, sondern man braucht nur, wie in Fig. 35b einfach eine Kraft an die andere nach Grösse und Richtung anzufügen, so dass ein ungeschlossenes Polygon, ein Kräftepolygon entsteht. In welcher Reihenfolge man dabei die Kräfte aneinander fügt, das bleibt ohne Einfluss auf die Resultierende. So folgen sich in Fig. 35c die Kräfte nach der Reihe P_2, P, P_1, P_3, oder in Fig. 35b P_3, P_2, P_1, P u. s. w. Die Schlusslinie R des ungeschlossenen Polygons liefert die Resultante nach Grösse und Richtung, wie aus der Kongruenz der Figuren 35bc mit den entsprechenden Stücken von Figur 35a sofort erhellt (s. Erkl. 62).

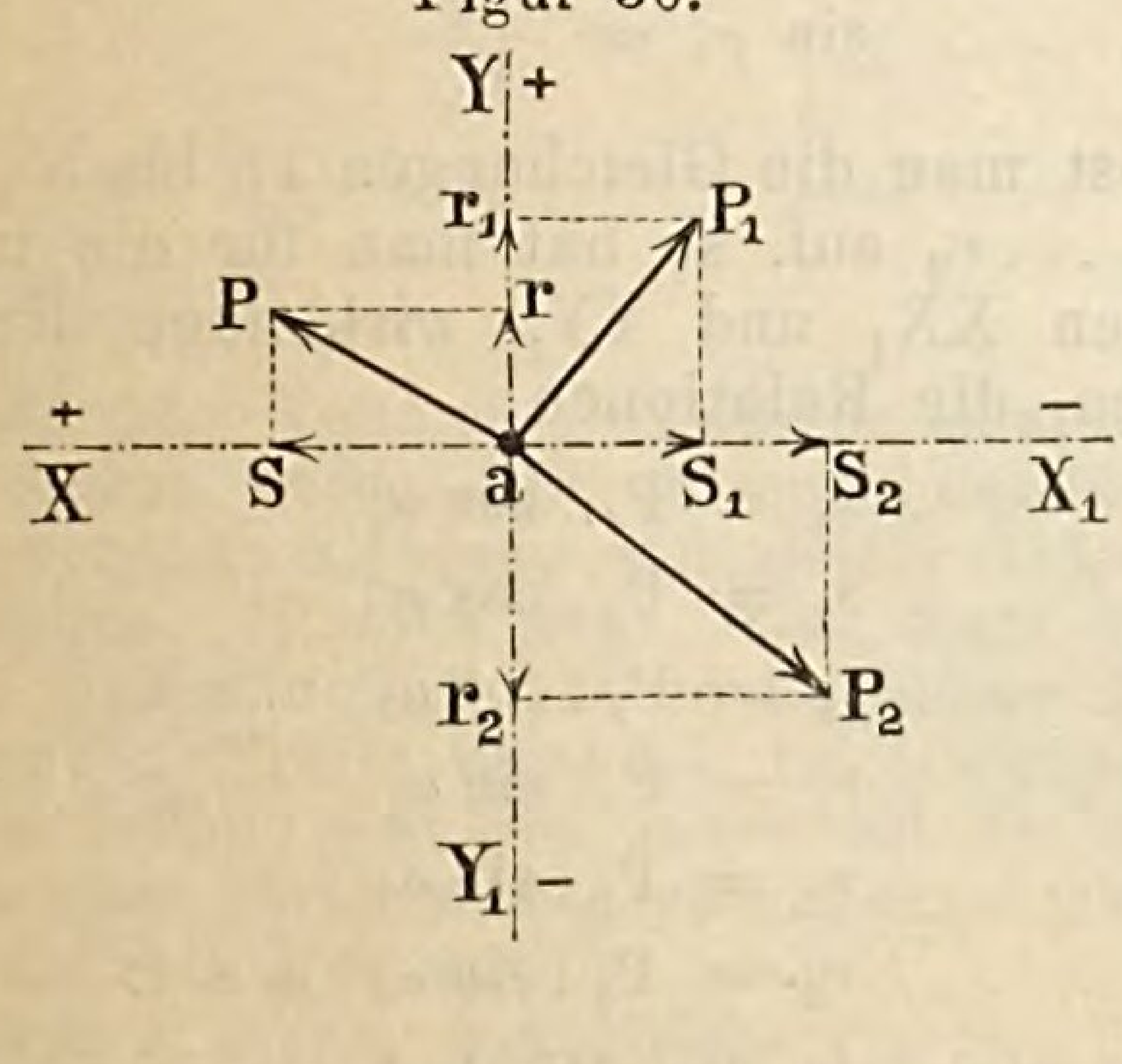
Figur 35b.



Figur 35c.



Figur 36.



Erkl. 62. Aus 4 gegebenen Kräften lassen sich 1.2.3.4 = 24 verschiedene Kräftepolygone, aus 5 gegebenen Kräften 1.2.3.4.5 = 120 verschiedene Kräftepolygone, und aus n gegebenen Kräften 1.2.3.4....$(n-1)n$ Polygone bilden.

a). **durch Konstruktion:**

Sind in der Fig. 37 die Richtungen und das Verhältnis (vergl. Erkl. 11) der Intensitäten der an dem Punkte a wirkenden Kräfte P, P_1, P_2, P_3 durch die Lagen, bezw. durch das Verhältnis der Strecken aP, aP_1, aP_2, aP_3 dargestellt, so lege man z. B. durch die Richtung der Kraft P die Achse XX_1 und ziehe durch den Angriffspunkt a die zu XX_1 Senkrechte YY_1; dann fälle man die Perpendikel P_1s_1 und P_1r_1, P_2s_2 und P_2r_2, P_3s_3 und P_3r_3 und trage die in der positiven Richtung aX der Achse XX_1 liegenden Strecken (wirkenden Komponenten) aP und as_1 von a aus nach am aneinander an, ebenso trage man die in der negativen Richtung aX_1 der Achse XX_1 liegenden Strecken (wirkenden Komponenten as_2 und as_3 von a aus nach an aneinander an. Trägt man endlich die kleinere der Strecken am und an, nämlich an, vom Endpunkte der grösseren, nämlich von m, nach $m\varrho$ ab, so stellt die Strecke $a\varrho$ die Mittelkraft ϱ der in der Geraden XX_1 nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Komponenten P, s_1, s_2, s_3 dar. Auf dieselbe Weise erhält man die Strecke $a\varrho_1$, welche die Resultante ϱ_1 der in der Geraden YY_1 nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Komponenten r_1, r_2, r_3 darstellt. Konstruiert man schliesslich über $a\varrho$ und $a\varrho_1$ das $\|$ gr. (Rechteck) $\varrho a \varrho_1 R$ und zieht die Diagonale aR, so gibt die Lage dieser Diagonale die Richtung und das Verhältnis der Diagonale aR, z. B. zu der Strecke aP, das Verhältnis der gesuchten Resultante R zu der durch aP dargestellten Kraft P an, woraus sich die Intensität der gesuchten Resultante R der Kräfte P, P_1, P_2, P_3 nach dem Vorausgegangenen leicht bestimmen lässt.

b). **durch Rechnung:**

Bezeichnet man, siehe Fig. 38, die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, P_1, P_2, P_3... mit der positiven Richtnng aX der Achse XX_1 bilden, der Reihe nach mit α, α_1, α_2, α_3...[1]), so erhält man zur Berechnung derjenigen Komponenten s_1, s_2, s_3..., deren Richtungen in der Achse XX_1 liegen, die Relationen:

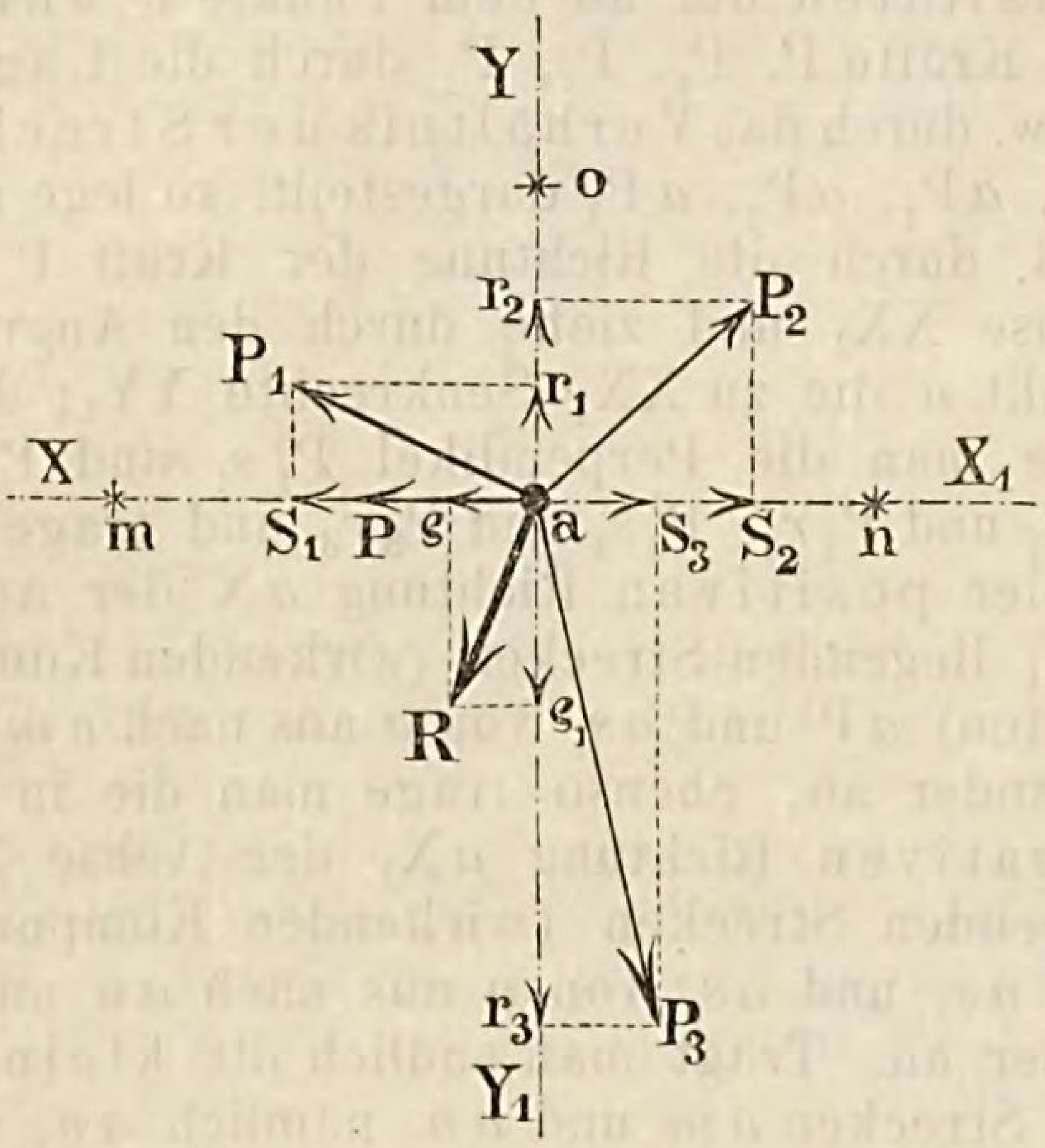
$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{as_1}}{\overline{aP_1}}$$

oder nach Erkl. 60:

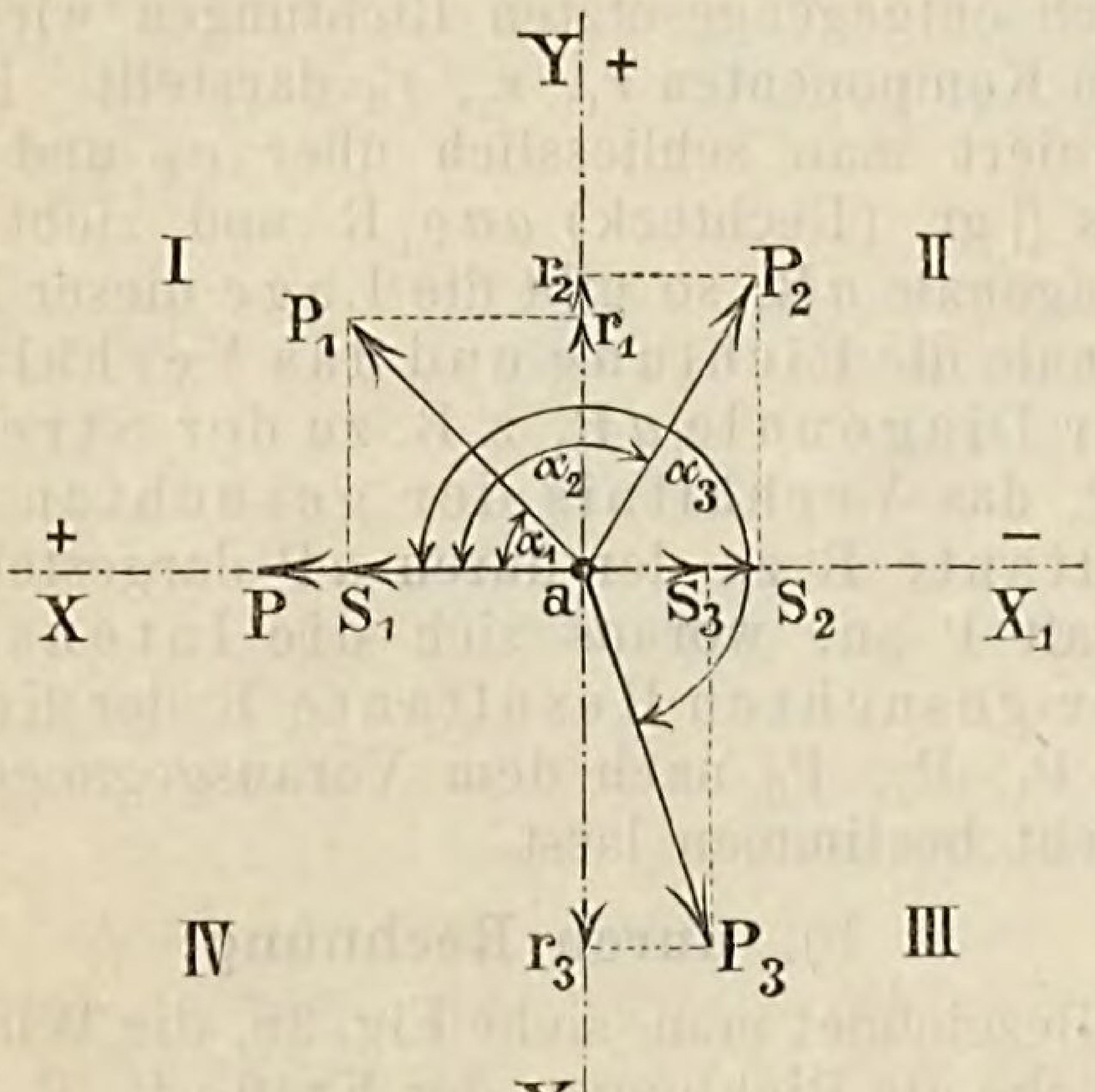
1). . . . $\cos\alpha_1 = \frac{s_1}{P_1}$

[1]) Siehe Erkl. 63.

Figur 37.



Figur 38.



$$\cos \alpha_2 = \frac{\overline{a s_2}}{\overline{a P_2}}$$

oder nach Erkl. 60:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad \cos \alpha_2 = \frac{s_2}{P_2}$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\overline{a s_3}}{\overline{a P_3}}$$

oder nach Erkl. 60:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad \cos \alpha_3 = \frac{s_3}{P_3}$$

Ferner erhält man zur Berechnung derjenigen Komponenten, deren Richtungen in der Achse YY_1 liegen (nach Formel I, S. 9 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie) die Relationen:

$$a). \quad . \quad . \quad \sin \alpha_1 = \frac{\overline{s_1 P_1}}{\overline{a P_1}}$$

oder nach der Erkl. 60 und da $\overline{s_1 P_1} = \overline{a r_1} = r_1$ ist:

$$4). \quad . \quad . \quad . \quad \sin \alpha_1 = \frac{r_1}{P_1}$$

$$b). \quad . \quad . \quad \sin \alpha_2 = \frac{\overline{s_2 P_2}}{\overline{a P_2}}$$

oder nach der Erkl. 60 und da $\overline{s_2 P_2} = \overline{a r_2} = r_2$ ist:

$$5). \quad . \quad . \quad . \quad \sin \alpha_2 = \frac{r_2}{P_2}$$

$$c). \quad . \quad . \quad \sin \alpha_3 = \frac{\overline{s_3 P_3}}{\overline{a P_3}}$$

oder nach der Erkl. 60 und da $\overline{s_3 P_3} = \overline{a r_3} = r_3$ ist:

$$6). \quad . \quad . \quad . \quad \sin \alpha_3 = \frac{r_3}{P_3}$$

Löst man die Gleichungen 1). bis 6). nach $s_1, s_2 \ldots r_3$ auf, so hat man für die in den Achsen XX_1 und YY_1 wirkenden Komponenten, die Relationen:

$$7). \quad . \quad . \quad . \quad s_1 = P_1 . \cos \alpha_1$$

$$8). \quad . \quad . \quad . \quad s_2 = P_2 . \cos \alpha_2$$

$$9). \quad . \quad . \quad . \quad s_3 = P_3 . \cos \alpha_3 \quad \text{u. s. f.}$$

$$10). \quad . \quad . \quad . \quad r_1 = P_1 . \sin \alpha_1$$

$$11). \quad . \quad . \quad . \quad r_2 = P_2 . \sin \alpha_2$$

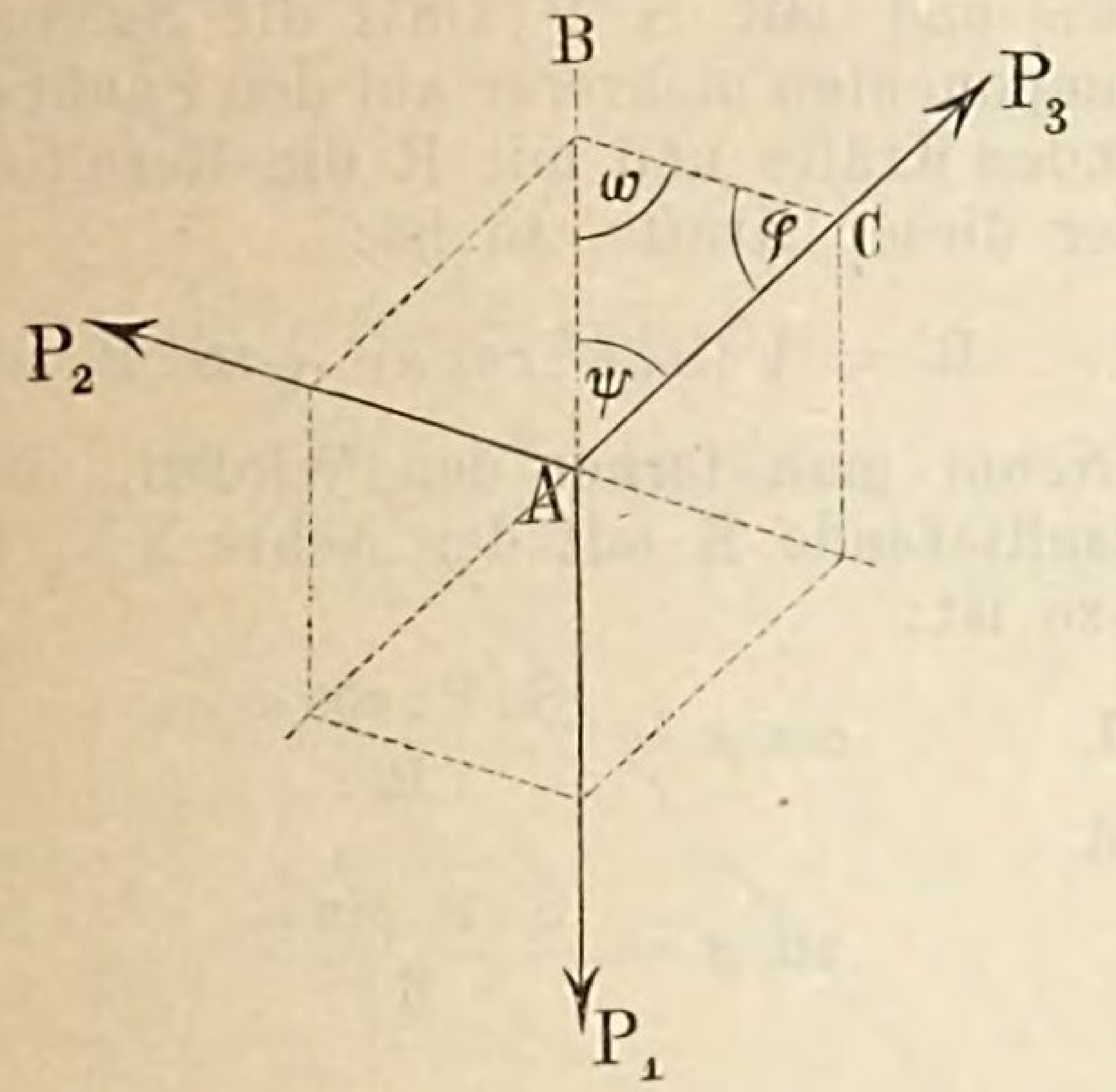
$$12). \quad . \quad . \quad . \quad r_3 = P_3 . \sin \alpha_3 \quad \text{u. s. f.}$$

Je nachdem die Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ im 1ten und 4ten oder im 2ten und 3ten Quadranten liegen, werden die Kosinus derselben positiv oder negativ[1]), somit werden auch die in der Achse XX_1 liegenden Komponenten s_1, s_2, s_3 (nach den Gleichungen 7—9) je nachdem positiv oder negativ.

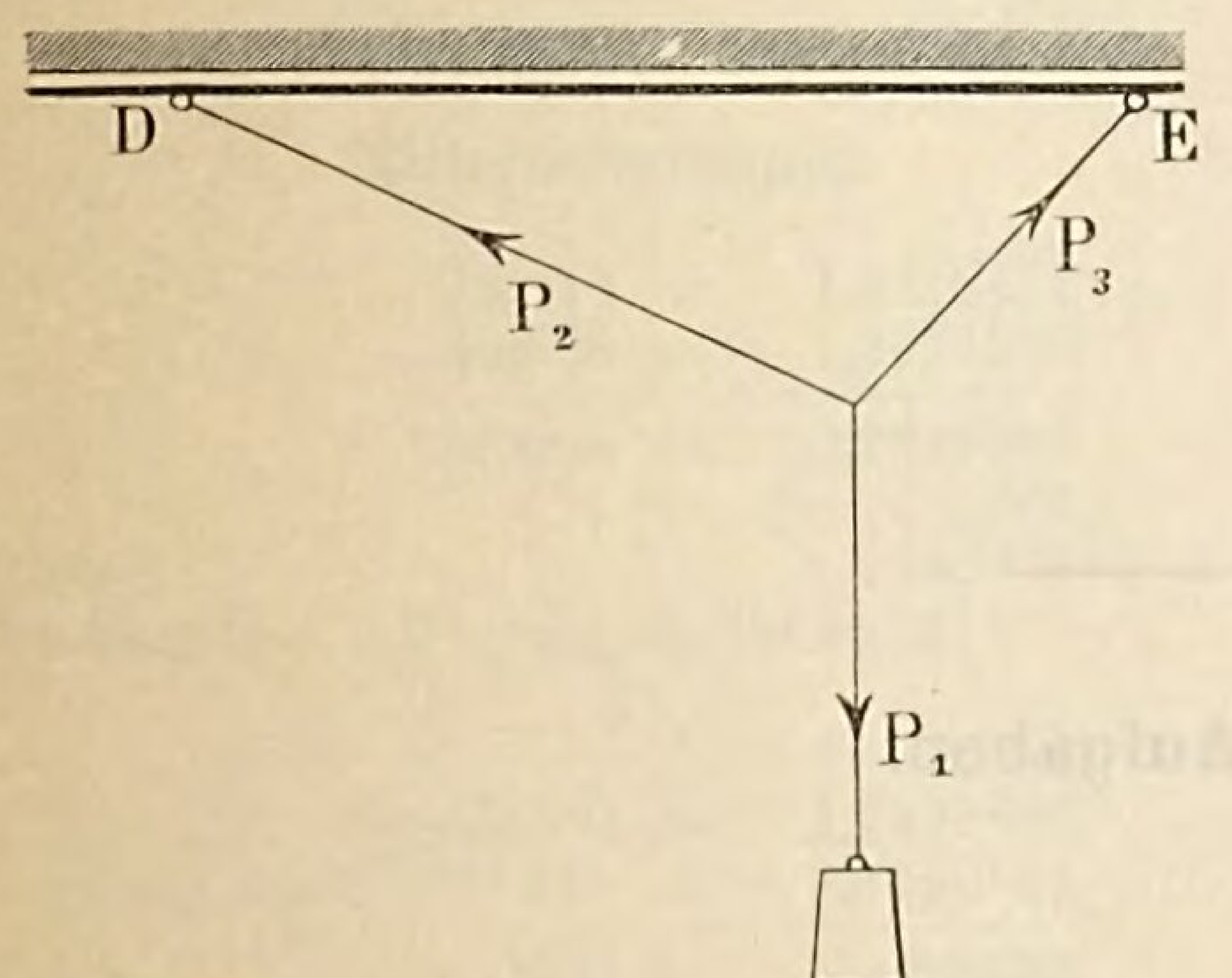
Erkl. 63. Der Winkel α, welchen die Kraft P in Figur 38 mit aX bildet, ist $= 0^0$, da, wie in Figur 37, die Achse XX_1 durch die Richtung der Kraft P gelegt wurde.

[1]) Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.

Figur 39a.



Figur 39b.



Erkl. 64. Wenn eine Kraft von einer andern aufgehoben werden soll, so muss dieselbe entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse mit ihr haben. Hieraus folgt, dass, wenn die auf einen materiellen Punkt in beliebiger Anzahl wirkenden Kräfte einander im Gleichgewicht halten sollen, jede von ihnen mit der Mittelkraft aller übrigen entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse haben muss.

Sollen z. B. die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 einander im Gleichgewicht halten, so muss jede von ihnen mit der Diagonale des aus den beiden andern konstruierten Parallelogramms gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben. Die Seiten des Dreiecks ABC, siehe Figur 39a, repräsentieren die drei Kräfte und verhalten sich nach dem Sinussatz wie die Sinuszahlen der gegenüberliegenden Winkel φ, ψ, ω. Setzt man statt dessen die Sinuszahlen der

Je nachdem ferner die Winkel α, α_1, α_2, α_3 ... im 1ten und 2ten oder im 3ten und 4ten Quadranten liegen, werden die Sinus derselben positiv oder negativ, somit werden auch die in der Achse YY_1 liegenden Komponenten r_1, r_2, r_3 ... [nach den Gleichungen 10). bis 12).] je nachdem positiv oder negativ.

Da hiernach die entgegengesetzte Richtung der in der Achse XX_1 und ebenso der in der Achse YY_1 wirkenden Komponenten von der Grösse der Winkel α, α_1, α_2 ... abhängig ist und sich aus den vorstehenden Gleichungen 7). bis 12). von selbst ergibt, so erhält man durch algebraische Addition der in der Achse XX_1 wirkenden Komponenten P, s_1, s_2, s_3 für die Resultante ϱ derselben die allgemeine Formel:

I. . . $\varrho = P + P_1 . \cos\alpha_1 + P_2 . \cos\alpha_2 + P_3 . \cos\alpha_3 + \ldots$

Ebenso erhält man durch algebraische Addition der in der Achse YY_1 wirkenden Komponenten: r_1, r_2, r_3 ... für die Resultante ϱ_1 derselben die allgemeine Formel:

II. . . $\varrho_1 = P_1 . \sin\alpha_1 + P_2 . \sin\alpha_2 + P_3 . \sin\alpha_3 + \ldots$

Da endlich die Richtungen der Resultanten ϱ und ϱ_1 rechtwinklig zueinander sind, indem die Richtung der ersten mit der Achse XX_1, die Richtung der andern mit der hierzu senkrechten Achse YY_1 zusammenfällt, so hat man nach der Formel:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

für die Resultante der Kräfte ϱ und ϱ_1, bezw. für die gesuchte Resultante R der Kräfte P, P_1, P_2, P_3, die Formel:

III. . . . $R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2}$

Schliesslich findet man den Winkel β, welchen die Resultante R mit der positiven Richtung der Achse XX_1 bildet, aus den beiden Grössen ϱ und ϱ_1 mittels der Formel:

IV. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\varrho_1}{\varrho}$

oder unter Zuhilfenahme der ermittelten R:

V. $\cos\beta = \frac{\varrho}{R}$

$$\sin\beta = \frac{\varrho_1}{R}$$

In diesen Formeln IV und V müssen die Vorzeichen der Resultanten ϱ und ϱ_1, bezw. die Lagen derselben, nämlich ob dieselben in den positiven oder negativen Rich-

Winkel α_1, α_2, α_3, welche jene resp. zu 180° ergänzen, so erhält man die Proportion:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3$$

Es ergibt sich hieraus ein einfaches Mittel, die Richtigkeit des Parallelogrammgesetzes auf experimentellem Weg zu prüfen. Der Verbindungspunkt dreier Fäden, siehe Figur 39b, von denen der eine mit einem Gewicht P_1 belastet, die beiden andern an den Punkten D und E befestigt sind, kann als ein unter Einwirkung dreier Kräfte im Gleichgewicht befindlicher materieller Punkt angesehen werden. Durch Messung der drei Winkel und Kräfte kann man sich von der Richtigkeit der obigen Proportion, mithin auch von der des Kräfteparallelogramms, überzeugen.

Erkl. 65. In der in nebenstehender Antwort aufgestellten Gleichung I werden die Glieder negativ in welchen Winkel vorkommen, die im 2. und 3. Quadranten, bezw. welche zwischen 90° und 270° liegen

In der in nebenstehender Antwort aufgestellten Gleichung II werden die Glieder negativ, in welchen Winkel vorkommen, die im 3. und 4. Quadranten liegen, bezw. welche grösser als 180° sind.

In der in nebenstehender Antwort aufgestellten Gleichung III brauchen die Vorzeichen, welche sich für ϱ und ϱ_1 aus den Gleichungen I und II ergeben, nicht berücksichtigt zu werden. Dieselben mögen nämlich positiv oder negativ sein, das Quadrat dieser Grössen ϱ und ϱ_1 wird doch positiv.

tungen der Achsen XX_1 und YY_1 wirken, berücksichtigt werden.

Bezeichnet man im allgemeinen mit $S.P.\cos\alpha$ und mit $S.P.\sin\alpha$ die Summe der Komponenten mehrerer auf den Punkt α wirkenden Kräfte und mit R die Resultierende aller dieser Kräfte, so ist:

$$\text{VI.}\quad R = \sqrt{(S.P.\cos\alpha)^2 + (S.P.\sin\alpha)^2}$$

Nennt man ferner den Winkel, den die Resultierende R mit der Achse XX_1 bildet, β, so ist:

$$\text{VII.}\quad \cos\beta = \frac{S.P.\cos\alpha}{R}$$

und

$$\sin\beta = \frac{S.P.\sin\alpha}{R}$$

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 59. Von drei Kräften P, P_1, P_2, die in einer Ebene liegen und auf einen Punkt wirken, bilden P und P_2 einen rechten Winkel, P und P_1 aber einen Winkel von 28° 10′. Wie gross ist die Resultante und welche Richtung nimmt sie, wenn P = 28, P_1 = 36 und P_2 = 48 kg ist?

Hilfsrechnungen:

1). . . 28 . 28	48 . 48	$\sqrt{30\vert 88} = 55{,}569$
224	384	25
56	192	10 \| 588
784	2304	525
	+ 784	110 \| 6300
	3088	5525
		1110 \| 77500
		66636
		11112 \| 1086400
		1000161

Auflösung 1. Man konstruiere, siehe Fig. 40, zunächst das Kräfteparallelogramm PP_2 und ziehe $\overline{Ar} = r$, die Resultante der beiden Kräfte P und P_2, hierauf konstruiere man auch das Kräfteparallelogramm P_1r und ziehe $\overline{AR} = R$.

Es ist nun die Resultante der beiden ersten Kräfte

$$r = \sqrt{P^2 + P_2^2}$$

oder wenn man die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt, ist

$$r = \sqrt{28^2 + 48^2}$$

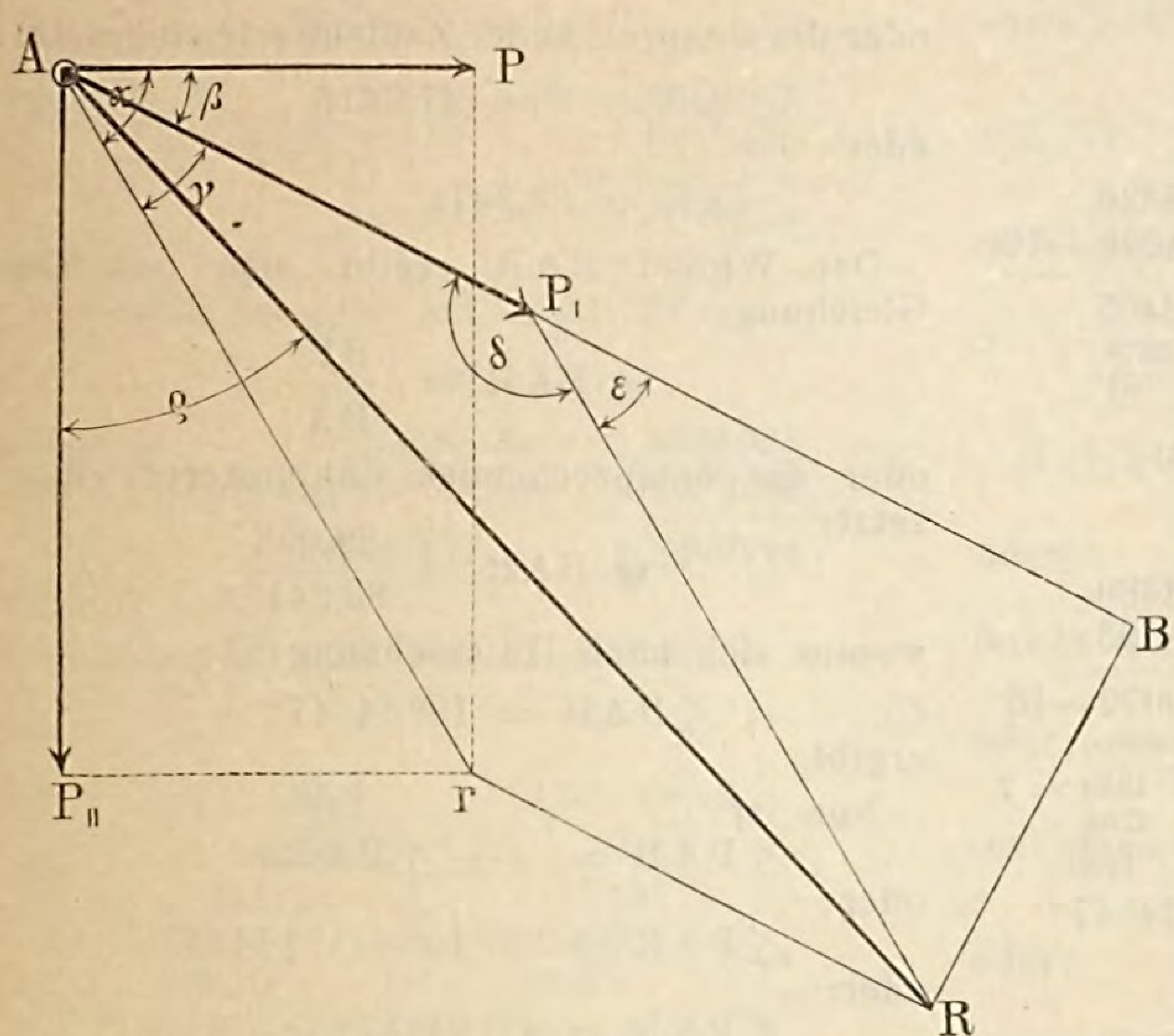
oder:

$$r = \sqrt{3088}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1):

$$\text{A).}\quad r = 55{,}569$$

Figur 40.



Hilfsrechnungen.

2). $\log 48 = 1{,}6812412$
$-\log 28 = -1{,}4471580$
$\log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2340832$
502
mithin: 484 | 3300 = 7
numlog $\operatorname{tg} \alpha$ oder $\operatorname{tg} \alpha = 59^0\,44'\,37''$

3). $\log 55{,}569 = 1{,}7448326$
$+\log \sin 31^0\,34'\,37'' = +9{,}7190354-10$
$\log \overline{BR} = 1{,}4638680$
31
mithin: 49
numlog $\overline{BR}$ oder $\overline{BR} = 29{,}098$

Erkl. 66. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, 4 innere und 4 äussere. Man teilt dieselben in 4 Paar korrespondierende Winkel, d. i. je ein innerer und ein äusserer Winkel auf derselben Seite der schneidenden, aber an verschiedenen Winkelpunkten.

Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet:

„Wenn zwei Parallelen von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind je zwei korrespondierende Winkel einander gleich.“

Ferner ist in Figur 40:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_2}{P}$$

oder nach den gegebenen Zahlen ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{48}{28}$$

woraus sich nach nebenstehender Hilfsrechnung 2). der Winkel

$$\alpha = 59^0\,44'\,37''$$

ergibt.

Da der gegebene Winkel

$$\beta = 28^0\,10'$$

beträgt, so bleibt für den Winkel

$$\gamma = \alpha - \beta$$

oder: $\gamma = 31^0\,34'\,37''$

Da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gleich 2 R oder 180⁰ ist, so ist der Winkel

$$\delta = 180^0 - \gamma$$

oder: $\delta = 148^0\,25'\,23''$

Ferner ist Winkel

$$\varepsilon = \gamma$$

denn es sind korrespondierende Winkel.[1])

Zur Berechnung der Grösse der Linie $\overline{BR}$ benutzen wir die Gleichung:

$$\sin \varepsilon = \frac{\overline{BR}}{\overline{P_1R}}$$

oder da $\overline{P_1R} = r$, so ist:

$$\sin \varepsilon = \frac{\overline{BR}}{r}$$

Wir denken uns nämlich $\overline{AP_1} = P_1$ so weit verlängert, bis die von R gefällte Höhe sie in B trifft. Daraus folgt:

$$\overline{BR} = r \,.\, \sin \varepsilon$$

oder die bekannten Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{BR} = 55{,}569 \,.\, \sin 31^0\,34'\,37''$$

woraus sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 3 B). $\overline{BR} = 29{,}098$ ergibt.

Zur Berechnung der Grösse der Linie $\overline{P_1B}$ benutzen wir die Gleichung:

$$\cos \varepsilon = \frac{\overline{P_1B}}{r}$$

woraus sich für

$$\overline{P_1B} = r \,.\, \cos \varepsilon$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{P_1B} = 55{,}569 \,.\, \cos 31^0\,34'\,37''$$

woraus man nach Hilfsrechn. 4).:

$$\overline{P_1B} = 47{,}3413 \text{ erhält.}$$

[1]) Siehe Erkl. 66.

Hilfsrechnungen.

4). $\log 55{,}569 = 1{,}7448326$
$+ \log \cos 31^0\,34'\,37'' = +9{,}9304079 - 10$

$\log \overline{P_1B} = 1{,}6752405$
2374
31

mithin:
num-log $\overline{P_1B}$ oder $\overline{P_1B} = 47{,}3413$

5). $\log 29{,}098 = 1{,}4638680$
$- \log 83{,}3413 = -1{,}9208603$

$\log \operatorname{tg} BAR = 9{,}5430077 - 10$
29584
672 | 4930 = 7
4732
1980

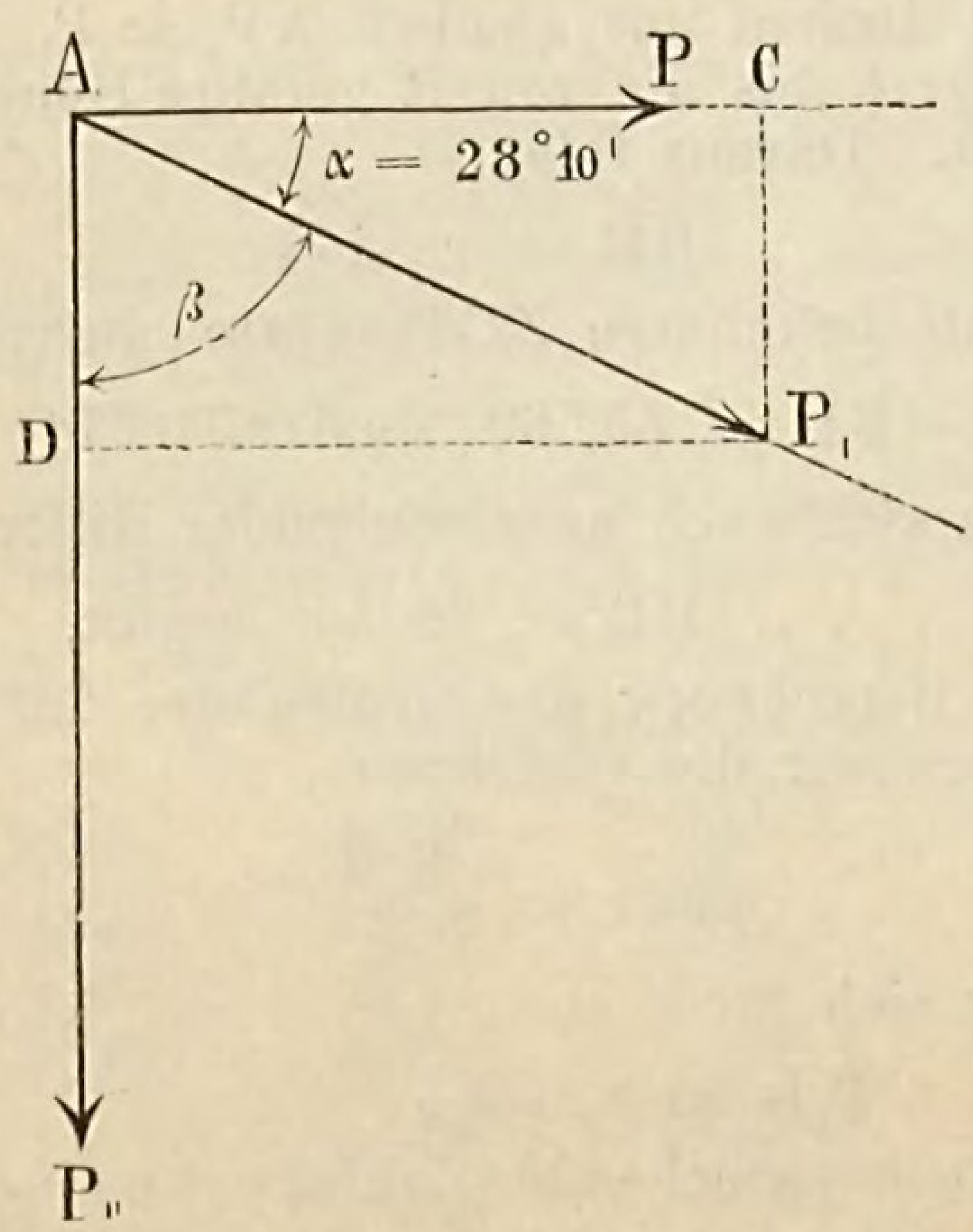
mithin:
num-log BAR oder $\measuredangle BAR = 19^0\,14'\,47''$

6). . . . $\log 29{,}098 = 1{,}4638680$
$- \log \sin 19^0\,14'\,47'' = -9{,}5180282 - 10$

$\log R = 1{,}9458398$
17
210
196

mithin:
num-log R oder $R = 88{,}2743$

Figur 41.



Nun ist:

$$\overline{AB} = P_1 + \overline{P_1B}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{AB} = 36 + 47{,}3413$$

oder:

$$\overline{AB} = 83{,}3413$$

Der Winkel BAR ergibt sich aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} BAR = \frac{\overline{BR}}{\overline{BA}}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\operatorname{tg} BAR = \frac{29{,}098}{83{,}3413}$$

woraus sich nach Hilfsrechnung 5).:

C). . . . $\measuredangle BAR = 19^0\,14'\,47''$

ergibt.

Nun ist:

$$\measuredangle PAR = \beta + \measuredangle BAR$$

oder:

$$\measuredangle PAR = 28^0\,10' + 19^0\,14'\,47''$$

oder:

$$\measuredangle PAR = 47^0\,24'\,47''$$

Hieraus ergibt sich für Winkel

$$\varrho = 90^0 - 47^0\,24'\,47''$$

oder:

D). . . . $\varrho = 42^0\,35'\,13''$

Endlich ist:

$$\sin BAR = \frac{\overline{BR}}{R}$$

hieraus ergibt sich für

$$R = \frac{\overline{BR}}{\sin BAR}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$R = \frac{29{,}098}{\sin 19^0\,14'\,47''}$$

und somit nach Hilfsrechnung 6).:

E). $R = 88{,}2743$

d. h. die Grösse der Resultante beträgt 88,2743 kg.

Auflösung 2. Zu demselben Resultat gelangt man auf folgendem kürzeren Weg:

Man zerlege die gegebene Kraft P_1 in zwei zueinander rechtwinklige Komponenten, welche in die Richtungen von P und P_2 fallen, siehe Figur 41; es seien dies $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$.

Nun ist:

$$\frac{\overline{AC}}{P_1} = \cos \alpha$$

und

$$\frac{\overline{AD}}{P_1} = \cos \beta$$

hieraus ergibt sich für

$$\overline{AC} = P_1 \,.\, \cos \alpha$$

Hilfsrechnungen:

7a). $\log 36 = 1{,}5563025$
$+\log\cos 28^0\,10' = +9{,}9452609$

$\log \overline{AC} = 1{,}5015634$

mithin:

num-log $\overline{AC}$ oder $\overline{AC} = 31{,}737$

7b). $\log 36 = 1{,}5563025$
$+\log\cos 61^0\,50' = 9{,}6739769$

$\log \overline{AD} = 1{,}2302794$

mithin:

num-log $\overline{AD}$ oder $\overline{AD} = 16{,}993$

8). . 59,74 . 59,74 — 64,99 . 64,99

59,74 . 59,74	64,99 . 64,99
23896	58491
41818	58491
53766	25996
29870	38994
3568,8676	4223,7001
	+ 3568,8676
	7792,5677

$\sqrt{77|92|56|77} = 88{,}27$

```
    64
16|1392
   1344
176|4856
    3524
1764|133277
     123529
17654|974800
```

9). . . . $\log 64{,}99 = 1{,}8128465$
$-\log 59{,}737 = -1{,}7762434$

$\log \operatorname{tg}\alpha = 0{,}0366031$
5950
423 | 810 = 2

mithin:

num-log tg α oder $\alpha = 47^0\,24'\,42''$

und für

$$\overline{AD} = P_1 \, . \cos\beta$$

oder wenn man die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt, so erhält man für

$$\overline{AC} = 36 \, . \cos 28^0\,10'$$

und für

$$\overline{AD} = 36 \, . \cos(90^0 - 28^0\,10')$$

es ist somit nach Hilfsrechnung 7:

A). . . $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} = 31{,}737 \\ \text{und} \\ \overline{AD} = 16{,}993 \end{array} \right.$

Nun ist:

$$\overline{AC} + P = 31{,}74 + 28$$

oder:

$$\overline{AC} + P = 59{,}74$$

ferner ist:

$$\overline{AD} + P_2 = 16{,}99 + 48$$

oder:

$$\overline{AD} + P_2 = 64{,}99$$

und demnach ist nach dem pythag. Lehrsatz:

$$R = \sqrt{59{,}74^2 + 64{,}99^2}$$

oder:

$$R = \sqrt{7792{,}5677}$$

woraus sich nach Hilfsrechnung 8:

B). . . . $R = 88{,}27$

ergibt.

Die Richtung der Resultante ergibt sich aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AD} + P_2}{\overline{AC} + P}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{64{,}99}{59{,}737}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 9).:

C). . . . $\alpha = 47^0\,24'\,42''$

erhält.

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

oder: $\beta = 42^0\,35'\,18''$

Auflösung 3. Will man aber die Grösse und Richtung der Resultante durch Konstruktion ermitteln, so verfährt man, wie es Figur 40 veranschaulicht.

In derselben ist:

$$\overline{AP} = 28 \text{ mm}$$

$$\overline{AP_1} = 36 \text{ mm}$$

$$\overline{AP_2} = 48 \text{ mm}$$

und der Winkel

$$\beta = 28^0\,10'$$

während $\measuredangle PAP_2 = 90^0$ gross gezeichnet ist.

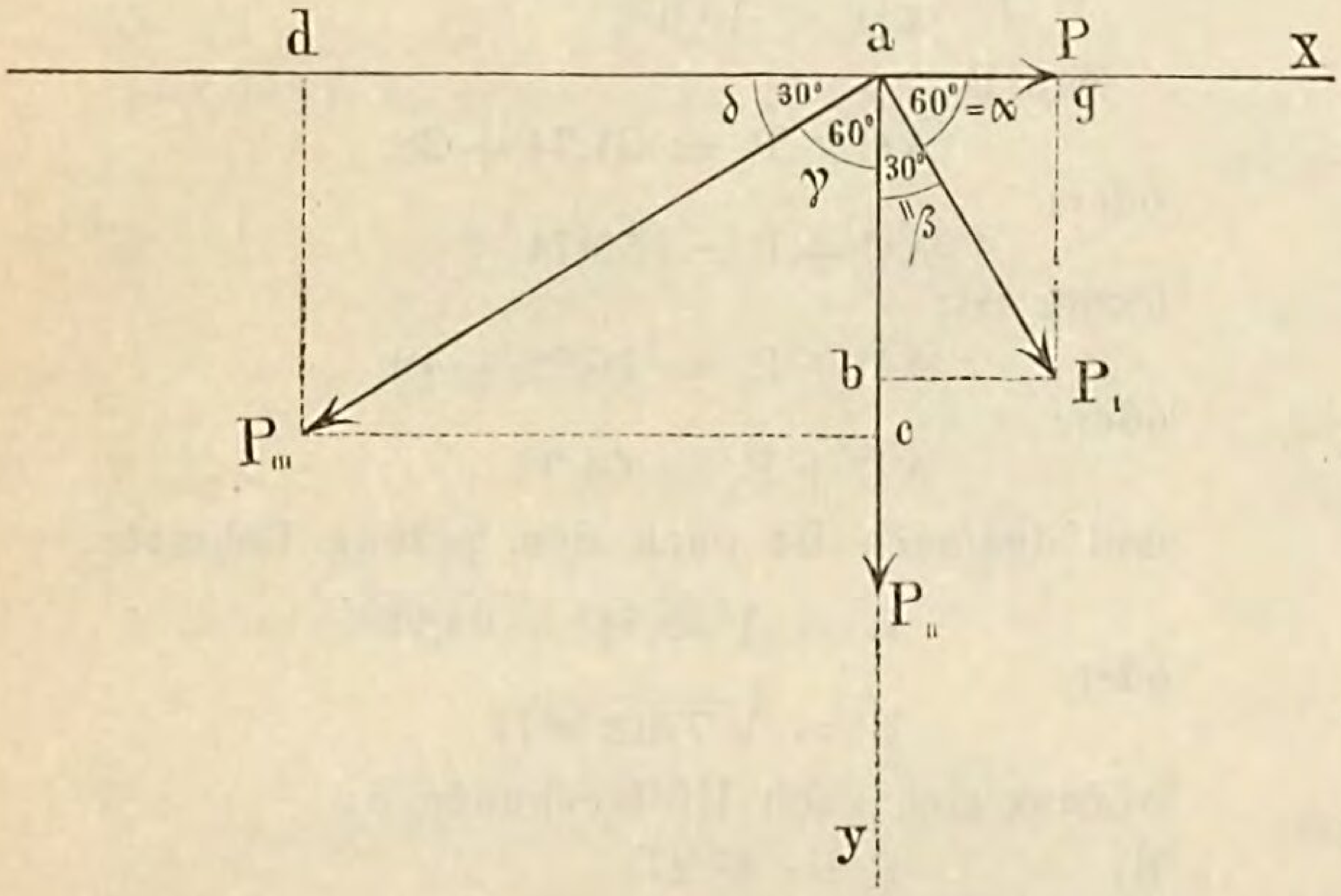
Man findet durch Messung die Linie

$\overline{AR}$ oder $R = 88$ mm lang

und $\measuredangle PAR =$ ca. $47^1/_2{}^0$

Aufgabe 60. Vier Kräfte P, P_1, P_2 und P_3 von resp. 2, 4, 6 und 8 kg wirken in einer Ebene auf einen Punkt und zwar P und P_2 sowie P_1 und P_3 unter rechten Winkeln, P und P_1 aber unter einem Winkel von 60°. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante?

Figur42.



Auflösung. Man konstruiere die Parallelogramme *Pb* und *cd* und zerlege die beiden Kräfte P_1 und P_3 in zwei zu einander rechtwinklige Komponenten, siehe Fig. 42, welche in die Richtung von $\overline{ax}$ und $\overline{ay}$ fallen. Es ist in diesem Fall die Komponente

$$\overline{ag} = P$$

oder:

$$P = P_1 \,.\, \cos 60^0$$

und

$$\overline{ab} = P_1 \,.\, \cos 30^0$$

Ferner ist:

$$\frac{\overline{ac}}{P_3} = \cos 60^0 \text{ oder } \sin 30^0$$

also:

$$\overline{ac} = P_3 \,.\, \sin 30^0$$

$$\frac{\overline{ad}}{P_3} = \cos 30^0$$

oder:

$$\overline{ad} = P_3 \,.\, \cos 30^0$$

es ist also:

$$\overline{ag} = P_1 \,.\, \cos 60^0$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{ag} = 4 \,.\, \cos 60^0$$

und da $\cos 60^0 = 0{,}5$ beträgt [1]), so ist

$$\overline{ag} = 2$$

Ferner ist:

$$\overline{ab} = P_1 \,.\, \cos 30^0$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{ab} = 4 \,.\, \cos 30^0$$

oder da $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beträgt [2]), so ist:

$$\overline{ab} = 2\sqrt{3}$$

Ferner ist:

$$\overline{ac} = P_3 \,.\, \sin 30^0$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{ac} = 8 \,.\, \sin 30^0$$

da aber $\sin 30^0$ oder $\cos 60^0 = 0{,}5$ beträgt, so ist:

$$\overline{ac} = 4$$

endlich ist:

$$\overline{ad} = P_3 \,.\, \cos 30^0$$

oder die entspr. Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{ad} = 8 \,.\, \cos 30^0$$

oder da $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, so ist:

$$\overline{ad} = 4\sqrt{3}$$

[1]) Siehe Erkl. 32.
[2]) Siehe Erkl. 32.

Hilfsrechnungen:

1). . . $(4-4\sqrt{3})^2 = 16-32\sqrt{3}+16.3$

$(10+2\sqrt{3})^2 = 100+40\sqrt{3}+4.3$

$116+8\sqrt{3}+20.3$

oder: $176+8\sqrt{3}$

oder: $176+8.1,732$

oder: $176+13,856$

oder: $189,856$

$\sqrt{1|89,|85|6} = 13,7788$

```
 1
 2|89
   69
 26|2085
    1869
 274|21160
     19229
 2754|243100
      220384
 27552|2271600
```

2). $\log 4,598$ od. $\log \text{tg}\,\varrho = 0,6625690$

```
                 4859
            1014|8310 = 8,2
                 8112
                 1980
```

mithin:

num-log tg ϱ oder $\varrho = 77^0\,43'\,48,2''$

In der Richtung von $\overline{ax}$ wirken nun die Kräfte

$$P+\overline{ag}-\overline{ad}$$

und in der Richtung von $\overline{ay}$ wirken die Kräfte

$$P_2+\overline{ab}+\overline{ac}$$

Folglich ist die Summe der nach x wirkenden Kräfte

$$2+2-4\sqrt{3} = 4-4\sqrt{3}$$

und die Summe der nach y wirkenden Kräfte

$$6+2\sqrt{3}+4 = 10+2\sqrt{3}$$

Die Resultante der nach x und y gerichteten Kräfte ist somit nach dem pythag. Lehrsatz

$$R = \sqrt{(4-4\sqrt{3})^2+(10+2\sqrt{3})^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$R = \sqrt{189,856}$$

oder:

A). . . . $R = 13,7788$

Bezeichnet man den Winkel, den die Resultante mit $\overline{ax}$ bildet, mit ϱ, so ist

$$\text{tg}\,\varrho = \frac{10+2\sqrt{3}}{4-4\sqrt{3}}$$

oder:

$$\text{tg}\,\varrho = \frac{10+2\sqrt{3}}{4(1-\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,\varrho = \frac{(10+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{4(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,\varrho = \frac{10+12\sqrt{3}+6}{4(1-\sqrt{3})}$$

$$\text{tg}\,\varrho = \frac{16+12\sqrt{3}}{-8}$$

$$\text{tg}\,\varrho = -\frac{1}{2}(4+3\sqrt{3})$$

mithin:

$$\text{tg}\,\varrho = -\frac{1}{2}\cdot 9,196 \text{ oder } -4,598$$

hieraus ergibt sich nach Hilfsrechnung 2).:

B). . . . $\varrho = 77^0\,43'\,48,2''$

Aufgabe 61. Vier Kräfte P, P_1, P_2, P_3 von resp 6, 9, 12 und 15 kg wirken in einer Ebene auf einen Punkt und zwar P und P_2 sowie P_1 und P_3 unter rechten Winkeln, P und P_1 aber unter einem Winkel von 40^0. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante?

Auflösung. Man zerlege P_1 in zwei, in der Richtung von $\overline{ax}$ und $\overline{ay}$ wirkende Komponenten $\overline{am}$ und $\overline{ab}$ und P_3 desgl. in die beiden Komponenten $\overline{ac}$ und $\overline{ad}$, siehe Figur 43. Es ist:

$$\overline{am} = P_1 . \cos 40^0$$

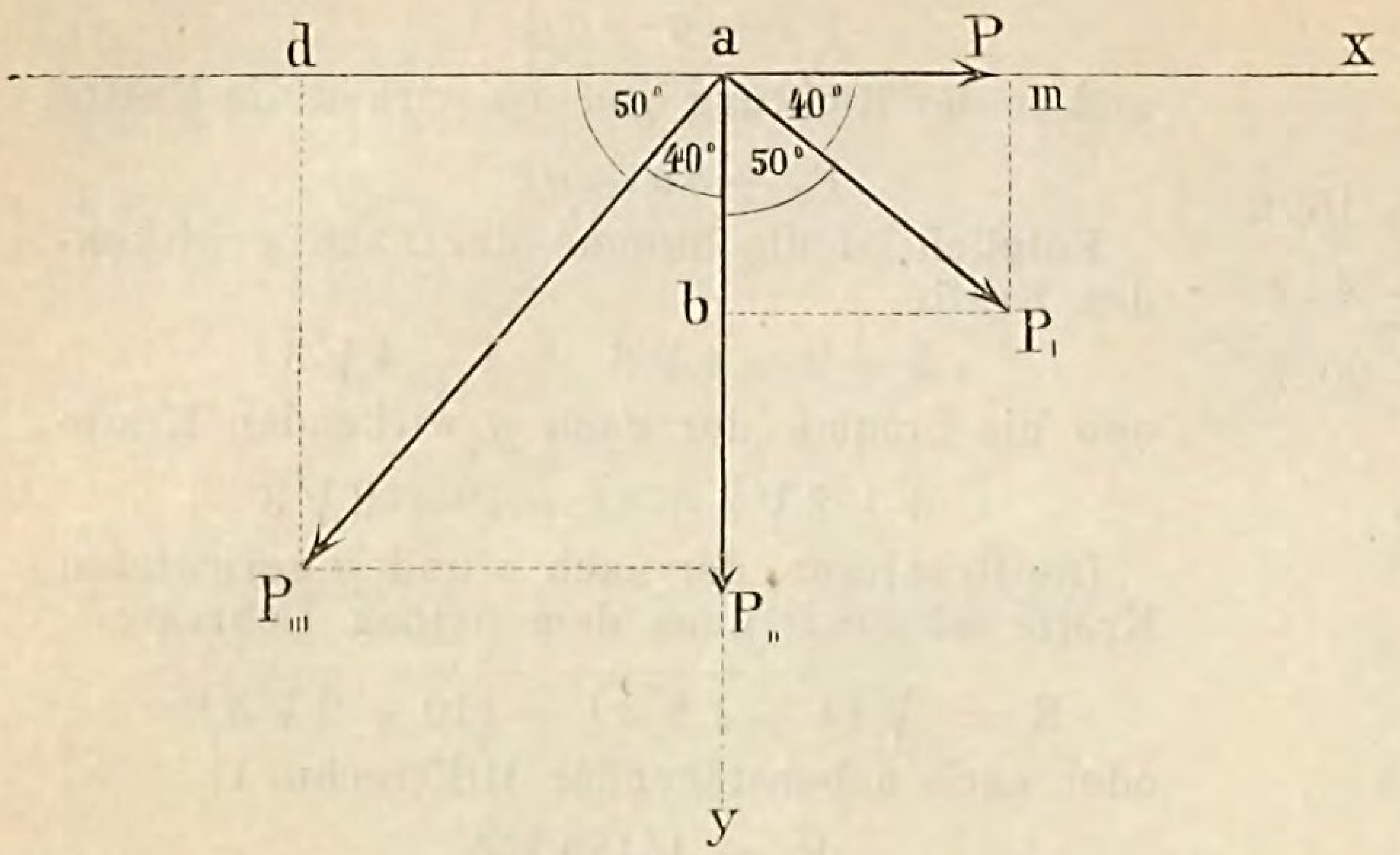
$$\overline{ab} = P_1 . \cos 50^0$$

$$\overline{ac} = P_3 . \cos 40^0$$

$$\overline{ad} = P_3 . \cos 50^0$$

oder nach den gegebenen Kräften ist:

Figur 43.



Hilfsrechnungen.

1). . . . $\log 9 = 0{,}9542425$
$+ \log\cos 40^0 = 9{,}8842540 - 10$
$\log \overline{am} = 0{,}8384965$
mithin:
num-log $\overline{am}$ oder $\overline{am} = 6{,}894$

2). . . . $\log 9 = 0{,}9542425$
$+ \log\cos 50^0 = 9{,}8080675$
$\log \overline{ab} = 0{,}7623100$
mithin:
num-log $\overline{ab}$ oder $\overline{ab} = 5{,}785$

3). . . . $\log 15 = 1{,}1760913$
$\log\cos 40^0 = 9{,}8842540$
$\log \overline{ac} = 1{,}0603453$
mithin:
num-log $\overline{ac}$ oder $\overline{ac} = 11{,}49$

4). . . . $\log 15 = 1{,}1760913$
$\log\cos 50^0 = 9{,}8080675$
$\log \overline{ad} = 0{,}9841588$
mithin:
num-log $\overline{ad}$ oder $\overline{ad} = 9{,}6418$

5). . . 3,254 . 3,254
13016
16270
6508
9762
10,588516

29,2752 . 29,2752
146375
204925
58550
263475
58550
857,025625
+ 10,588516
867,614141

$\overline{am} = 9 \, . \cos 40^0$
$\overline{ab} = 9 \, . \cos 50^0$
$\overline{ac} = 15 \, . \cos 40^0$
$\overline{ad} = 15 \, . \cos 50^0$

Hieraus erhält man nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 1—4:

$\overline{am} = 6{,}894$
$\overline{ab} = 5{,}785$
$\overline{ac} = 11{,}49$
$\overline{ad} = 9{,}64$

Es wirken nun in der Richtung von $\overline{ax}$ die Kräfte

$$P + \overline{am} - \overline{ad} = 6 + 6{,}894 - 9{,}64$$

oder wenn wir diese algebraische Summe x nennen:

$$x = 3{,}254$$

Die in der Richtung $a\,y$ wirkenden Kräfte sind:

$$P_2 + \overline{ab} + \overline{ac} = 12 + 5{,}785 + 11{,}49$$

oder wenn wir diese Summe y nennen:

$$y = 29{,}275$$

Es ist somit nach dem pythag. Lehrsatz

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oder obige Zahlenwerte eingesetzt, ist

$$R = \sqrt{3{,}254^2 + 29{,}275^2}$$

oder:

$$R = \sqrt{867{,}614141}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 5:

A). . . . $R = 29{,}455$

d. h. die Grösse der Resultante ist 29,455 kg.

Bezeichnet man den Winkel, den die Resultante mit $\overline{ax}$ bildet, mit α, und den Winkel, den die Resultante mit $\overline{ay}$ bildet, mit β, so ist:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte gesetzt:

$$\sin\alpha = \frac{29{,}275}{29{,}455}$$

hieraus erhält man nach Hilfsrechnung 6 für den Winkel

B). $\alpha = 83^0\,39'\,45''$

und Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$

oder: $\beta = 6^0\,20'\,15''$

Hilfsrechnungen.

$\sqrt{8|67,|61|41|41} = 29{,}455$
4
4|467
441
58|2661
2336
588|32541
29425
5890|311641

6). . . $\log 29{,}275 = 1{,}4664969$
$-\log 29{,}455 = -1{,}4691590$

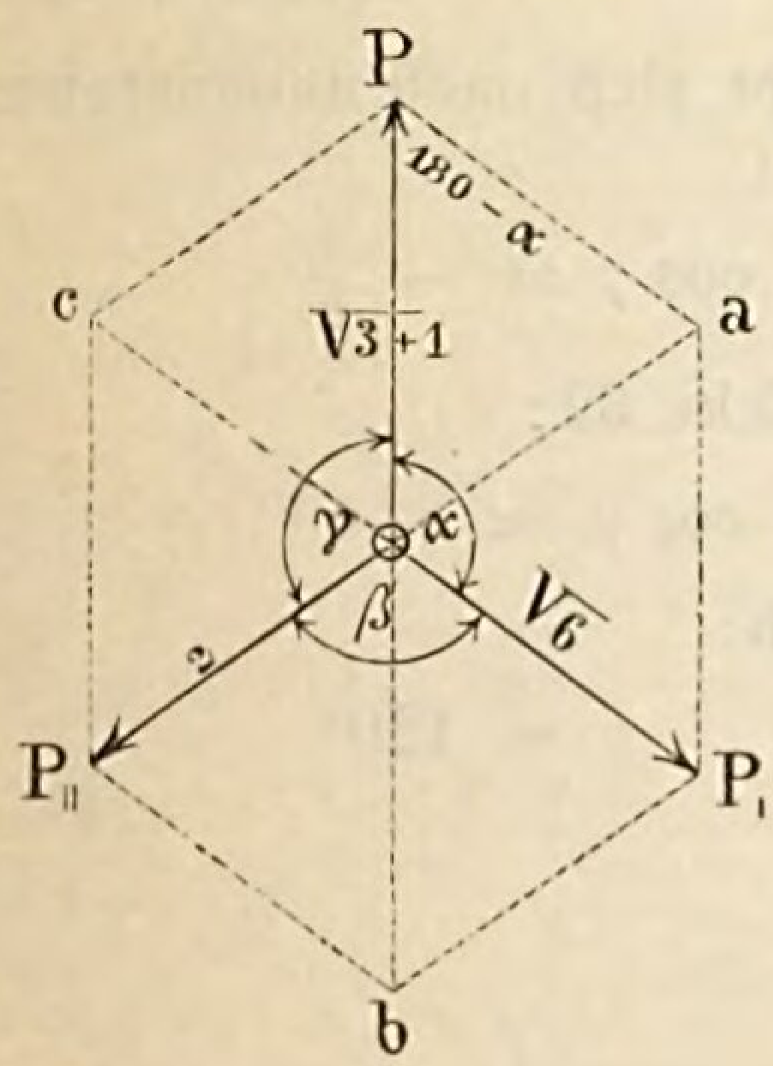
$\log \sin \alpha = 9{,}9973379 - 10$
3367
mithin: $23 | 120 = 5$
num-log α oder $\alpha = 83^0\,39'\,45''$

Aufgabe 62. Drei Kräfte wirken in einer Ebene auf einen Punkt und sind im Gleichgewicht. Sie verhalten sich zueinander wie:

$$(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:\sqrt{4}$$

Unter welchen Winkeln sind sie gegeneinander geneigt?

Figur 44.



Hilfsrechnungen.

1). . . $(\sqrt{3}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1$

Diesen Wert in nebenstehende Gleichung eingesetzt, gibt:

$$\cos \alpha = \frac{4-(3+2\sqrt{3}+1)-6}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$$

oder:

$$\cos \alpha = \frac{4-3-2\sqrt{3}-1-6}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$$

oder:

$$\cos \alpha = -\frac{2(3+\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$$

oder:

Auflösung. Die drei Kräfte seien P, P_1 und P_2, die drei Winkel α, β und γ. Es ist also nach der gestellten Aufgabe:

$$P : P_1 : P_2 = (\sqrt{3}+1) : \sqrt{6} : 2$$

siehe Figur 44. Da die Kräfte im Gleichgewicht stehen, so muss P_2 an Grösse der Resultante von P und P_1 oder gleich $\overline{oa}$ sein, aber dieser Kraft entgegengesetzt wirken und es sind somit von dem Dreieck oaP die drei Seiten bekannt, woraus, nach dem Kosinussatz (siehe Erkl. 36) der Winkel $(180-\alpha)$ berechnet werden kann:

$$\cos 180^0 - \alpha = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-4}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$$

da nun: $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, so ist:

$$\cos \alpha = -\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-4}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$$

oder:

$$\cos \alpha = \frac{4-(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

oder: $\cos \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

oder: $\cos \alpha = -0{,}7071068$

$$\log \cos \alpha = -\log 0{,}8494850 - 1$$
$$+9 \qquad -9$$
$$\log \cos \alpha = -9{,}8494850 - 10$$

mithin:

$$\cos\alpha = -\frac{(3+\sqrt{3})}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

diesen Wert mit $\sqrt{6}$ erweitert:

$$\cos\alpha = -\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{6}}{(\sqrt{3}+1)\,6}$$

oder:

$$\cos\alpha = -\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6\sqrt{3}+1)}$$

oder:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

oder:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)}$$

oder:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oder } \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2). . . . $\frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2-4}{2.\sqrt{6}.2} =$

$$\frac{3+2\sqrt{3}+1-6-4}{4\sqrt{6}}$$

oder:

$$\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}-6}{4\sqrt{6}} \text{ oder } \cos\beta = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}}$$

oder:

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{6}} \text{ oder } \cos\beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

oder:

$$\cos\beta = \frac{1-1{,}7320508}{2.1{,}4142136}$$

oder:

$$\cos\beta = \frac{0{,}7320508}{2{,}8284272}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 0{,}7320508 &= 0{,}8645412-1 \\ -\log 2{,}8284272 &= -0{,}4515450 \\ &\ \ 0{,}4129962-1 \\ &\ +9 \qquad\qquad -9 \\ \log\cos\beta &= 9{,}4129962-10 \end{aligned}$$

mithin: $\beta = -75^0$

3). . $\frac{6-3-2\sqrt{3}-1-4}{4\sqrt{3}+1} = -\frac{2-2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$

oder:

$$\cos\gamma = -\frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}$$

oder:

$$\cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = -45^0$ d. h. $\alpha = 180^0 - 45^0$

oder:

A). . . . $\alpha = \mathbf{135^0}$

In gleicher Weise findet man für:

$$\cos\beta = \frac{P^2 - P_1^2 - P_2^2}{2P_1P_2}$$

oder:

$$\cos\beta = \frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2-4}{2\sqrt{6}.2}$$

oder nach Hilfsrechnung 2:

$$\cos\beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

woraus sich für den Winkel

B). $\beta = 180^0 - 75^0$

oder:

$$\beta = \mathbf{105^0}$$

ergibt.

Endlich ist:

$$\cos\gamma = \frac{P_1^2 - P^2 - P_2^2}{2PP_2}$$

oder die entsprechenden Werte eingesetzt:

$$\cos\gamma = \frac{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}+1)^2-4}{2(\sqrt{3}+1)2}$$

hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung 3:

$$\cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

oder nach Erkl. 32:

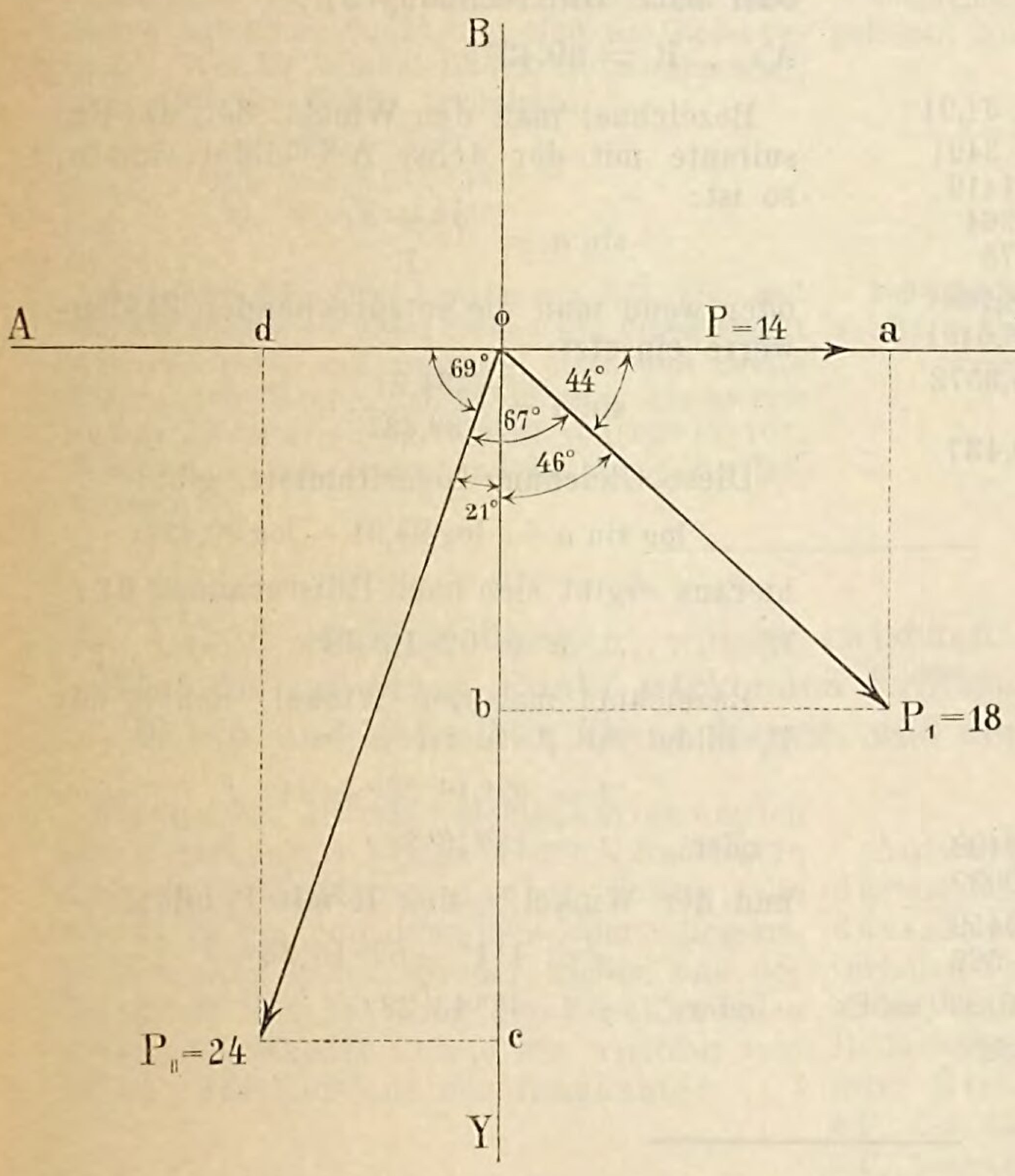
$$\cos\gamma = -60^0$$

und demnach:

C). $\gamma = \mathbf{120^0}$

Aufgabe 63. Drei Kräfte $P = 14$, $P_1 = 18$, $P_2 = 24$ kg wirken in einer Ebene auf einen Punkt 0; die erste und zweite unter einem Winkel von 44°, die zweite und dritte unter einem Winkel von 67°. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante?

Figur 45.



Hilfsrechnungen:

1). . . . $\log 18 = 1{,}2552725$
$\log \cos 44^0 = 9{,}8569341 - 10$
$\log \overline{oa} = 1{,}1122066$
2027
39

mithin:
num-log $\overline{oa}$ oder $\overline{oa} = 12{,}948$

2). . . . $\log 18 = 1{,}2552725$
$\log \cos 46^0 = 9{,}8417713 - 10$
$\log \overline{ob} = 1{,}0970438$

mithin:
num-log $\overline{ob}$ oder $\overline{ob} = 12{,}504$

Auflösung. Man denke sich durch die Richtung der Kraft P die Achse AX und rechtwinklig zu derselben durch den Angriffspunkt *o* die Achse BY (siehe Figur 45). Aus den gegebenen beiden Winkeln lässt sich leicht die Grösse der neu entstandenen Winkel berechnen. Zerlegt man nun jede der beiden Kräfte P_1 und P_2 in zwei zueinander rechtwinklige Komponenten, welche in die Richtung von AX und BY fallen, so ist:

$$\frac{\overline{oa}}{P_1} = \cos 44^0$$

$$\frac{\overline{ob}}{P_1} = \cos 46^0$$

$$\frac{\overline{oc}}{P_2} = \cos 21^0$$

$$\frac{\overline{od}}{P_2} = \cos 69^0$$

Hieraus erhält man für:

$$\overline{oa} = P_1 . \cos 44^0$$
$$\overline{ob} = P_1 . \cos 46^0$$
$$\overline{oc} = P_2 . \cos 21^0$$
$$\overline{od} = P_2 . \cos 69^0$$

Setzen wir die für die Kräfte gegebenen Werte ein, so ist:

$$\overline{oa} = 18 . \cos 44^0$$
$$\overline{ob} = 18 . \cos 46^0$$
$$\overline{oc} = 24 . \cos 21^0$$
$$\overline{od} = 24 . \cos 69^0$$

und wir erhalten nach den Hilfsrechnungen 1—4:

$$\overline{oa} = 12{,}948$$
$$\overline{ob} = 12{,}504$$
$$\overline{oc} = 22{,}406$$
$$\overline{od} = 8{,}6$$

In der Richtung der AX-Achse wirken nun die Kräfte

$$P + \overline{oa} - \overline{od} = 14 + 12{,}948 - 8{,}6$$

bezeichnen wir diese Summe mit x, so ist:

$$x = 18{,}348$$

In der Richtung der BY-Achse wirken die Komponenten:

$$\overline{ob} + \overline{oc} = 12{,}504 + 22{,}406$$

od. wenn wir diese Summe mit y bezeichnen:

$$y = 34{,}91$$

Hilfsrechnungen:

3). . . . $\log 24 = 1,3802112$
$\log \cos 21^0 = 9,9705157$

$\log \overline{oc} = 1,3503629$

mithin:

num-log $\overline{oc}$ oder $\overline{oc} = 22,406$

4). . . . $\log 24 = 1,3802112$
$\log \cos 69^0 = 9,5543292$

$\log \overline{od} = 0,9345404$
5388

mithin:

num-log $\overline{od}$ oder $\overline{od} = 8,6008$

5). 18,348 . 18,348
146784
73392
55044
146784
18348
336,649104

34,91 . 34,91
3491
31419
13964
10473
1218,7081
+ 336,6491
1555,3572

$\sqrt{15|55,|35|72} = 39,437$
9
6 | 655
621
78 | 3435
3136
788 | 29972
23649
7886 | 632300

6). . . $\log 34,91 = 1,5429498$
$- \log 39,437 = -1,5959039$
$\log \sin \alpha = 9,9470459$
369
110 | 900 = 8″

mithin ist:
num-log sin α oder $\alpha = 62^0\,16'\,38''$

Die Resultante dieser unter rechtem Winkel aufeinander wirkenden Komponenten ist aber wieder:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

d. h.:

$$R = \sqrt{18,348^2 + 34,91^2}$$

oder:

$$R = \sqrt{336,6491 + 1218,7081}$$

oder:

$$R = \sqrt{1555,3572}$$

oder nach Hilfsrechnung 5).:

A). . **R = 39,437**

Bezeichnet man den Winkel, den die Resultante mit der Achse AX bildet, mit α, so ist:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{ob} + \overline{oc}}{R}$$

oder wenn man die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt:

$$\sin \alpha = \frac{34,91}{39,437}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log \sin \alpha = \log 34,91 - \log 39,437$$

hieraus ergibt sich nach Hilfsrechnung 6).:

B). $\alpha =$ **62⁰ 16′ 38″**

Bezeichnet man den Winkel, den R mit P_1 bildet mit β, so ist:

$$\beta = 62^0\,16'\,38'' - 44^0$$

oder: $\beta = 18^0\,16'\,38''$

und der Winkel γ, den R mit P bildet·

$$\gamma = 111^0 - 62^0\,16'\,38''$$

oder: $\gamma = 48^0\,43'\,22''$

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Von drei Kräften P, P_1 und P_2, die in einer Ebene liegen und auf einen Punkt wirken, bildet P mit P_2 einen rechten Winkel. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante, wenn:

a). . . $P = 16$, $P_1 = 20$, $P_2 = 24$ kg und $\measuredangle PP_1 = 60^0$

b). . . $P = 26,8$, $P_1 = 37,9$, $P_2 = 46,76$ kg und $\measuredangle PP_1 = 31^0\,12'\,20''$

c). . . $P = 8$, $P_1 = 10$, $P_2 = 12$ kg und $\measuredangle PP_1 = 40^0$.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 59.

Aufgabe 65. Vier Kräfte P, P_1, P_2 und P_3 wirken in einer Ebene auf einen Punkt und zwar P und P_2 sowie P_1 und P_3 unter rechten Winkeln zueinander. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante, wenn:

a). $P = 3$, $P_1 = 4$, $P_2 = 5$, $P_3 = 6$ kg und $\sphericalangle PP_1 = 30^0$

b). $P = 8$, $P_1 = 10$, $P_2 = 12$, $P_3 = 14$ kg und $\sphericalangle PP_1 = 60^0$

c). $P = 4$, $P_1 = 7$, $P_2 = 9$, $P_3 = 12$ kg und $\sphericalangle PP_1 = 50^0$.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 60.

Aufgabe 66. Drei Kräfte wirken in einer Ebene auf einen Punkt und sind im Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie miteinander, wenn sich die Kräfte verhalten:

a). wie 4 : 6 : 8;
b). wie 8 : 12 : 14;
c). wie 7 : 9 : 11?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 62.

Aufgabe 67. Drei Kräfte von 274, 369 und 396 kg wirken in einer Ebene auf einen Punkt eines Körpers, und zwar die erste und zweite unter einem Winkel von $54^0\,26'\,20''$, die zweite und dritte unter einem Winkel von $62^0\,17'\,10''$. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 63.

f). Ueber die Beziehungen, welche zwischen mehreren unter beliebigen Winkeln auf einen Punkt wirkenden Kräften, deren Richtungen nicht in ein und derselben Ebene liegen, und deren Resultante bestehen.

Frage 16. Mittels welchen Satzes werden die Beziehungen zwischen den Intensitäten und den Richtungen dreier Kräfte, die nicht in ein und derselben Ebene liegend, rechtwinklig gegeneinander wirken und der Intensität und Richtung der Resultierenden derselben ausgedrückt und wie ermittelt man Grösse und Richtung der Resultante?

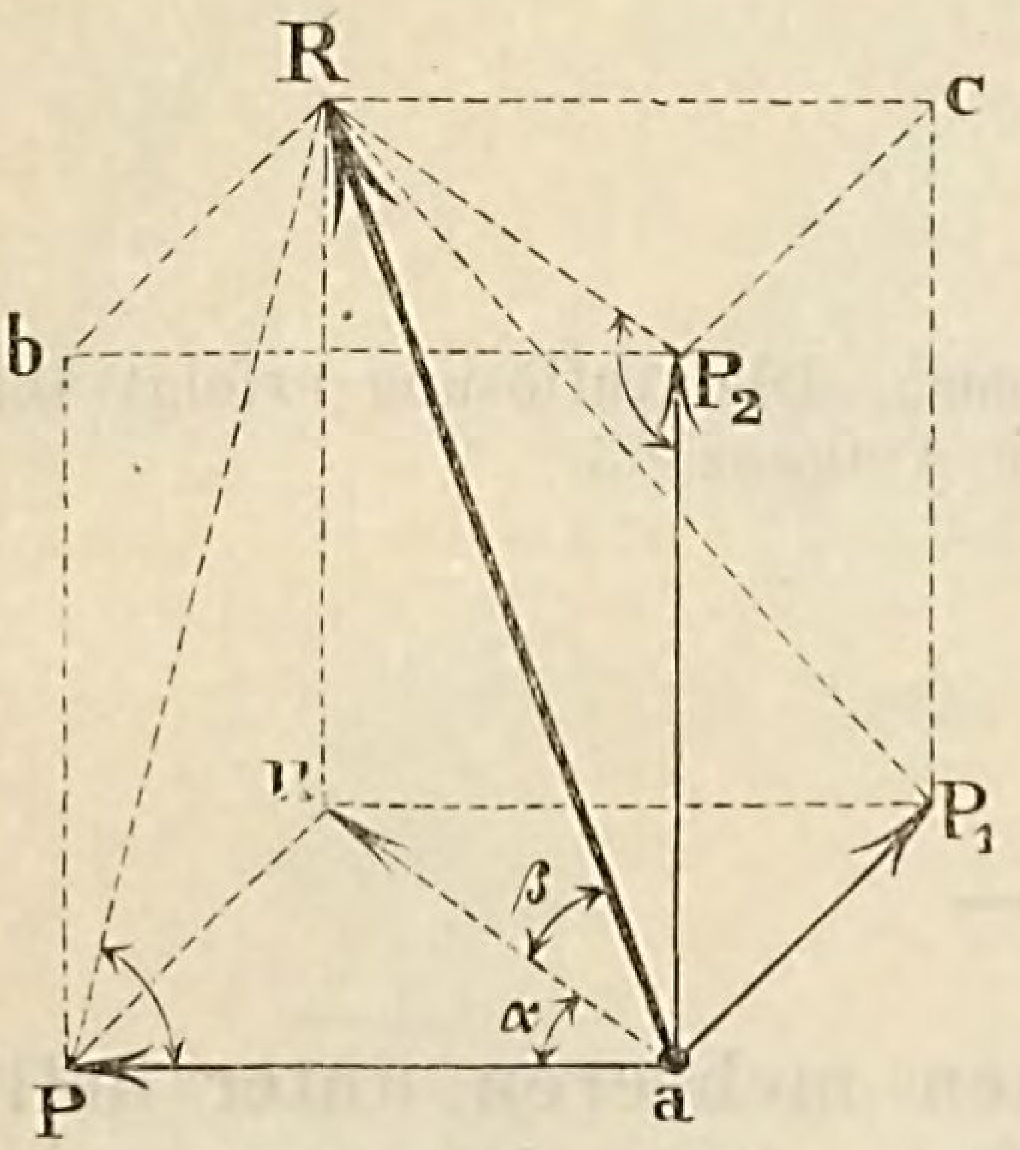
Antwort. Wirken drei Kräfte P, P_1, P_2, deren Richtungen nicht in ein und derselben Ebene liegen, an einem materiellen Punkt a rechtwinklig gegeneinander, siehe Figur 46, so ist die Resultante R derselben, sowohl ihrer Grösse als auch ihrer Richtung nach durch die Diagonale aR des über den drei Strecken aP, $a\mathrm{P}_1$, $a\mathrm{P}_2$ konstruiert gedachten rechteckigen Parallelepipedons $\mathrm{P}a\mathrm{P}_1 u\mathrm{R}b\mathrm{P}_2 c$ bestimmt[1]). Gleichwie man von einem Kräfteparallelogramm spricht, kann man somit auch von einem Kräfteparallelepipedon sprechen.

Die Grösse der Resultante R, Fig. 46, findet man nach dem pythagor. Lehrsatz wie folgt:

Die Mittelkraft u der rechtwinklig zueinander wirkenden Kräfte P und P_1 ist sowohl ihrer Grösse als Richtung nach durch die Diagonale au des Rechtecks $\mathrm{P}a\mathrm{P}_1 u$ bestimmt,

[1]) Siehe in Kleyers Lehrbuch der Stereometrie den Abschnitt: Das Prisma.

Figur 46.



(das über den Strecken aP und aP_1 konstruiert gedachte ‖gr. ist ein **Rechteck**, da $\measuredangle PaP_1 = 90^0$ ist)

mithin hat man nach der Formel $R^2 = P^2 + Q^2$ für die Mittelkraft u der Komponenten P und P_1 die Gleichung:

1). . . . $u^2 = P^2 + P_1{}^2$

Ferner ist die Mittelkraft R der Kraft P_2 und der soeben gefundenen Mittelkraft u sowohl ihrer Grösse als Richtung nach durch die Diagonale aR des Rechtecks uaP_2R bestimmt,

(das über den Strecken au und aP_2 konstruiert gedachte ‖gr. ist ein **Rechteck**, weil der Winkel $P_2au = 90^0$ ist, denn P_2a steht senkrecht auf den Strecken aP und aP_1, folglich auch senkrecht auf der Ebene PaP_1u, somit auch senkrecht auf au)

mithin hat man nach Erkl. 26 für die gesuchte Resultante R der Kräfte u und P_2, bezw. der Kräfte P, P_1, P_2, die Gleichung:

2). . . . $R^2 = u^2 + P_2{}^2$

Hieraus und in Rücksicht der Gleich. 1). erhält man:

I. . . $R = \sqrt{P^2 + P_1{}^2 + P_2{}^2}$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck auR und in Rücksicht, dass $uR = aP_2 = P_2$ ist, erhält man für den Winkel β, welchen die Resultante R mit der Resultante u, bezw. mit ihrer Projektion auf die Ebene PaP_1u bildet, die Gleichung:

II. . $\operatorname{tg}\beta = \frac{P_2}{u} \left(= \frac{uR}{au} = \frac{aP_2}{au} = \frac{P_2}{u}\right)$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck aPu und in Rücksicht, dass $Pu = aP_1 = P_1$ ist, erhält man für den Winkel α, welchen die Resultante u der Kräfte P und P_1, bezw. welchen die Projektion der Resultante R mit der Richtung der Kraft P bildet, die Gleichung:

III. . $\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1}{P} \left(= \frac{Pu}{aP} = \frac{aP_1}{aP} = \frac{P_1}{P}\right)$

Die Winkel endlich, welche die Resultante R mit den Kräften P, P_1 und P_2 bildet und der Reihe nach mit γ, γ_1 und γ_2 bezeichnet sein sollen, findet man aus den rechtwinkligen Dreiecken aPR, aP_1R und aP_2R, bezüglich mittels der Gleichungen:

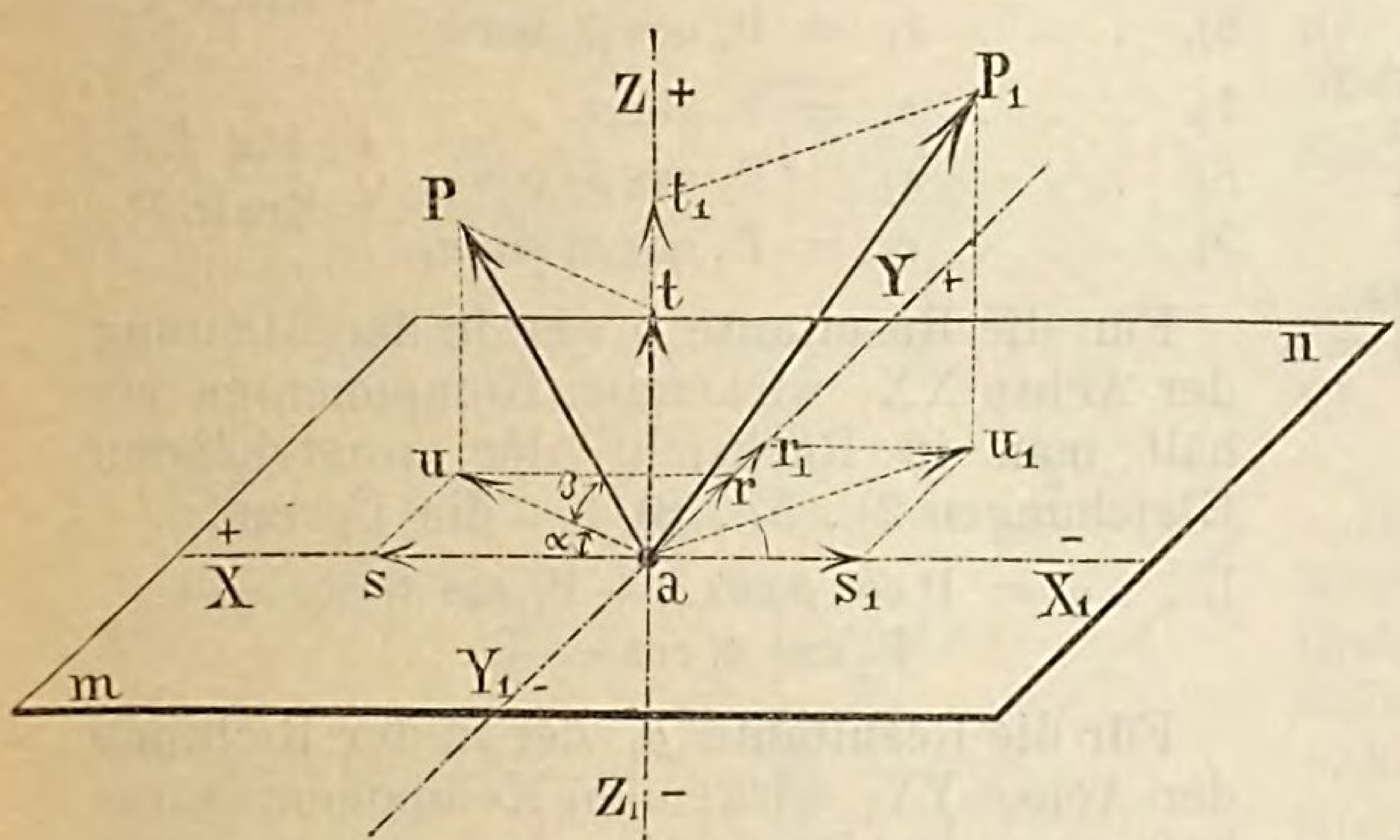
IV. . . $\cos PaR = \cos\gamma = \frac{P}{R}$

V. . . $\cos P_1aR = \cos\gamma_1 = \frac{P_1}{R}$

VI. . . $\cos P_2aR = \cos\gamma_2 = \frac{P_2}{R}$

Frage 17. Welche Beziehungen bestehen zwischen drei oder mehreren Kräften, deren Richtungen beliebige Lagen im Raum einnehmen und der Grösse und Richtung der Resultierenden derselben?

Figur 47.



Antwort. Wirken an einem materiellen Punkt a, siehe Figur 47, drei oder mehrere Kräfte P, P_1, P_2, deren Richtungen beliebige Lagen im Raum einnehmen, welche also nicht in ein und derselben Ebene liegen, so findet man die Resultante R derselben, wie folgt:

Man denke sich durch den Angriffspunkt a die drei zueinander senkrechten Geraden XX_1, YY_1 und ZZ_1, welche die Achsen eines sogenannten rechtwinkligen Raumkoordinatensystems bilden, gezogen und durch zwei derselben, z. B. durch XX_1 und YY_1 eine Ebene mn gelegt.

Dann denke man sich z. B. die Kraft P mittels der von P auf die Ebene mn und auf die Achse ZZ_1 gefällten Senkrechten Pu und Pt (wodurch das Rechteck $atPu$ entsteht) in die beiden rechtwinklig zu einander wirkenden Komponenten t ($= at$) und u ($= au$) zerlegt. Die Grössen dieser beiden Komponenten t und u findet man, wenn man den Winkel, welchen die Richtung der Kraft P mit der Richtung der Kraft u, bezw. mit der Ebene mn bildet, mit β bezeichnet, mittels der Relationen:

$$\cos\beta = \frac{au}{aP} = \frac{u}{P}$$

$$\sin\beta = \frac{uP}{aP} = \frac{at}{aP} = \frac{t}{P}$$

denn aus diesen Gleichungen ergibt sich:

a). $u = P . \cos\beta$

1). $t = P . \sin\beta$

Ferner denke man sich die in der Ebene mn liegende Komponente u ($= au$) mittels der von u auf die Achsen XX_1 und YY_1 gefällten Senkrechten us und ur (wodurch das Rechteck $arus$ entsteht) in die weiteren rechtwinklig zueinander wirkenden Komponenten s und r zerlegt. Die Grössen dieser beiden Komponenten s und r findet man, wenn man den Winkel, welchen die Richtung der zerlegten Kraft u mit der positiven Richtung aX der Achse XX_1 bildet, mit α bezeichnet, mittels der Relationen:

$$\cos\alpha = \frac{as}{au} = \frac{s}{u}$$

$$\sin\alpha = \frac{su}{au} = \frac{ar}{au} = \frac{r}{u}$$

denn aus diesen Gleichungen ergibt sich:

b). $s = u . \cos\alpha$

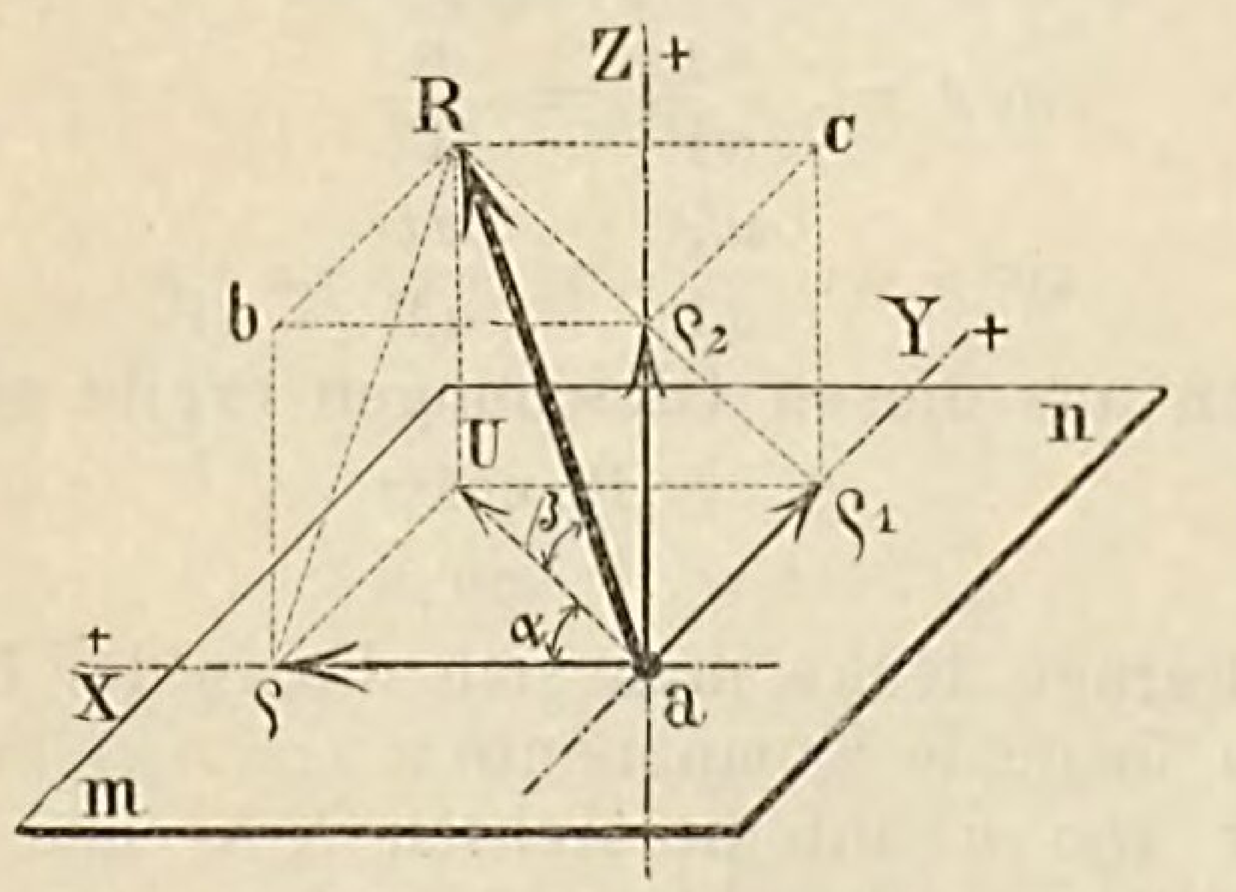
c). $r = u . \sin\alpha$

Erkl. 67. Da zur Bezeichnung der Winkel und anderer Grössen häufig Buchstaben des griechischen Alphabets Anwendung finden, so dürfte es manchem Lernenden erwünscht sein, dasselbe hier verzeichnet zu finden:

Das griechische Alphabet.

Α, α (Alpha) = a	Ξ, ξ (Xi) = x
Β, β (Beta) = b	Ο, ο (Omikron, das kleine, kurze *o*) = ŏ
Γ, γ (Gamma) = g	Π, π (Pi) = p
Δ, δ (Delta) = d	Ρ, ρ (Rho) = r
Ε, ε (Epsilon, das dünne, kurze *e*) = ĕ	Σ, σ (so im Anlaut, im Auslaut ς Sigma) = s
Ζ, ζ (Zeta) = z	Τ, τ (Tau) = t
Η, η (Eta od. Ita) = ē oder ī	Υ, υ (Ypsilon) = y
Θ, ϑ (Theta) = th	Φ, φ (Phi) = ph
Ι, ι (Jota) = i	Χ, χ (Chi) = ch
Κ, κ (Kappa) = k	Ψ, ψ (Psi) = ps
Λ, λ (Lambda) = l	Ω, ω (Omega, das grosse, lange o) = ō
Μ, μ (My) = m	
Ν, ν (Ny) = n	

Figur 48.



Setzt man in diese Gleichungen den Wert für u aus der Gleichung a). ein, so erhält man:

2). $s = P . \cos\beta . \cos\alpha$

3). $r = P . \cos\beta . \sin\alpha$

Denkt man sich schliesslich die übrigen Kräfte P_1, P_2 ..., siehe Figur 47, in derselben Weise je in drei Komponenten: t_1, s_1, r_1 und t_2, s_2, r_2 ... zerlegt, deren Richtungen mit den Richtungen der zueinander rechtwinkligen Achsen zusammenfallen, so erhält man die mit den Gleichungen 1)., 2). und 3). korrespondierenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} &4).\ \ldots\ t_1 = P_1 \sin\beta_1 \\ &5).\ \ldots\ s_1 = P_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1 \\ &6).\ \ldots\ r_1 = P_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1 \end{aligned}\right\} \text{für die Kraft } P_1$$

$$\left.\begin{aligned} &7).\ \ldots\ t_2 = P_2 \sin\beta_2 \\ &8).\ \ldots\ s_2 = P_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_2 \\ &9).\ \ldots\ r_2 = P_2 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 \end{aligned}\right\} \text{für die Kraft } P_2$$

Für die Resultante ϱ der in der Richtung der Achse XX_1 wirkenden Komponenten erhält man in Rücksicht der vorstehenden Gleichungen 2)., 5)., 8). ... die Formel:

$$\text{I.} \ldots \varrho = P \cos\beta \cos\alpha + P_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_2 + \ldots$$

Für die Resultante ϱ_1 der in der Richtung der Achse YY_1 wirkenden Komponenten erhält man in Rücksicht der vorstehenden Gleichungen 3)., 6)., 9). ... die Formel:

$$\text{II.} \ldots \varrho_1 = P \cos\beta \sin\alpha + P_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 + \ldots$$

Für die Resultante ϱ_2 der in der Richtung der Achse ZZ_1 wirkenden Komponenten erhält man in Rücksicht der vorstehenden Gleichungen 1)., 4)., 7). ..., die Formel:

$$\text{III.} \ldots\ldots \varrho_2 = P . \sin\beta + P_1 \sin\beta_1 + P_2 . \sin\beta_2 + \ldots$$

Da man hiernach für die Kräfte P, P_1, P_2 ... die drei rechtwinklig zueinander wirkenden Kräfte ϱ, ϱ_1 und ϱ_2 gesetzt denken kann, so wird die Resultante R derselben, analog wie in der Figur 46, durch die Diagonale eines rechteckigen Parallelepipedons, Figur 48, dargestellt, folglich hat man (nach der Formel I in Antwort auf Frage 16) zur Berechnung der Resultante R der Kräfte P, P_1, P_2 ..., die Formel:

$$\text{IV.} \ldots\ldots R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2}$$

Zur Berechnung des Winkels β, welchen die Resultante R mit ihrer Projektion aU, bezw. mit der Ebene mn bildet, besteht in dem rechtwinkl. Dreieck aUR, die Relation:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{UR}{aU}$$

oder:

V. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1{}^2}}$

da: $UR = a\varrho_2 = \varrho_2$ und da ferner in dem rechtwinkligen Dreieck $a\varrho U$:

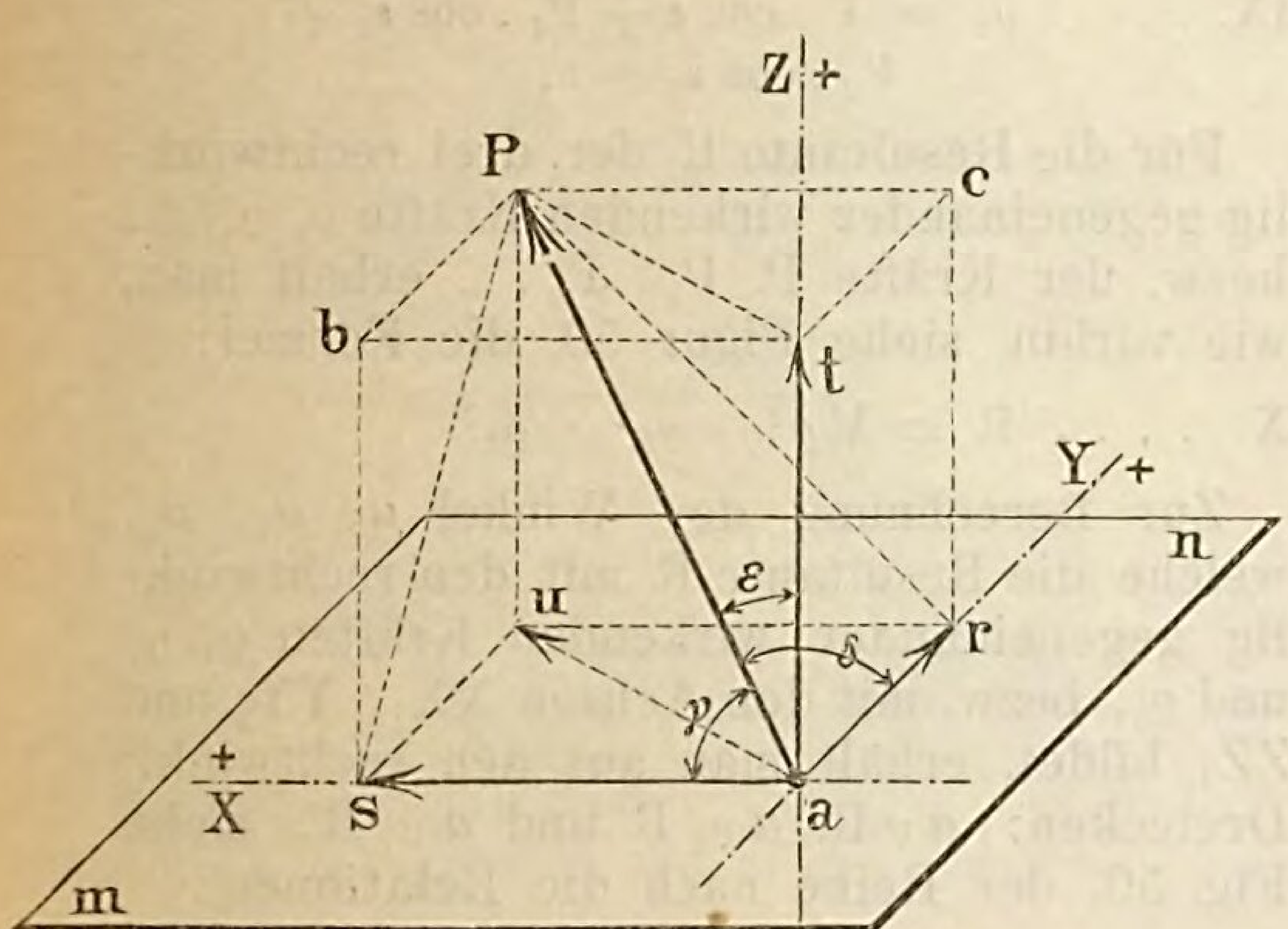
$$\overline{aU}^2 = \overline{a\varrho}^2 + \overline{\varrho U}^2$$

oder: $\overline{aU}^2 = \overline{a\varrho}^2 + \overline{a\varrho_1}^2$

$$\overline{aU}^2 = \varrho^2 + \varrho_1{}^2$$

mithin: $\overline{aU} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1{}^2}$ ist.

Figur 49.



Zur Berechnung des Winkels α, welchen die Projektion aU der Resultante aR mit der positiven Richtung aX der Achse XX_1 bildet, besteht in dem rechtwinkligen Dreieck $a\varrho U$, die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varrho U}{a\varrho} = \frac{a\varrho_1}{a\varrho}$$

oder:

VI. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varrho_1}{\varrho}$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Kräfte P, P_1, P_2 . . . mit der positiven Richtung aX der Achse XX_1 bilden, der Reihe nach mit γ, γ_1, γ_2 . . .; die Winkel, welche diese Kräfte mit der positiven Richtung aY der Achse YY_1 bilden, der Reihe nach mit δ, δ_1, δ_2 . . . und endlich die Winkel, welche die Kräfte mit der positiven Richtung aZ der Achse ZZ_1 bilden, der Reihe nach mit ε, ε_1, ε_2 . . . und will man bei der Berechnung der Resultante R etc. diese Winkel in Betracht ziehen, so denke man sich, z. B. die Kraft P, siehe Fig. 49, mittels des rechteckigen Kräfteparallelepipedons *arusbtcP* in die drei Komponenten s, r und t zerlegt, deren Richtungen mit den Richtungen der Achsen zusammenfallen.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken Psa, Pra und Pta, erhält man der Reihe nach:

1). . $s = P \cdot \cos\gamma$, denn: $\cos\gamma = \frac{as}{aP} = \frac{s}{P}$

2). . $r = P \cdot \cos\delta$, „ $\cos\delta = \frac{ar}{aP} = \frac{r}{P}$

3). . $t = P \cdot \cos\varepsilon$, „ $\cos\varepsilon = \frac{at}{aP} = \frac{t}{P}$

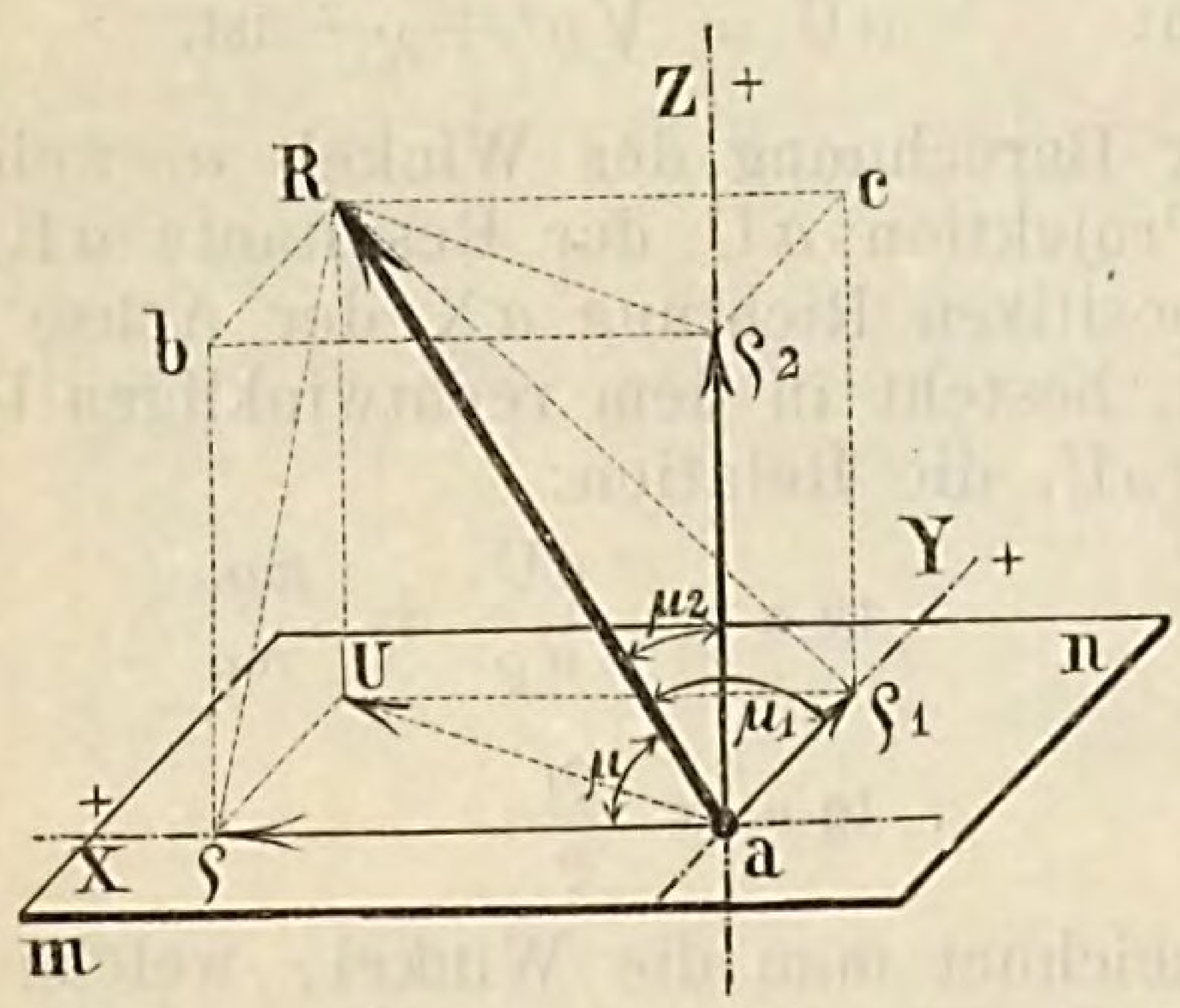
Analog erhält man für die Komponenten der weiteren gedachten und in derselben Weise zerlegten Kräfte P_1, P_2 . . .:

4). $s_1 = P_1 \cdot \cos\gamma_1$; 5). $r_1 = P_1 \cdot \cos\delta_1$

6). $t_1 = P_1 \cdot \cos\varepsilon_1$; 7). $s_2 = P_2 \cdot \cos\gamma_2$

8). $r_2 = P_2 \cdot \cos\delta_2$; 9). $t_2 = P_2 \cdot \cos\varepsilon_2$ u. s. f.

Figur 50.



Für die Resultante ϱ der in der Richtung der Achse XX_1 wirkenden Komponenten s, s_1, $s_2 \ldots$ erhält man in Rücksicht der vorstehenden Gleichungen 1)., 4). und 7)., die Formel:

VII. . . . $\varrho = P \cdot \cos\gamma + P_1 \cdot \cos\gamma_1 + P_2 \cdot \cos\gamma_2 + \ldots$

Ebenso erhält man für die Resultanten ϱ_1 und ϱ_2 der in den Richtungen der Achsen YY_1 und ZZ_1 wirkenden Komponenten r, r_1, $r_2 \ldots$ und t, t_1, $t_2 \ldots$ aus den vorstehenden Gleichungen 2)., 5)., 8). und 3)., 6). und 9)., die Formeln:

VIII. . . . $\varrho_1 = P \cdot \cos\delta + P_1 \cdot \cos\delta_1 + P_2 \cdot \cos\delta_2 + \ldots$

IX. $\varrho_2 = P \cdot \cos\varepsilon + P_1 \cdot \cos\varepsilon_1 + P_2 \cdot \cos\varepsilon_2 + \ldots$

Für die Resultante R der drei rechtwinklig gegeneinander wirkenden Kräfte ϱ, ϱ_1, ϱ_2, bezw. der Kräfte P, P_1, $P_2 \ldots$ erhält man, wie vorhin, siehe Figur 50, die Formel:

X. $R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2}$

Zur Berechnung der Winkel μ, μ_1, μ_2, welche die Resultante R mit den rechtwinklig gegeneinander wirkenden Kräften ϱ, ϱ_1 und ϱ_2, bezw. mit den Achsen XX_1, YY_1 und ZZ_1 bildet, erhält man aus den rechtwinkl. Dreiecken: $a\varrho R$, $a\varrho_1 R$ und $a\varrho_2 R$, siehe Fig. 50, der Reihe nach die Relationen:

XI. $\cos\mu = \frac{a\varrho}{aR} = \frac{\varrho}{R}$

XII. . . . $\cos\mu_1 = \frac{a\varrho_1}{aR} = \frac{\varrho_1}{R}$

XIII. . . . $\cos\mu_2 = \frac{a\varrho_2}{aR} = \frac{\varrho_2}{R}$

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 68. Drei nicht in ein und derselben Ebene liegende Kräfte, welche rechtwinklig gegen einander wirken, sollen durch eine einzige Kraft R ersetzt werden. Welches ist die Grösse und Richtung der letzteren, wenn die drei gegebenen Kräfte $P = 5$, $P_1 = 4$ und $P_2 = 7$ kg sind?

Auflösung. Nach der Gleichung I. in Antwort auf Frage 16 ist die Resultante R:

$$R = \sqrt{5^2 + 4^2 + 7^2}$$

oder:

A). . . $R = 9{,}4868$ (siehe Hilfsrechn. 1)

Ferner ist nach Gleichung II in Antwort auf Frage 16:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_2}{u} \quad \text{(siehe Fig. 46)}$$

oder da

Hilfsrechnungen.

1). . . $5 \cdot 5 = 25$
$4 \cdot 4 = 16$
$7 \cdot 7 = 49$
$\sqrt{90} = 9{,}4868$

```
  81
  18 : 900
        736
  188 : 16400
        15104
  1896 : 129600
         113796
  18972 : 1580400
          1517824
```

2). . . $u = \sqrt{25 + 16}$
oder: $u = \sqrt{41} = 6{,}4031$

```
  36
  12 : 500
       496
  1280 : 40000
         38409
  12806 : 159100
```

3). $\log 7 = 0{,}8450980$
$-\log 6{,}4031 = -0{,}8063903$
$\log \operatorname{tg} \beta = 0{,}0387077$
mithin:
$\beta = 47^0\, 33'$

4). $\log 4 = 0{,}6020600$
$-\log 5 = -0{,}6989700$
$\log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}9030900 - 10$
mithin:
$\alpha = 38^0\, 39'\, 35''$

5). $\log 5 = 0{,}6989700$
$-\log 9{,}4868 = 0{,}9771197$
$\log \cos \gamma = 9{,}7218503 - 10$
mithin:
$\gamma = 58^0\, 11'\, 40''$

6). $\log 4 = 0{,}6020600$
$-\log 9{,}4868 = -0{,}9771197$
$\log \cos \gamma_1 = 9{,}6249403 - 10$
mithin:
$\gamma_1 = 65^0\, 3'\, 40''$

7). $\log 7 = 0{,}8450980$
$-\log 9{,}4868 = -0{,}9771197$
$\log \cos \gamma_2 = 9{,}8679783$
mithin:
$\gamma_2 = 42^0\, 27'$

$u = \sqrt{P^2 + P_1{}^2} = 6{,}4031$ (s. Hilfsrechn. 2)
so ist:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{6{,}4031}$$

hieraus erhält man für den Winkel β:

B). $\beta = 47^0\, 33'$ (siehe Hilfsrechn. 3)

Nach Gleichung III in Antwort auf Frage 16 ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{P}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$$

hieraus erhält man für den Winkel α:

C). $\alpha = 38^0\, 39'\, 35''$ (s. Hilfsrechn. 4)

Bezeichnet man den Winkel, den R mit P bildet, als Winkel γ, so ist nach Gleich. IV in Antwort auf Frage 16:

$$\cos \gamma = \frac{P}{R}$$

oder:

$$\cos \gamma = \frac{5}{9{,}4868}$$

woraus man den Winkel γ erhält:

D). $\gamma = 58^0\, 11'\, 40''$ (s. Hilfsrechn. 5)

Bezeichnet man den Winkel, den die Resultante R mit der Kraft P_1 bildet, als Winkel γ_1, so ist nach Gleichung V in Antwort auf Frage 16:

$$\cos \gamma_1 = \frac{P_1}{R}$$

oder:

$$\cos \gamma_1 = \frac{4}{9{,}4868}$$

hieraus erhält man für den Winkel γ_1:

E). $\gamma_1 = 65^0\, 3'\, 40''$ (s. Hilfsrechn. 6)

Bezeichnet man den Winkel, den die Resultante R mit der dritten Kraft P_2 bildet, als Winkel γ_2, so ist nach Gleich. VI in Antwort auf Frage 16:

$$\cos \gamma_2 = \frac{P_2}{R}$$

oder:

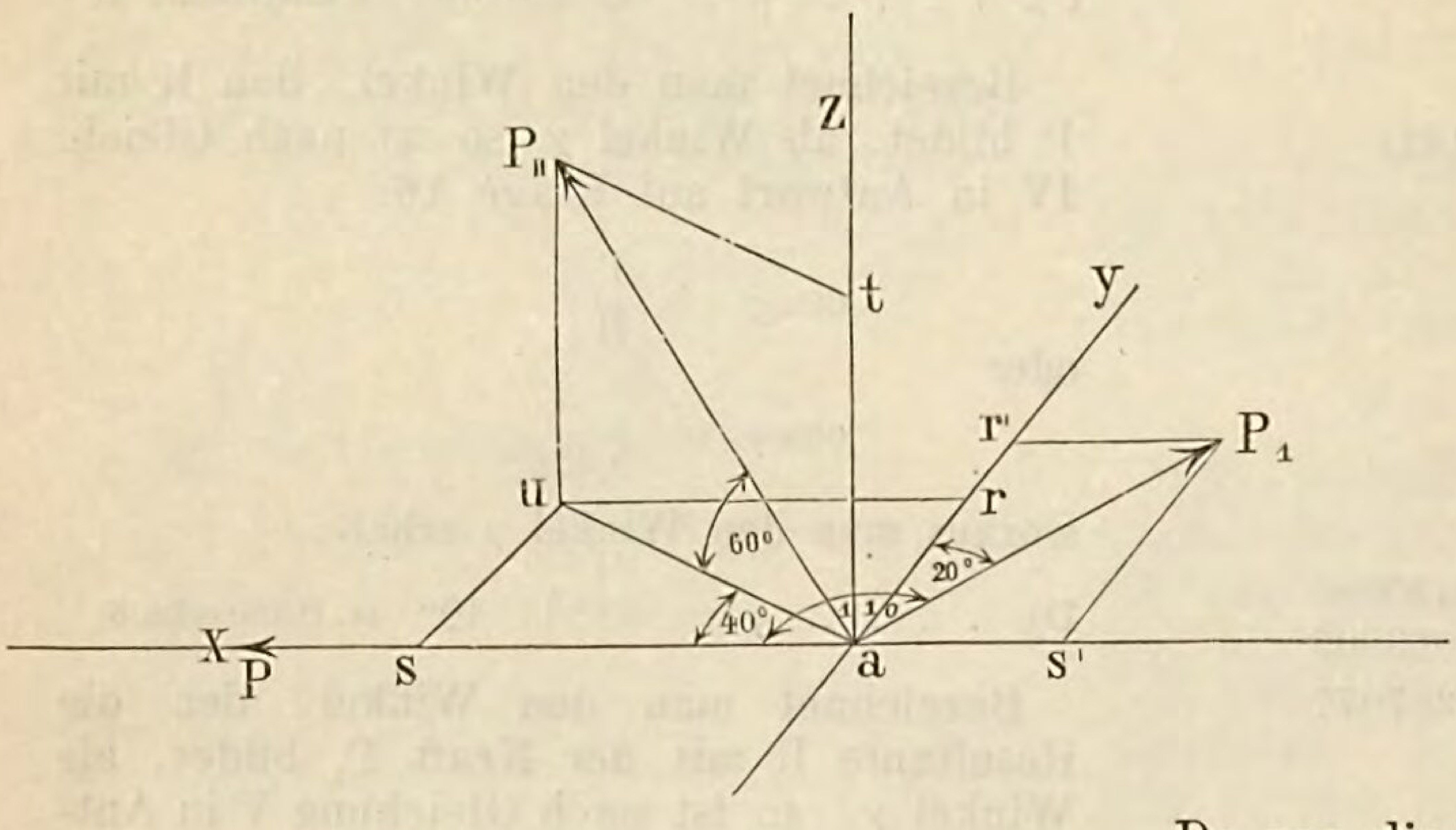
$$\cos \gamma_2 = \frac{7}{9{,}4868}$$

hieraus erhält man für den Winkel γ_2:

F). $\gamma_2 = 42^0\, 27'$ (s. Hilfsrechn. 7)

Aufgabe 69. Drei Kräfte P, P_1, und P_2 wirken auf einen Punkt eines Körpers. P und P_1 liegen in einer Ebene und bilden einen Winkel α von 110°. Der Neigungswinkel β der Kraft P_2 mit der Ebene der Kräfte P und P_1 beträgt 60°, während der Winkel γ, den die Projektion der Kraft P_2 auf genannte Ebene mit der Kraft P bildet, = 40° ist. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultierenden, wenn P = 9, P_1 = 8 und P_2 = 14 kg ist?

Figur 51.



Auflösung. Nach Antwort auf Frage 17 denke man sich durch den Angriffspunkt a drei zu einander senkrechte Achsen $\overline{ax}$ $\overline{ay}$ und $\overline{az}$ so gezogen, dass die Kraft P ihrer Richtung nach mit der Achse $\overline{ax}$ zusammenfällt; alsdann bleibt nur noch übrig, die beiden Kräfte P_1 und P_2 in je drei Seitenkräfte zu zerlegen, deren Richtungen in die Achsen $\overline{ax}$, $\overline{ay}$ und $\overline{az}$ fallen, also rechtwinklig zu einander wirken.

Da die Kraft P_1 mit P in ein und derselben Ebene liegt, durch welche wir uns auch die Achse $\overline{ax}$ und $\overline{ay}$ gelegt denken können, so wird die in der Richtung $\overline{az}$ wirkende Seitenkraft von $P_1 = 0$ sein, und es bleibt somit nur noch übrig, die Kraft P_1 in zwei zu einander rechtwinklig wirkende Seitenkräfte zu zerlegen, deren eine $\overline{ar^1} = r^1$ in der Richtung $\overline{ay}$, und deren andere $\overline{as^1} = s^1$ in der Richtung $\overline{ax}$ wirkt (siehe Figur 51).

Da nun die beiden Kräfte P und P_1 einen Winkel von 110° einschliessen, während der von $\overline{ax}$ und $\overline{ay}$ gebildete Winkel 90° beträgt, so bleibt für den Winkel, den die Kraft P_1 mit $\overline{ay}$ bildet = 110 — 90 = 20° übrig. Es ist nun im Dreieck $a\,r^1P_1$:

$$\cos 20^0 = \frac{\overline{a r^1}}{a P_1}$$

oder:

$$\cos 20^0 = \frac{r^1}{P_1}$$

oder: $r^1 = \cos 20^0 . P_1$

oder: $r^1 = \cos 20^0 . 8$

woraus man nach Hilfsrechnung 1).:

A). . . . $r^1 = 7{,}5175$ erhält.

Ferner ist:

$$\sin 20^0 = \frac{\overline{a s^1}}{a P_1}$$

oder:

$$\sin 20^0 = \frac{s^1}{P_1}$$

oder: $s^1 = P_1 . \sin 20^0$

oder: $s^1 = 8 . \sin 20^0$

woraus man nach Hilfsrechnung 2:

B). $s^1 = 2{,}7362$ erhält.

Hilfsrechnungen.

1). $\log 8 = 0{,}9030900$
$+ \log\cos 20^0 = +9{,}9729858-10$
$\log r^1 = 0{,}8760758$

mithin:
$r^1 = 7{,}5175$

2). $\log 8 = 9{,}9030900$
$+ \log\sin 20^0 = +9{,}5340517-10$
$\log s^1 = 0{,}4371417$

mithin:
$s^1 = 2{,}7362$

Hilfsrechnungen:

3). . . . $\log 14 = 1{,}1461280$
$+ \log \sin 60^0 = 9{,}9375306-10$
$\log t = 1{,}0836586$

mithin:
$t = 12{,}124$

4). . . $\log \cos 60^0 = 9{,}6989700-10$
$+ \log \cos 40^0 = 9{,}8842540-10$
$+ \log 14 = 1{,}1461280$
$\log s = 0{,}7293520$

mithin:
$s = 5{,}3623$

5). . . $\log \cos 60^0 = 9{,}6989700-10$
$+ \log \sin 40^0 = 9{,}8080675-10$
$+ \log 14 = 1{,}1461280$
$\log r = 0{,}6531655$

mithin:
$r = 4{,}4995$

6). . . . 11,6261 . 11,6261

11,6261
697566
232522
697566
116261
116261

135,16620121

12,017 . 12,017

84119
12017
1442040

144,408289

12,124 . 12,124

48496
145488
145488

146,991376
+ 144,408289
+ 135,166201

$\sqrt{4|26,|56|58|66} = 20{,}653$
4
40 : 2656
2436
412 : 22058
20625
143366
123909

Die Kraft P_2 muss nun zunächst in eine horizontal wirkende Kraft $\overline{au} = u$ und in eine vertikal wirkende Kraft $\overline{at} = t$ zerlegt werden.

Im Parallelogramm ut ist zunächst:

$$\frac{\overline{at}}{\overline{aP_2}} = \frac{t}{P_2} = \sin 60^0$$

folglich:

$$t = P_2 . \sin 60^0$$

oder: $t = 14 . \sin 60^0$

woraus man nach Hilfsrechnung 3:

C). . . . $t = 12{,}124$ erhält.

Desgleichen ist:

$$\frac{\overline{au}}{\overline{aP_2}} = \frac{u}{P_2} = \cos 60^0$$

oder:

$$u = \cos 60^0 . P_2$$

Diese Kraft u muss wieder in die beiden rechtwinklig zu einander wirkenden Kräfte $\overline{as} = s$ und $\overline{ar} = r$ zerlegt werden.

Nun ist:

$$\frac{\overline{as}}{\overline{au}} = \frac{s}{u} = \cos 40^0$$

oder:

$$s = u . \cos 40^0$$

und desgl.

$$r = u . \sin 40^0$$

Setzt man in jede dieser beiden Gleichungen den oben gefundenen Wert für u, d. h.

$$u = \cos 60^0 . P_2$$

so erhält man für

$$s = \cos 60^0 . P_2 . \cos 40^0$$

und $r = \cos 60^0 . P_2 . \sin 40^0$

oder für P_2 den Zahlenwert eingesetzt:

$$s = \cos 60^0 . \cos 40^0 . 14$$

woraus man

D). . . $s = 5{,}3623$ (siehe Hilfsrechn. 4)

und

$$r = \cos 60^0 . \sin 40^0 . 14$$

woraus man

E). . . . $r = 4{,}4995$ (siehe Hilfsrechn. 5)

erhält.

Es wirken nun in der Richtung der Achse $\overline{ax}$ die Kräfte

$$P + s - s^1 = 9 + 5{,}3623 - 2{,}7362$$
$$\varrho = 11{,}6261$$

In der Richtung der Achse $\overline{ay}$ wirken die Kräfte:

$$r + r_1 = 4{,}4995 + 7{,}5175$$

oder: $\varrho_1 = 12{,}0170$

und in der Richtung der Achse $\overline{az}$:

$$\varrho_2 = t = 12{,}124$$

Es ist nun nach Gleichung IV in Antwort auf Frage 17:

Hilfsrechnungen:

7). . . . $\varrho^2 = 135,166$

$\varrho_1^2 = 144,408$

$\sqrt{279,574}$

$\log \operatorname{tg} \delta = \log 12,124 - \frac{1}{2} \cdot \log 279,574$

Nun ist:

$\log 12,124 = 1,0836459$

$-\frac{1}{2} \log 279,574 = -1,2232484$

$\log \operatorname{tg} \delta = 9,8603975-10$

mithin:

$\delta = 35^0\, 56'\, 45''$

8). . . $\log 12,017 = 1,0797961$

$-\log 11,6261 = -1,0654340$

$\log \operatorname{tg} \varepsilon = 0,0143621$

mithin:

$\varepsilon = 45^0\, 56'\, 50''$

9). . . $\log 11,6261 = 1,0654340$

$-\log 20,653 = -1,3149831$

$\log \cos \mu = 9,7503509-10$

mithin:

$\mu = 55^0\, 45'\, 2''$

10). . . $\log 12,017 = 1,0797961$

$-\log 20,653 = -1,3149831$

$\log \cos \mu_1 = 9,7648130-10$

mithin:

$\mu_1 = 54^0\, 25'\, 8''$

11). . . $\log 12,124 = 1,0836459$

$-\log 20,653 = -1,3149831$

$\log \cos \mu_2 = 9,7686628-10$

mithin:

$\mu_2 = 54^0\, 3'\, 11''$

oder: $R = \sqrt{11,6261^2 + 12,017^2 + 12,124^2}$

F). . . $R = 20,653$ (siehe Hilfsrechn. 6)

Zur Berechnung des Winkels δ, welchen die Resultante R mit ihrer Projektion, bezw. mit der Horizontalebene bildet, ergibt sich aus Gleichung V in Antwort auf Frage 17:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2}}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{12,124}{\sqrt{279,574}}$$

oder:

G). . . . $\delta = 35^0\, 56'\, 45''$ (s. Hilfsrechn. 7)

Zur Berechnung des Winkels ε, welchen die Projektion der Resultante R mit der positiven Richtung der Achse $\overline{a\,x}$ bildet, erhält man nach Gleichung VI in Antwort auf Frage 17:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\varrho_1}{\varrho}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{12,017}{11,6261}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 8:

H). . . . $\varepsilon = 45^0\, 56'\, 50''$ erhält.

Zur Berechnung der Winkel μ, μ_1 und μ_2, welche die Resultante R mit den rechtwinklig gegeneinander wirkenden Kräften ϱ, ϱ_1, ϱ_2, bezw. mit den Achsen $\overline{ax}$, $\overline{ay}$, $\overline{az}$ bildet, erhält man aus den Gleichungen XI, XII, XIII in Antwort auf Frage 17:

$$\cos \mu = \frac{\varrho}{R}$$

oder:

$$\cos \mu = \frac{11,6261}{20,653}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 9).:

J). . . . $\mu = 55^0\, 45'\, 2''$ erhält.

$$\cos \mu_1 = \frac{\varrho_1}{R}$$

oder:

$$\cos \mu_1 = \frac{12,017}{20,653}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 10).:

K). . . . $\mu_1 = 54^0\, 25'\, 8''$ erhält.

$$\cos \mu_2 = \frac{\varrho_2}{R}$$

oder:

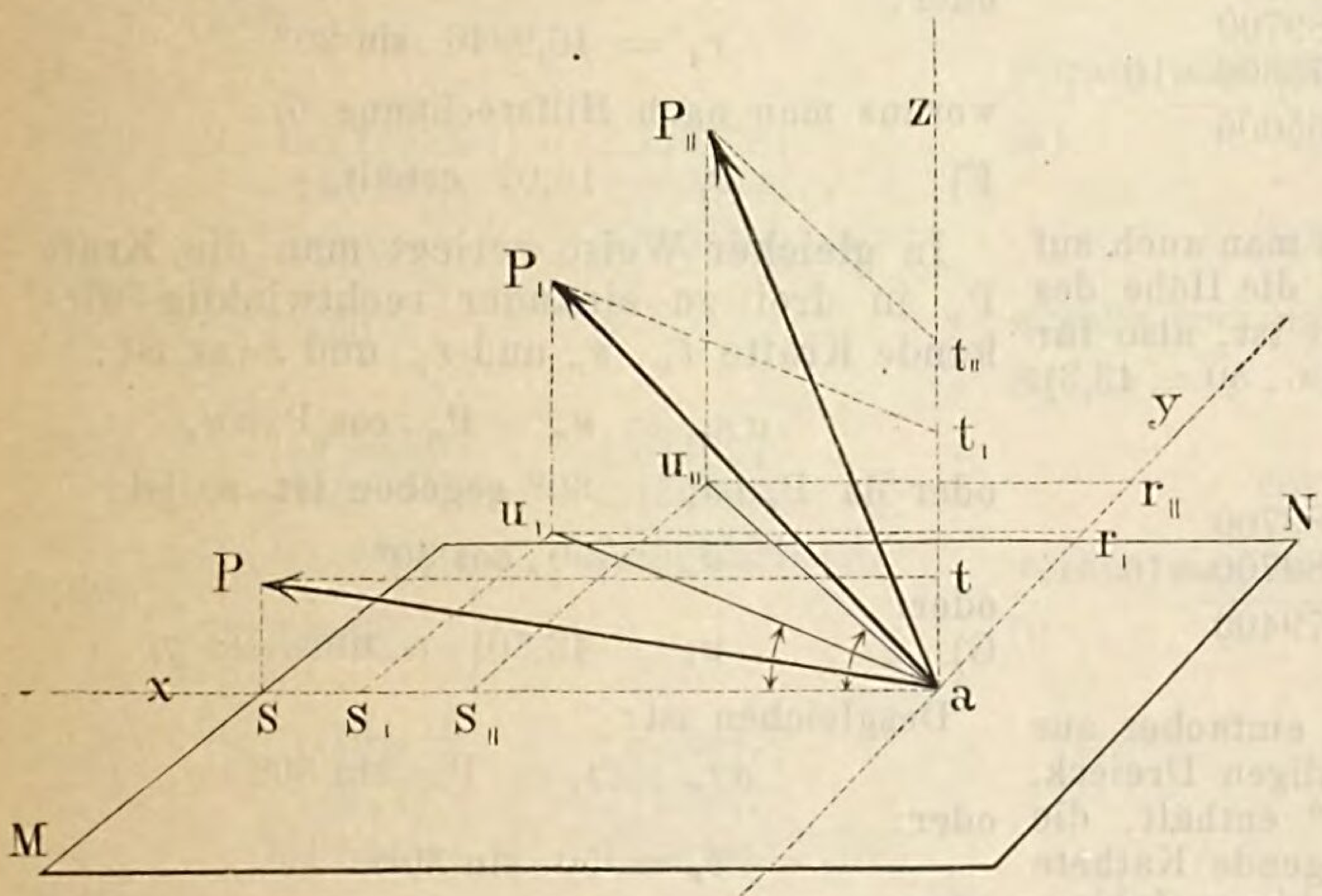
$$\cos \mu_2 = \frac{12,124}{20,653}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 11).:

L). . . . $\mu_2 = 54^0\, 3'\, 11''$ erhält.

Aufgabe 70. Drei Arbeiter ziehen an den Enden dreier Seile, welche an einer auf dem horizontalen Boden MN (siehe Figur 52) liegenden Last angeknüpft sind, jeder mit 50 kg Kraft. Die Neigungswinkel dieser Kräfte gegen den Horizont sind 10^0, 20^0 und 30^0, und die Horizontalwinkel zwischen den Projektionen der ersten und zweiten Kraft $= 20^0$ und zwischen den Projektionen der ersten und dritten Kraft $= 35^0$. Es soll Grösse und Richtung der Resultante berechnet werden.

Figur 52.



Hilfsrechnungen.

1). $\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log\cos 10^0 = 9{,}9933515 - 10$
$\log s = 1{,}6923215$
mithin: $s = 49{,}24$

2). . . . $\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log\sin 10^0 = 9{,}2396702$
$\log t = 0{,}9386402$
mithin: $t = 8{,}6824$

3). . . . $\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log\cos 20^0 = 9{,}9729858$
$\log u_1 = 1{,}6719558$
mithin: $u_1 = 46{,}9846$

4). . . . $\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log\sin 20^0 = 9{,}5340517$
$\log t_1 = 1{,}2330217$
mithin: $t_1 = 17{,}101$

Auflösung. Nach der in Antwort auf Frage 17 enthaltenen Anleitung zerlege man zunächst die Kraft P (welche mit den Achsen $\overline{ax}$ und $\overline{az}$ in ein und derselben senkrechten Ebene liegend gedacht werden kann) in zwei Seitenkräfte, welche mit den Richtungen der Achsen $\overline{ax}$ und $\overline{az}$ zusammenfallen. Der Winkel Pas ist gegeben und zwar ist:

$$Pas = 10^0$$

Da $\frac{\overline{as}}{\overline{aP}} = \frac{s}{P} = \cos Pas$ ist,

so ist:

$$s = P \cdot \cos Pas$$

oder:

$$s = 50 \cdot \cos 10^0$$

woraus man nach Hilfsrechn. 1).:

A). . . $s = 49{,}24$ erhält.

Ferner ist:

$$\frac{\overline{at}}{\overline{aP}} = \frac{t}{P} = \sin Pas$$

oder:

$$t = P \cdot \sin Pas$$

oder:

$$t = 50 \cdot \sin 10^0$$

woraus man nach Hilfsrechn. 2):

B). . . $t = 8{,}6824$ erhält.

Im Parallelogramm $P_1 u_1 a t_1$ ist Winkel

$$P_1 a u_1 = 20^0$$

und

$$\frac{\overline{au_1}}{\overline{aP_1}} = \frac{u_1}{P_1} = \cos P_1 a u_1$$

oder:

$$u_1 = P_1 \cdot \cos P_1 a u_1$$

oder:

$$u_1 = 50 \cdot \cos 20^0$$

woraus man nach Hilfsrechnung 3).:

C). . . . $u_1 = 46{,}9846$ erhält.

Ferner ist:

$$\frac{\overline{at_1}}{\overline{aP_1}} = \frac{t_1}{P_1} = \sin a P_1 t_1$$

oder:

$$t_1 = P_1 \cdot \sin a P_1 t_1$$

oder:

$$t_1 = 50 \cdot \sin 20^0$$

woraus man nach Hilfsrechnung 4).:

D). . . . $t_1 = 17{,}101$ erhält.

Hilfsrechnungen.

5). . . $\log 46{,}9846 = 1{,}6719558$
$+ \log \cos 20^0 = 9{,}9729858-10$
$\log s_1 = 1{,}6449416$
mithin: $s_1 = 44{,}151$

6). . . $\log 46{,}9846 = 1{,}6719558$
$+ \log \sin 20^0 = 9{,}5340517-10$
$\log r_1 = 1{,}2060075$
mithin: $r_1 = 16{,}07$

7). . . . $\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log \cos 30^0 = 9{,}9375306-10$
$\log u_{\prime\prime} = 1{,}6365006$
mithin: $u_{\prime\prime} = 43{,}301$

(Zu demselben Resultat gelangt man auch auf kürzerem Weg, da nach Erkl. 32 die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $= 0{,}866\,a$ ist, also für die obigen Zahlenwerte $u_{\prime\prime} = 0{,}866 \,.\, 50 = 43{,}3$).

8). . . . $\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log \sin 30^0 = 9{,}6989700-10$
$\log t_{\prime\prime} = 1{,}3979400$
mithin: $t_{\prime\prime} = 25$

(Dasselbe Resultat ergibt sich einfacher aus Erkl. 32, wonach im rechtwinkligen Dreieck, welches einen Winkel von 30^0 enthält, die die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete $= \frac{1}{2}$ der Hypotenuse, also in obigem Zahlenbeispiel $= \frac{1}{2} \,.\, 50 = 25$ ist).

9). . . $\log 43{,}301 = 1{,}6365006$
$+ \log \cos 35^0 = 9{,}9133645-10$
$\log s_{\prime\prime} = 1{,}5498651$
mithin: $s_{\prime\prime} = 35{,}47$

10). . . $\log 43{,}301 = 1{,}6365006$
$+ \log \sin 35^0 = 9{,}7585916-10$
$\log r_{\prime\prime} = 1{,}3950919$
mithin: $r_{\prime\prime} = 24{,}837$

Die Seitenkraft $au_1 = u_1$ zerlege man in die beiden Komponenten $as_1 = s_1$ und $ar_1 = r_1$

Da Winkel $s_1 a u_1 = 20^0$ gegeben ist, so ist:

$$\frac{as_1}{au_1} = \frac{s_1}{u_1} = \cos s_1 a u_1$$

oder:

$$s_1 = u_1 \,.\, \cos s_1 a u_1$$

oder:

$$s_1 = 46{,}9846 \,.\, \cos 20^0$$

woraus man nach Hilfsrechnung 5).:

E). . . . $s_1 = 44{,}151$ erhält.

Ferner ist:

$$\frac{ar_1}{au_1} = \frac{r_1}{u_1} = \sin r u a$$

oder:

$$r_1 = u_1 \,.\, \sin r u a$$

oder:

$$r_1 = 46{,}9846 \,.\, \sin 20^0$$

woraus man nach Hilfsrechnung 6).:

F). . . . $r_1 = 16{,}07$ erhält.

In gleicher Weise zerlegt man die Kraft $P_{\prime\prime}$ in drei zu einander rechtwinklig wirkende Kräfte $t_{\prime\prime}$, $s_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ und zwar ist:

$$a u_{\prime\prime} = u_{\prime\prime} = P_{\prime\prime} \,.\, \cos P_{\prime\prime} a u_{\prime\prime}$$

oder da $P_{\prime\prime} a u_{\prime\prime} = 30^0$ gegeben ist, so ist:

$$u_{\prime\prime} = 50 \,.\, \cos 30^0$$

oder:

G). . . . $u_{\prime\prime} = 43{,}301$ (s. Hilfsrechn. 7)

Desgleichen ist:

$$a t_{\prime\prime} = t_{\prime\prime} = P_{\prime\prime} \,.\, \sin 30^0$$

oder:

$$t_{\prime\prime} = 50 \,.\, \sin 30^0$$

oder:

H). . . . $t_{\prime\prime} = 25$ (s. Hilfsrechn. 8)

Die Seitenkraft $u_{\prime\prime}$ ist endlich noch in die zwei Komponenten $s_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ zu zerlegen.

Gegeben ist Winkel $u_{\prime\prime} a s_{\prime\prime} = 35^0$ folglich:

$$s_{\prime\prime} = u_{\prime\prime} \,.\, \cos 35^0$$

oder:

$$s_{\prime\prime} = 43{,}301 \,.\, \cos 35^0$$

oder:

J). . . . $s_{\prime\prime} = 35{,}47$ (s. Hilfsrechn. 9)

Desgleichen ist:

$$r_{\prime\prime} = u_{\prime\prime} \,.\, \sin 35^0$$

oder:

$$r_{\prime\prime} = 43{,}301 \,.\, \sin 35^0$$

oder:

K). . . . $r_{\prime\prime} = 24{,}837$ (s. Hilfsrechn. 10)

Es wirken nun in Richtung der Achse ax die drei Kräfte:

$$s + s_1 + s_{\prime\prime} = 49{,}24 + 44{,}151 + 35{,}47 = 128{,}861$$

in der Richtung der Achse ay die drei Kräfte:

$$r + r_1 + r_{\prime\prime} = 0 + 16{,}07 + 24{,}837 = 40{,}907$$

Hilfsrechnungen:

```
11). 128,86 . 128,86          40,9 . 40,9
     ---------------          -----------
        77316                    3681
       103088                   1636
      103088                  -------
      25772                    1672,81
     12886
    -----------              50,78 . 50,78
    16604,8996               -------------
   + 1672,81                     40624
   + 2578,6084                  35546
   -------------               253900
   √2|08|56,|30|80 = 144,4    ---------
     1                         2578,6084
   -----
   2 : 108
        96
   --------
   28 : 1256
        1136
   ----------
   288 : 12030
         11536
   ------------

12). . . log 128,86 =  2,1101181
       — log 144,4  = —2,1595672
                      ---------------
         log cos μ  =  9,9505509—10
mithin:
  μ = 26° 49′ 30″

13). . . log 40,907 =  1,6117976
       — log 144,4  = —2,1595672
                      ---------------
         log cos μ, =  9,4522304—10
mithin:
  μ, = 73° 32′ 40″

14). . . log 50,78  =  1,7056927
       — log 144,4  = —2,1595672
                      ---------------
         log cos μ,, = 9,5461255—10
mithin:
  μ,, = 69° 24′ 40″
```

Aufgabe 71. An einem Rammklotz (siehe Figur 1) ziehen 4 Mann mit einer durchschnittlichen Kraft von je 60 kg. Die Leute stehen so, dass, ihre Fusspunkte durch gerade Linien verbunden, dieselben ein Quadrat bilden würden. Die Winkel, welche je zwei nebeneinander befindliche Taue miteinander bilden, sind sämtlich einander gleich und zwar jeder Winkel $\alpha = 30^0$. Welches ist in diesem Fall die Grösse und Richtung der Resultante?

und in der Richtung der Achse az wirken die drei Kräfte:

$$t + t_{,} + t_{,,} = 8{,}6824 + 17{,}101 + 25 = 50{,}7834$$

Analog der Formel IV in Antwort auf Frage 17 ist demnach die Resultierende

$$R = \sqrt{128{,}86^2 + 40{,}9^2 + 50{,}78^2}$$

oder:

$$R = \sqrt{20856{,}3080}$$

oder:

L). . . $R = 144{,}4$ (s. Hilfsrechn. 11)

Nach Formel XI, XII und XIII in Antwort auf Frage 17 sind die Winkel, welche die Resultierende R mit den rechtwinklig gegeneinander wirkenden Kräften bildet:

$$\cos\mu = \frac{128{,}86}{144{,}4}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 12).:

M). $\mu = 26^0\,49'\,30''$ erhält.

$$\cos\mu_{,} = \frac{40{,}907}{144{,}4}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 13).:

N). $\mu_{,} = 73^0\,32'\,40''$ erhält.

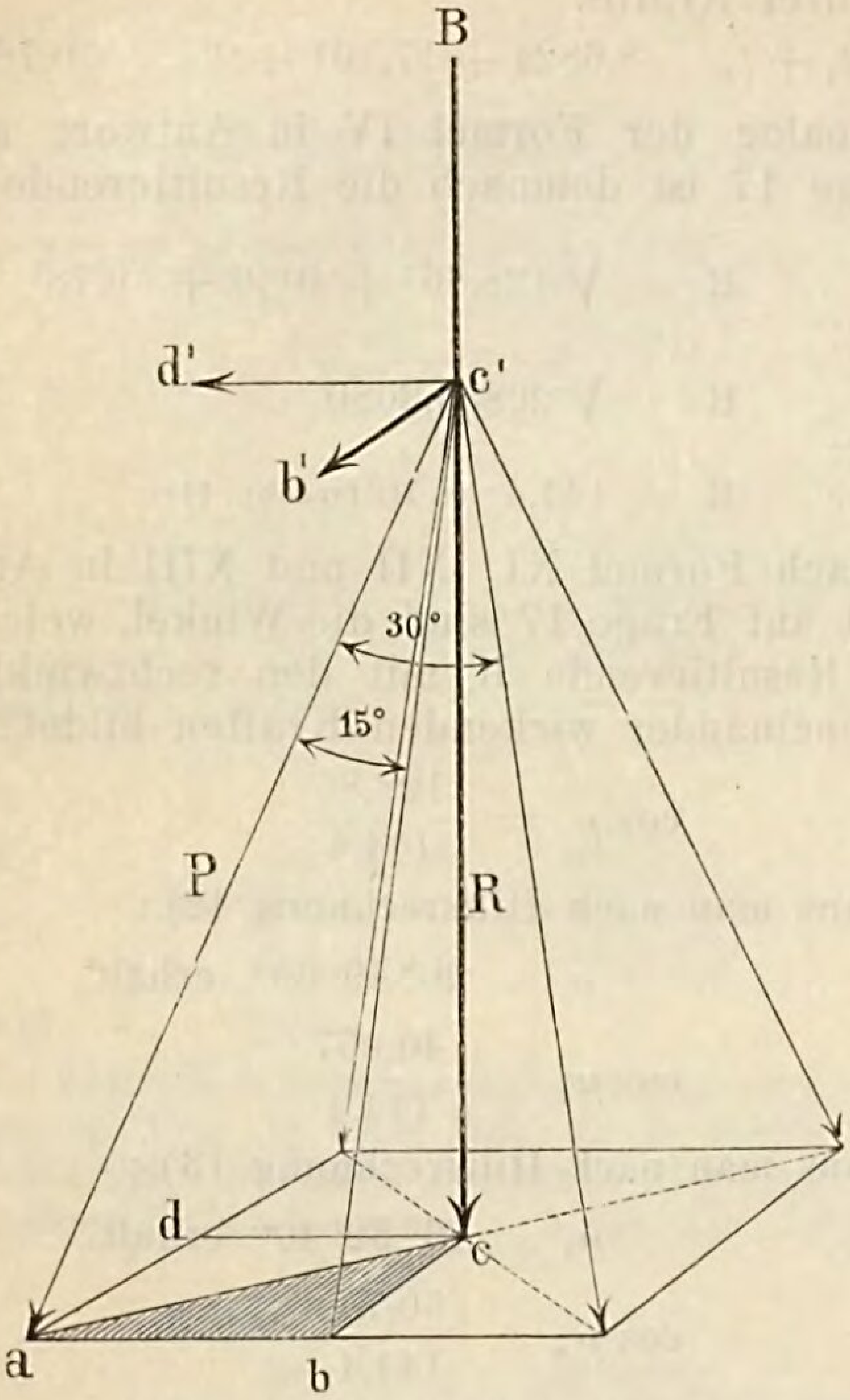
$$\cos\mu_{,,} = \frac{50{,}78}{144{,}4}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 14).:

O). $\mu_{,,} = 69^0\,24'\,40''$ erhält.

Auflösung. Es ist auch in diesem Fall, gleichwie bei den vorher gelösten Aufgaben, jede der gegebenen Kräfte in drei unter rechtem Winkel gegeneinander wirkende Komponenten zu zerlegen, z. B. die Kraft P in Figur 53 in die drei Seitenkräfte R, $c'b'$ und $c'd'$. Da aber sämtliche gegebene Kräfte und Winkel einander gleich sind, so heben sich sämtliche in der Horizontalebene wirkende Komponenten gegenseitig auf und es genügt, aus P und α die Resultante R zu berechnen, und diese, da vier

Figur 53.



Hilfsrechnungen.

1). . . . $\log 60 = 1{,}7781513$

$+ \log \sin 15^0 = 9.4129962-10$

$\log ab = 1{,}1911475$

mithin: $ab = 15{,}529$

2). $\sqrt{2} = 1{,}414$

$15{,}529 \,.\, 1{,}414$

62116
15529
62116
15529

21,958006

3). . $60 \,.\, 60$

3600
— 481,154
3118,846

$\sqrt{31|18,|84|6} = 55{,}75$

25
10 : 618
525
110 : 8384
7749
1114 : 63560
55725

$21{,}958 \,.\, 21{,}958$

175664
109790
197622
21958
43016

481,153764

gleichgrosse Kräfte gegeben sind, mit 4 zu multiplizieren, um die Gesamtwirkung in der Richtung des Taues BC zu erhalten.

In dem rechtwinkligen Dreieck abc' besteht nun die Relation:

$$\frac{ab}{P} = \sin \frac{1}{2} \alpha$$

oder in Anbetracht der gegebenen Zahlenwerte:

$$ab = 60 \,.\, \sin 15^0$$

woraus man nach Hilfsrechnung 1).:

1). . . . $ab = bc = 15{,}529$ erhält.

Im rechtwinkligen Dreieck abc ist:

$$ac = \sqrt{ab^2 + bc^2}$$

oder:

$$ac = \sqrt{2\,ab^2}$$

oder:

$$ac = ab\sqrt{2}$$

oder:

$$ac = 15{,}529\sqrt{2}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 2).:

2). . . . $ac = 21{,}958$ erhält.

Ferner ist im rechtwinkligen Dreieck acc':

$$cc_, = \sqrt{ac_,^2 - ac^2}$$

oder:

$$cc_, = \sqrt{60^2 - 21{,}958^2}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 3).:

A). . . . $r = 55{,}75$ erhält.

Da jede der gegebenen Kräfte dieselbe Resultante ergibt, so ist die Gesamtwirkung:

B). . . $R = 4 \,.\, 55{,}75 = 223$ kg

Der Winkel β, den R mit P bildet, ergibt sich aus der Relation:

$$\frac{ac}{ac'} = \frac{ac}{P} = \sin \beta$$

oder:

$$\sin \beta = \frac{21{,}958}{60}$$

woraus man nach Hilfsrechnung 4).:

C). . . . $\beta = 21^0\, 28' \,(1\tfrac{1}{2}'')$

erhält.

Hilfsrechnung.

4). . . $\log 21{,}958 = 1{,}3415928$
$-\log 60 = -1{,}7781513$
$\log \sin \beta = 9{,}5634415-10$

mithin: $\beta = 21^0\,28'\,1\frac{1}{2}''$

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 72. Drei nicht in ein und derselben Ebene liegende Kräfte, welche rechtwinklig gegeneinander wirken, sollen durch eine einzige Kraft R ersetzt werden. Welches ist die Grösse und Richtung der letzteren, wenn die drei gegebenen Kräfte $P = 45$, $P_{,} = 50$ und $P_{,,} = 55$ kg sind?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 68.

Aufgabe 73. Drei Kräfte P, $P_{,}$ und $P_{,,}$ wirken auf einen Punkt eines Körpers. P und $P_{,}$ liegen in einer Ebene und bilden einen Winkel von 96^0. Der Neigungswinkel β der Kraft $P_{,,}$ mit der Ebene der Kräfte P und $P_{,}$ beträgt 50^0, während der Winkel γ, den die Projektion der Kraft $P_{,,}$ auf genannter Ebene mit der Kraft P bildet, $= 83^0$ ist. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultierenden, wenn $P = 20$, $P_{,} = 25$ und $P_{,,} = 30$ kg ist?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der gelösten Aufgabe 69.

Aufgabe 74. Vier Arbeiter ziehen an den Enden von 4 Seilen, welche an einem Punkt befestigt sind, jeder mit 42 kg Kraft. Die Neigungswinkel dieser Kräfte gegen den Horizont sind 15^0, 22^0, 30^0 und 36^0 und die Horizontalwinkel zwischen den Projektionen von je zwei aufeinanderfolgenden Kräften sind zwischen P und $P_{,} = 20^0$, $P_{,}$ und $P_{,,} = 28^0$ und $P_{,,}$ und $P_{,,,} = 40^0$. Es soll die Grösse und Richtung der Resultante berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 70.

Aufgabe 75. An einem Rammklotz ziehen 6 Mann mit einer durchschnittlichen Kraft von je 45 kg; die Leute stehen so, dass ihre Fusspunkte durch gerade Linie verbunden dieselben ein gleichseitiges Sechseck bilden würden. Die Winkel, welche je zwei nebeneinander befindliche Taue miteinander bilden, sind gleichgross und zwar jeder dieser Winkel $\alpha = 27^0\,30'$. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 71. (Siehe auch Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen. I. Band. Seite 29.)

5). Ueber die Zusammensetzung von Parallelkräften.

a. Ueber die Beziehungen, welche zwischen gleichgerichteten Parallelkräften und deren Resultante bestehen.

Frage 18. Welche Fälle kann man hinsichtlich der Richtung zweier in Wirkung tretender Parallelkräfte unterscheiden?

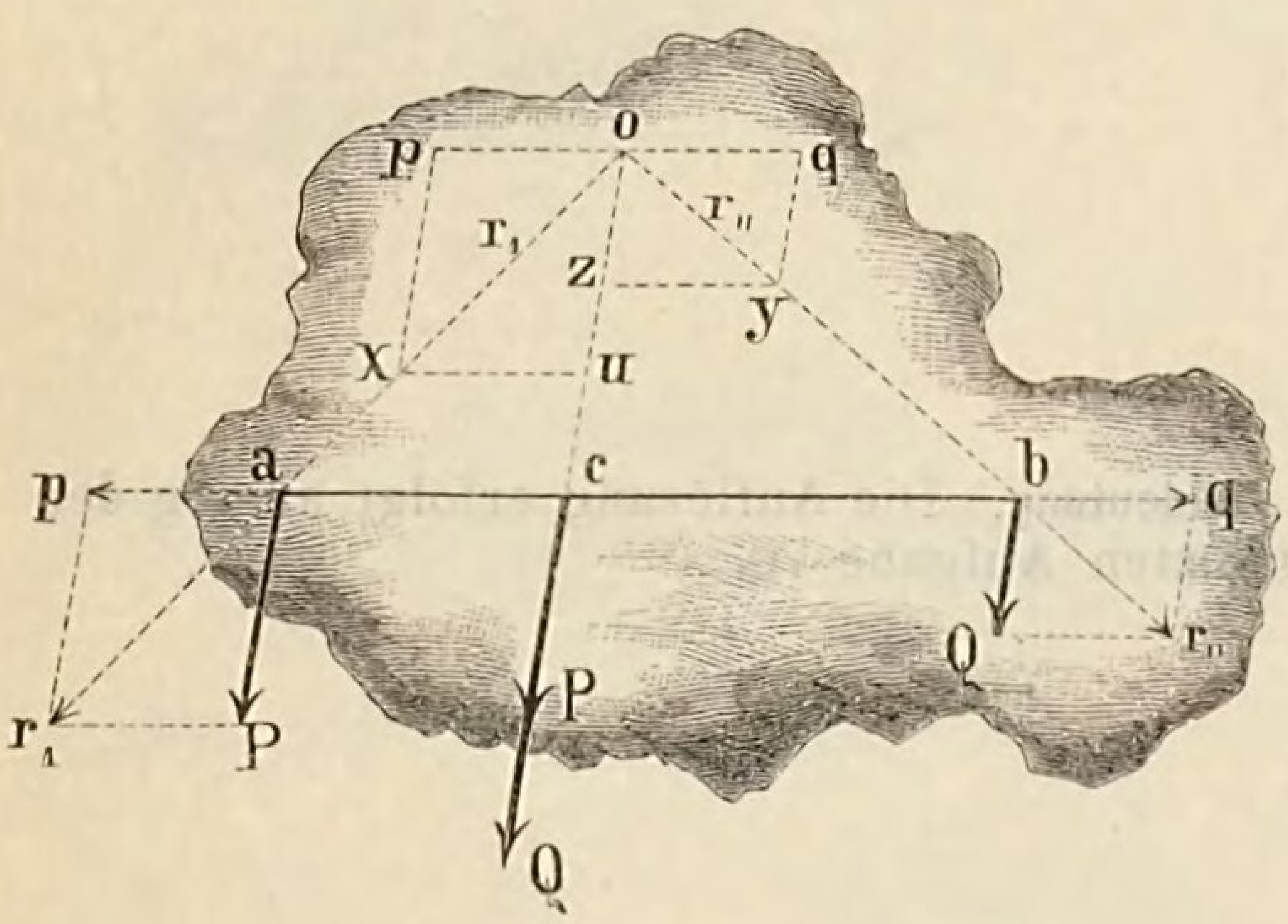
Antwort. Hinsichtlich der Richtung zweier in Wirkung tretender Parallelkräfte hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

a). beide Parallelkräfte sind entweder gleichgerichtet, oder

b). beide Parallelkräfte sind entgegengesetzt gerichtet.

Frage 19. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei nach derselben Richtung auf einen Körper wirkenden Parallelkräften und der Resultante derselben?

Figur 54.



Erkl. 68. Ein Grundsatz (siehe Erkl. 69) der Statik lautet:

Die Wirkung eines Systems von Kräften wird nicht geändert, wenn man zu demselben beliebig viele Kräfte derart hinzufügt, dass sich letztere gegenseitig aufheben.

Erkl. 69. Ein Grundsatz (Axiom) ist eine Wahrheit, die unmittelbar einleuchtet und deshalb keines Beweises bedarf.

Antwort. Um die Beziehungen zu erfahren, welche zwischen zwei gleichgerichteten Parallelkräften und deren Resultante bestehen, denke man sich, siehe Figur 54, in den Angriffspunkten a und b der beiden Parallelkräfte P und Q zwei gleichgrosse aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte p und q angebracht, deren Richtungen in die verlängerte Angriffslinie $a\,b$ fallen.[1]) Da diese beiden Kräfte sich gegenseitig aufheben, so ist die Resultante der vier Kräfte P, Q, p und q offenbar auch die Resultante von P und Q. Konstruiert man nun aus P und p ein Kräfteparallelogramm, so erhält man die Resultante $r_{\prime}$; konstruiert man in gleicher Weise aus den beiden Kräften Q und q ein Parallelogramm, so ergibt sich die Resultante $r_{\prime\prime}$.

Nach Satz 5 in Antwort auf Frage 11 kann man den Angriffspunkt einer Kraft auf jeden andern Punkt verlegen, der in der Richtung der Kraft liegt und mit dem anfänglichen Angriffspunkt fest verbunden ist; folglich kann man den Angriffspunkt der Kraft $r_{\prime}$ von a nach o, und den Angriffspunkt der Kraft $r_{\prime\prime}$ von b nach o verlegen. Der Punkt o ergibt sich als Schnittpunkt der nach rückwärts verlängerten Resultanten $r_{\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ und ist jetzt der gemeinsame Angriffspunkt von $r_{\prime} = \overline{ox}$ und $r_{\prime\prime} = \overline{oy}$.

Zerlegt man nun $r_{\prime}$ nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm in zwei Seitenkräfte, deren eine op parallel ab und deren andere ou parallel $a\mathrm{P} = \mathrm{P}$ ist, so muss $op = ap = p$ sein; in gleicher Weise erhält man aus $r_{\prime\prime}$ die mit ab parallele Seitenkraft $oq = bq = q$. Diese beiden Kräfte p und q in o angreifend, heben aber einander auf,

[1]) Siehe Erkl. 68.

weil sie einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, können also bei der weiteren Betrachtung unberücksichtigt bleiben, so dass nur noch die in o angreifenden beiden Kräfte $\overline{ou} = P$ und $\overline{oz} = Q$ übrig bleiben. Da diese beiden Kräfte in ein und demselben Punkt, in ein und derselben Geraden und nach derselben Richtung wirken, so ist ihre Resultante nach Satz 1 in Antwort auf Frage 10 gleich ihrer Summe, man hat also die Beziehung:

1). $R = P + Q$

Verlegen wir nun[1]) den Angriffspunkt o der Resultante in der Richtung der letzteren nach dem Punkt c auf der festen Linie ab, so ergibt sich, dass R parallel zu den gegebenen Kräften P und Q wirkt und dass ihr Angriffspunkt zwischen den Angriffspunkten beider Kräfte P und Q und zwar näher zur grösseren Kraft P hin gelegen ist.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich der folgende Satz:

Satz 7. Die Resultante zweier gleichgerichteten Parallelkräfte ist stets gleich der Summe dieser Kräfte, ist parallel zu den Kräften, hat ihren Angriffspunkt zwischen den Angriffspunkten der Kräfte und ist näher zum Angriffspunkt der grösseren Kraft gelegen.[2])

Erkl. 70. Gleichgewicht findet in diesem Fall niemals statt. Soll dasselbe hergestellt werden, so ist in c eine Kraft $= R$ mit der gefundenen Resultante nach entgegengesetzter Richtung wirkend anzubringen.

[1]) Siehe Satz 5 in Antwort auf Frage 11.
[2]) Siehe Erkl. 70.

Frage 20. Wie lässt sich die Lage des Angriffspunktes der Resultante zweier Parallelkräfte von gleicher Richtung durch Rechnung genau ermitteln und welche Relation besteht zwischen den beiden Teilen der Angriffslinie?

Antwort. Um den Angriffspunkt der Resultante zweier Parallelkräfte von gleicher Richtung durch Rechnung genau zu ermitteln, benutzt man die Aehnlichkeit der Dreiecke[1]) oxu und oac, sowie der Dreiecke ozy und ocb in Figur 54, woraus sich folgende Proportionen[2]) ergeben:

$$\overline{ou} : \overline{ux} = \overline{oc} : \overline{ac}$$

oder: $P : p = \overline{oc} : \overline{ac}$

oder: $p \cdot \overline{oc} = P \cdot \overline{ac}$

und

$$\overline{oz} : \overline{zy} = \overline{oc} : \overline{bc}$$

oder: $Q : q = \overline{oc} : \overline{bc}$

oder: $q \cdot \overline{oc} = Q \cdot \overline{bc}$

Erkl. 71. Ein planimetr. Lehrsatz heisst: „Zwei (oder mehr) Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zwei Winkeln des andern sind.“

Erkl. 72. Ein planimetr. Lehrsatz heisst: „In zwei (oder mehr) ähnlichen Dreiecken sind die Winkel des einen Dreiecks gleich den homologen Winkeln des andern Dreiecks und die Verhältnisse, gebildet aus je einer Seite des einen Dreiecks und der homologen Seite des andern Dreiecks sind einander gleich.“
Nach diesem Lehrsatz lassen sich nebenstehende Proportionen aufstellen.

[1]) Siehe Erkl. 71.
[2]) Siehe Erkl. 72 u. 73.

Erkl. 73. Unter einer Proportion versteht man die Verbindung mehrerer gleichen Verhältnisse (Quotienten) durch das Gleichheitszeichen. So ist z. B:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{oder:} \quad \frac{3}{5} = \frac{4}{6\frac{2}{3}}$$

eine Proportion. Nimmt man an, dass der Quotient $\frac{a}{b}$ gleich dem Quotient $\frac{c}{d}$ ist, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eine Proportion; dieselbe schreibt man auch in der Form:

$$a : b = c : d$$

und nennt dieselbe eine geometrische Proportion. Werden mehr als zwei Verhältnisse einander gleich gesetzt, so erhält man eine fortlaufende Proportion, wie z. B.:

$$5 : 15 = 6 : 18 = 1 : 3$$

Erkl. 74. Unter homologen Grössen (vom griech. homós = gleich, einerlei) versteht man in kongruenten oder ähnlichen Dreiecken diejenigen Seiten, welche gleichen Winkeln, und diejenigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen.

Erkl. 75. Um auf empirischem Weg (d. h. durch Erfahrung) die Richtigkeit von Satz 7 und 8 zu bestätigen, benutzt man den Hebel. Jeder Körper von beliebiger Form, der in beliebig vielen Punkten von Kräften angegriffen ist und sich um eine feste Achse drehen kann, wird Hebel genannt. Derselbe heisst einarmig, wenn sich der Drehpunkt an einem seiner Enden befindet, zweiarmig im entgegengesetzten Fall. Der Form nach zerfallen die Hebel in gerade und Winkelhebel (s. den Abschnitt Hebel).

da $p = q$, so ist auch

$$p \cdot \overline{oc} = q \cdot \overline{oc}$$

und demnach:

$$P \cdot \overline{ac} = Q \cdot \overline{bc}$$

oder:

1). . . . $P : Q = \overline{bc} : \overline{ac}$

d. h.:

Satz 8. Der Angriffspunkt c der Resultante teilt die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Kräfte P und Q in zwei Stücke, die sich umgekehrt verhalten wie die gegebenen Kräfte.

Aus obiger Gleichung 1). ergibt sich für die Entfernung ac des Angriffspunktes c der Resultante R von dem Angriffspunkt der grösseren Kraft P:

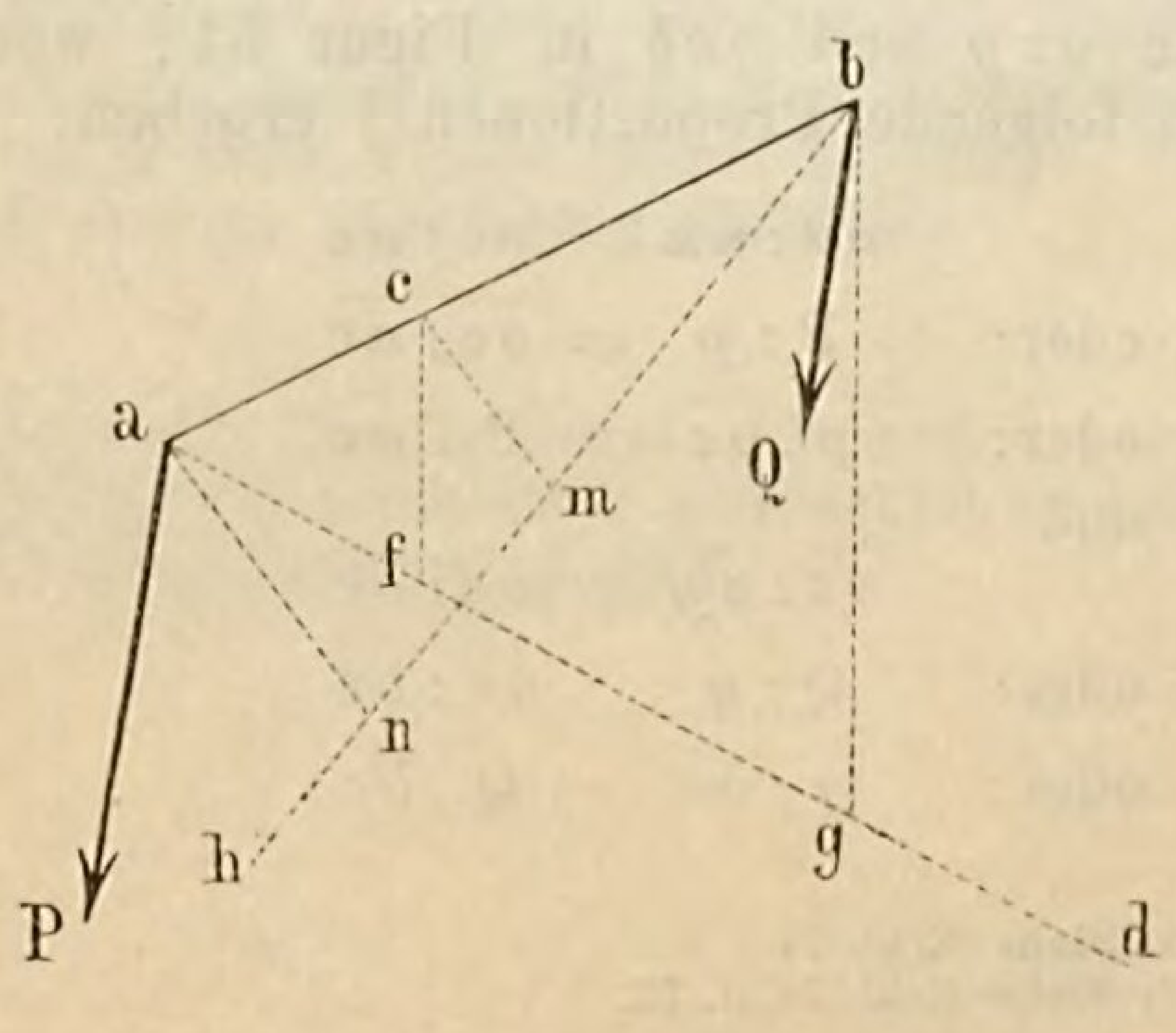
$$\overline{ac} = \frac{Q \cdot \overline{bc}}{P}$$

und die Entfernung des Angriffspunktes c von dem Angriffspunkt b der kleineren Kraft Q:

$$\overline{bc} = \frac{P \cdot \overline{ac}}{Q}$$

Frage 21. Wie lässt sich die Lage des Angriffspunktes der Resultante zweier gleichgerichteten Parallelkräfte durch Konstruktion ermitteln?

Figur 55.



Antwort. Will man für zwei gleichgerichtete Parallelkräfte den Angriffspunkt der Resultante nicht durch Rechnung, sondern durch Konstruktion ermitteln, so ziehe man von dem Angriffspunkt a der grösseren Kraft P, siehe Figur 55, eine Gerade ad von beliebiger Richtung, trage die kleinere Kraft Q (d. h. die ihre Intensität repräsentierende Länge oder Strecke) $= af$ der grösseren Kraft P zunächst ab, und darnach die Kraft $P = fg$, verbinde g mit b und ziehe durch f zu gb die Parallele fc, so ist c der Angriffspunkt der Resultante, und es ist:

$$af : ag = ac : ab$$

oder: $\quad Q : R = ac : ab$

Wäre die Gerade in beliebiger Richtung vom Punkt b aus gezeichnet worden, so

hätte man auf derselben zuerst die grössere Kraft $P = bm$ und alsdann die kleinere Kraft $Q = mn$ abtragen müssen; dann würde genau derselbe Angriffspunkt c der Resultante ermittelt werden.

Frage 22. Wenn zwei gleichgerichtete Parallelkräfte auf einen Körper wirken und man nimmt ihre Resultante als dritte Kraft hinzu, welches Verhältnis besteht dann zwischen diesen Kräften und den zwischen ihren Angriffspunkten liegenden Angriffslinien?

Antwort. Aus der in Antw. der Frage 20 aufgestellten Proportion:

$$P : Q = \overline{bc} : \overline{ac}$$

ergibt sich nach dem in der Erkl. 76 angeführten Summensatz:

$$(P + Q) : Q = (\overline{bc} + \overline{ac}) : \overline{ac}$$

da aber $P + Q = R$ ist und $\overline{bc} + \overline{ac} = \overline{ab}$ gibt, so ist auch

$$R : Q = \overline{ab} : \overline{ac}$$

diese Proportion mit der obigen zusammengefasst, ergibt:

3). . . . $P : Q : R = \overline{bc} : \overline{ac} : \overline{ab}$

was durch folgenden Satz in Worten ausgedrückt ist:

Satz 9. Wenn zwei gleichgerichtete Parallelkräfte auf einen Körper wirken und man nimmt ihre Resultante als dritte Kraft dazu, so verhält sich die kleinere Kraft zur grösseren und zur Resultante wie die kleinere Entfernung zur grösseren zur ganzen Angriffslinie.

Erkl. 76. Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe (oder Differenz) der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe (oder Differenz) der Glieder des andern, wie zwei homologe Glieder.“

Hat man z. B. die Proportion:

$$a : b = c : d$$

so ist nach diesem Satz:

$$a \pm b : a = c \pm d : c$$

$$a \pm b : b = c \pm d : d$$

$$a - b : a + b = c - d : c + d$$

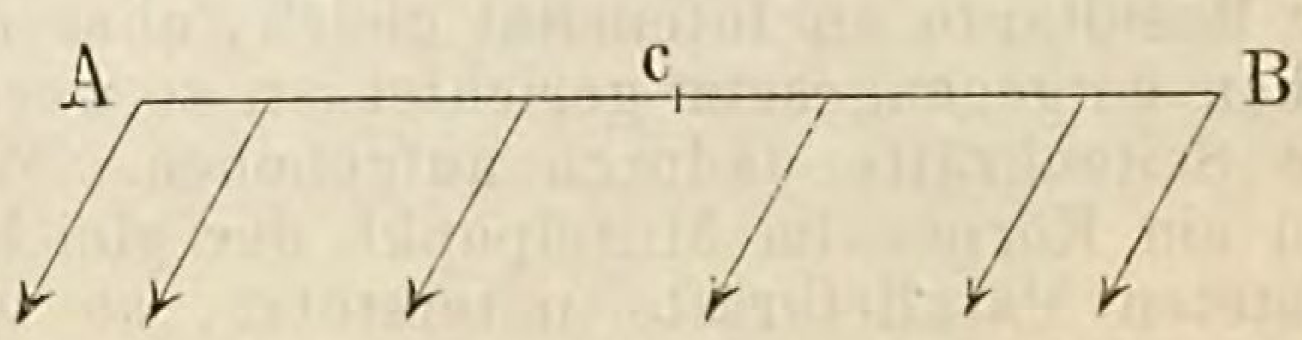
Erkl. 77. Aus dem in nebenstehender Antwort aufgestellten Satz ergeben sich die folgenden Sätze:

1). Sind die beiden gleichgerichteten Parallelkräfte gleich gross, so ist die Grösse der Resultante gleich ihrer Summe, die Richtung derselben parallel mit den gegebenen Kräften und ihr Angriffspunkt halbiert die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Parallelkräfte.

2). Wenn an derselben Angriffslinie mehrere gleichgerichtete Parallelkräfte von gleicher Intensität und in gleichen Abständen von dem Mittelpunkt c der Angriffslinie AB wirken, siehe Fig. 56, so ist die Resultante gleich der Summe jener Kräfte, ihre Richtung ist parallel mit jenen Kräften und ihr Angriffspunkt fällt in den Mittelpunkt c der Angriffslinie AB.

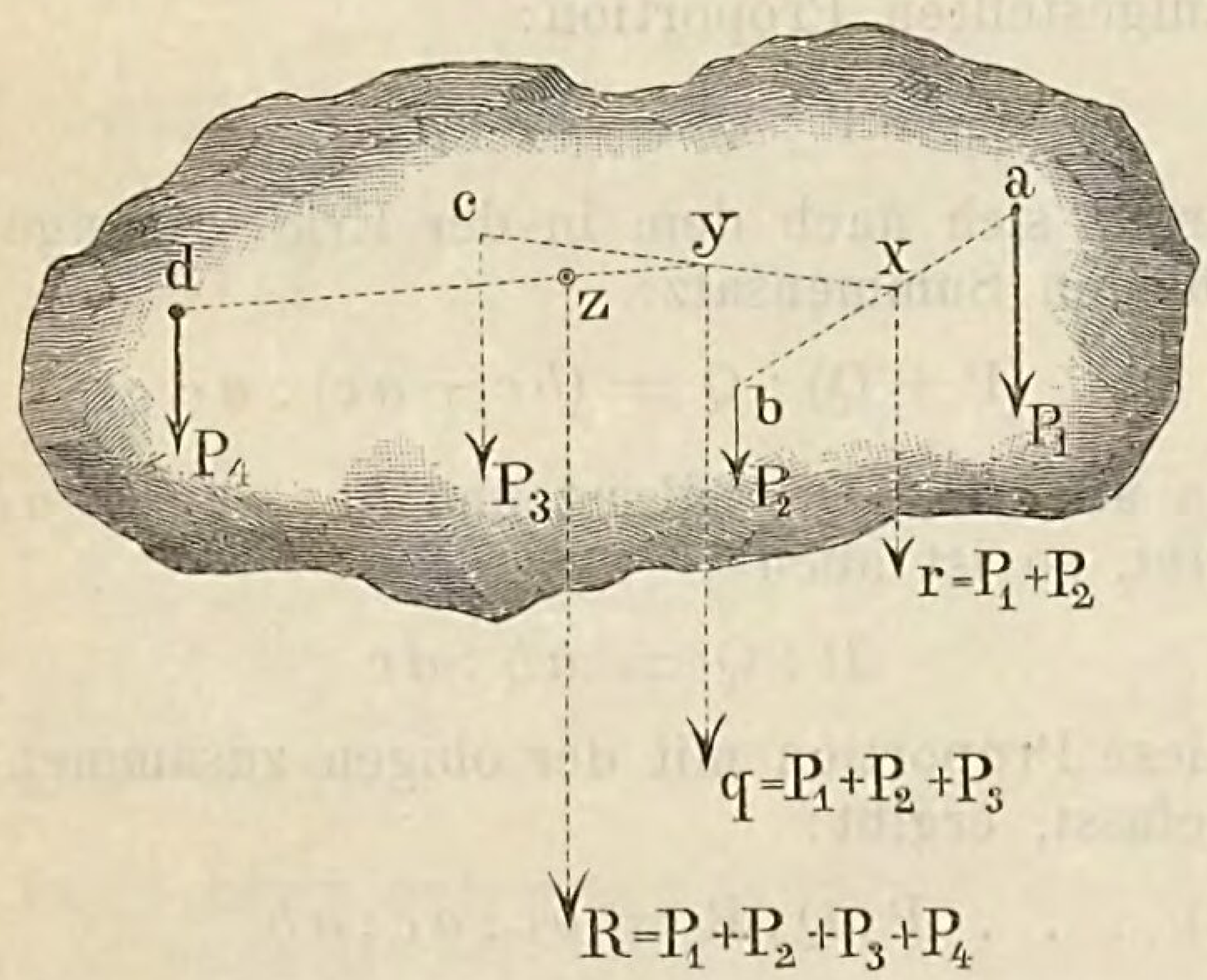
3). Nach Zusatz 2 kann man eine auf einen Körper wirkende Kraft in zwei derselben parallele und gleichgerichtete Seitenkräfte zerlegen, deren Summe indes immer der gegebenen Kraft gleich sein muss und deren Intensitäten immer im umgekehrten Verhältnis der Entfernungen ihrer Angriffspunkte vom Angriffspunkt der Resultierenden stehen müssen.

Figur 56.



Frage 23. Welche Beziehungen bestehen zwischen mehr als zwei gleichgerichteten Parallelkräften und deren Resultante?

Figur 57.



Antwort. Wirken mehr als zwei gleichgerichtete Parallelkräfte auf einen Körper, so ist die Resultante derselben gleich der Summe der wirkenden Einzelkräfte, ihre Richtung parallel den Richtungen der Einzelkräfte und ihr Angriffspunkt hat eine ganz bestimmte Lage, die sich auf folgende Weise ermitteln lässt:

Man vereinigt zunächst die beiden Kräfte P_1 und P_2 zu einer Resultante $r = P_1 + P_2$, zieht die feste Verbindungslinie $a\,b$, auf welcher der Angriffspunkt x der Resultante r liegen muss, und zwar nach Gleichung 1). in Antwort auf Frage 20, so, dass

$$\overline{ax} : \overline{bx} = P_2 : P_1$$

also dass

$$\overline{ax} = \frac{P_2 \,.\, \overline{bx}}{P_1}$$

oder:

$$\overline{ax} : \overline{ab} = P_2 : r$$

hieraus ergibt sich für

$$\overline{ax} = \frac{P_2 \,.\, \overline{ab}}{r}$$

Da die Angriffslinie ab gegeben sein muss, so lässt sich hiernach ax stets berechnen. Ferner zieht man die feste Verbindungslinie xc und nimmt $r + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$ zu einer neuen Resultante q zusammen.

Die Entfernung xy des Angriffspunktes y der Resultante q von der grösseren Kraft r findet man wieder nach Gleichung 1). durch die Proportion:

$$\overline{xy} : \overline{cx} = P_3 : q$$

woraus man

$$\overline{xy} = \frac{\overline{cx} \,.\, P_3}{q}$$

erhält.

Die zuletzt erhaltene Kraft q setzt man wieder mit der noch übrigen Kraft P_4 zusammen und erhält so:

$$R = q + P_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Um den Angriffspunkt z der Endresultante zu finden, hat man wieder:

$$\overline{yz} : \overline{yd} = P_4 : R$$

woraus man

$$\overline{yz} = \frac{\overline{yd} \,.\, P_4}{R}$$

erhält.

Entsprechend fährt man fort, wenn noch mehr als 4 Kräfte gegeben sind.

Erkl. 78. Den Angriffspunkt z der Resultante R mehrerer Parallelkräfte nennt man den Mittelpunkt der Kräfte. Derselbe hat folgende zwei Eigenschaften:

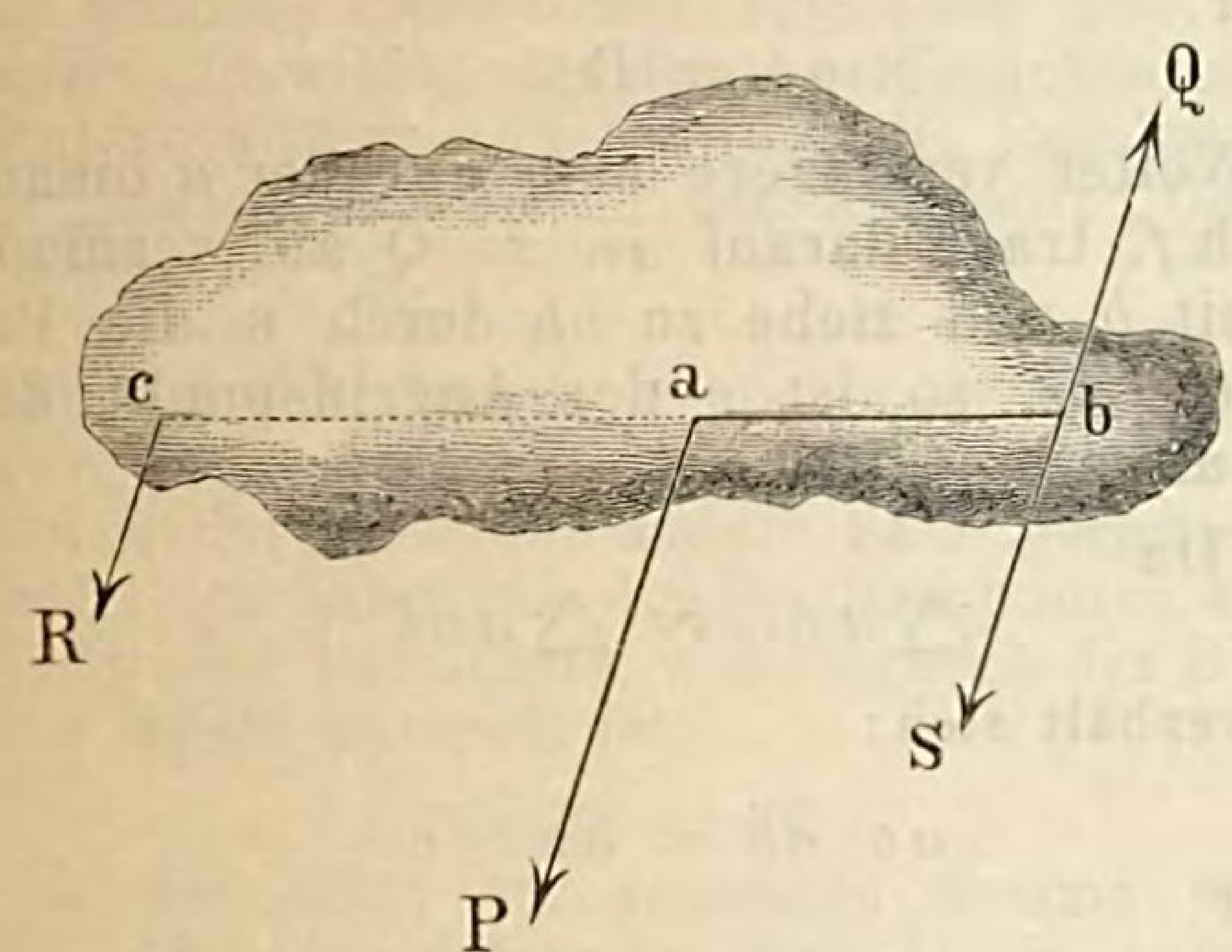
1). Bringt man im Mittelpunkt der gleichgerichteten Parallelkräfte eine Kraft gleich der Summe derselben an, so hat letztere dieselbe Wirkung, wie alle Seitenkräfte zusammen.

2) Bringt man in dem Mittelpunkt der gleichgerichteten Parallelkräfte eine Kraft an, welche der Resultante an Intensität gleich, aber derselben entgegengesetzt gerichtet ist, so werden alle Seitenkräfte dadurch aufgehoben. Wird also ein Körper im Mittelpunkt der gleichgerichteten Parallelkräfte unterstützt, so wird derselbe in jeder Lage im Gleichgewicht sein, vorausgesetzt, dass die Kräfte immer parallel und ihre Angriffspunkte dieselben bleiben.

b. Ueber die Beziehungen, welche zwischen entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften und deren Resultante bestehen.

Frage 24. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei Parallelkräften, welche in entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirken, und ihrer Resultante?

Figur 58.



Antwort. Um die Beziehungen zu erfahren, welche zwischen zwei entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften und deren Resultante bestehen, denke man sich von den beiden, in den Punkten *a* und *b* angreifenden Kräften P und Q, s. Fig. 58, die grössere Kraft P in zwei Seitenkräfte R und S zerlegt. Da man die eine derselben, z. B. S beliebig gross wählen kann, so nehme man S = Q an und lasse sie in demselben Punkt *b* angreifen, wodurch (nach Satz 4 in Antwort auf Frage 11) die Wirkung von Q aufgehoben wird. Es bleibt demnach nur noch die Wirkung der zweiten Seitenkraft R = P — S = P — Q übrig und das ist im vorliegenden Fall die Resultante; oder:

$$R = P - Q$$

Satz 10. Wirken zwei entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte auf einen Körper, so ist deren Resultante gleich der Differenz der Kräfte, ihr Angriffspunkt liegt nicht zwischen den beiden Kräften, sondern ausserhalb, auf der Seite der grösseren Kraft und ist derselben gleichgerichtet.

Frage 25. Wie lässt sich der Angriffspunkt der Resultante zweier entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte durch Rechnung genau ermitteln und welche Relation besteht zwischen den einzelnen Angriffslinien?

Erkl. 79. Gleichgewicht findet auch in diesem Fall niemals statt, vielmehr muss man zur Herstellung desselben im Angriffspunkt *c* der Resultante eine Kraft = R, aber entgegengesetzt gerichtet der Resultante anbringen.

Ist P = Q also bei entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften R = 0, so ist folgendes zu erörtern: Aus nebenstehender Gleichung

$$\overline{ac} = \frac{\overline{ab} \cdot Q}{R}$$

folgt, wenn $\overline{ab}$ und Q unverändert bleiben, dagegen P und somit auch R immer kleiner wird, endlich P = Q und somit R = 0 werden muss. $\overline{ac}$ nimmt dagegen immerfort zu und ist unendlich gross, sobald R = 0 ist, d. h. zwei gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte haben zur Resultante die im Unendlichen angreifende Kraft 0, sie haben also keine Resultante, lassen sich also niemals durch eine Kraft ersetzen. (Siehe den Abschnitt über Kräftepaare.)

Antwort. Um die Entfernung $\overline{ac}$ des Angriffspunktes der Resultante zweier entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte von dem Angriffspunkt der grösseren Kraft P zu finden, nimmt man den früher bewiesenen Satz 9 zu Hilfe, dass sich der kleinere Abschnitt der Angriffslinie zum grösseren und zur Summe beider verhält, wie die kleinere Kraft zur grösseren, zur Summe beider, oder:

$$\overline{ab} : \overline{ac} : \overline{bc} = R : Q : P_1$$

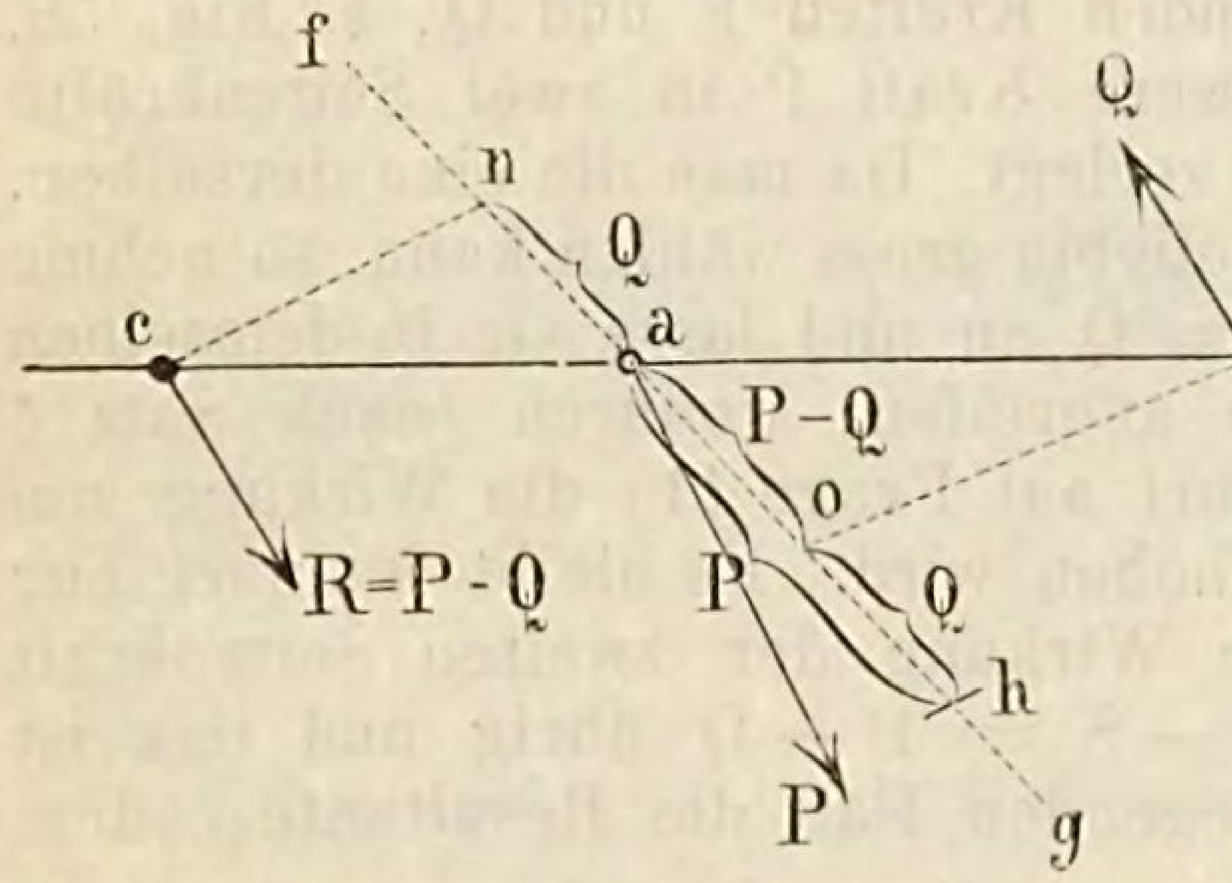
woraus:

$$1). \quad \overline{ac} = \frac{\overline{ab} \cdot Q}{R} \quad \text{(siehe Fig. 58)}^{1)}$$

[1]) Siehe Erkl. 79.

Frage 26. Wie lässt sich der Angriffspunkt der Resultante zweier entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte durch Konstruktion ermitteln?

Figur 59.



Antwort. Den Angriffspunkt der Resultante zweier entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte ermittelt man durch Konstruktion, indem man durch den Angriffspunkt a (s. Fig. 59) der grösseren Kraft P eine Gerade $\overline{ag}$ unter ziemlich spitzem Winkel zieht; darauf trage man $\overline{ah} = P$ und $\overline{oh} = Q$ ab, so ist:

$$\overline{ao} = P - Q$$

oder:

$$\overline{ao} = R$$

Weiter verlängere man $\overline{ag}$ über a hinaus nach f, trage darauf $\overline{an} = Q$ ab, verbinde o mit b und ziehe zu $\overline{ob}$ durch n die Parallele $\overline{nc}$, so ist c der Angriffspunkt der Resultante.

Da

$$\triangle anc \sim \triangle aob$$ [1]

so verhält sich:

$$\overline{ao} : \overline{ab} = \overline{an} : \overline{ac}$$

oder:

$$R : \overline{ab} = Q : \overline{ac}$$

oder:

$$R : Q = \overline{ab} : \overline{ac}$$

woraus:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{ac} = \frac{\overline{ab} \cdot Q}{R}$$

entsprechend der obigen Gleichung 1).

[1]) d. h. Dreieck anc ähnlich Dreieck aob.

Frage 27. Welche Beziehungen bestehen zwischen mehr als zwei entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften und ihrer Resultante?

Antwort. Wirken mehr als zwei entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte auf einen Körper, so kann man zunächst die nach der einen Seite wirkenden Kräfte, z. B. P_1 und P_2 in Fig. 60 zu einer Resultante r, dann die beiden nach der andern Seite wirkenden, nämlich P_3 und P_4 zu einer Resultante q zusammensetzen und endlich zwischen r und q die Endresultante R bestimmen. Man ziehe an b in beliebiger Richtung die Gerade $\overline{bf}$, mache $\overline{bg} = P_1$ und $\overline{gh} = P_2$, verbinde h mit a und ziehe von g aus eine Parallele zu $\overline{ha}$, so ist x der Angriffspunkt der Resultante:

$$r = P_1 + P_2$$

nach Satz 8 in Antwort auf Frage 20 ist

$$P_1 : r = \overline{bx} : \overline{ba}$$

hieraus erhält man für

Erkl. 80. Aus nebenstehender Antwort ergeben sich folgende Sätze:

1). Ist die Summe r der nach der einen Seite gerichteten Kräfte gleich der Summe q der nach der andern Seite gerichteten Kräfte, so fallen entweder die Angriffspunkte der beiden gleichen Resultanten zusammen und sind im Gleichgewicht, oder die Angriffspunkte fallen nicht zusammen, dann bilden die Resultanten ein Kräftepaar. (Siehe den Abschnitt „Ueber Kräftepaare".)

2). Ist die Summe r der nach der einen Seite gerichteten Kräfte verschieden von der Summe der nach der andern Seite gerichteten Kräfte, so haben die beiden Resultanten stets wieder eine Resultante, welche gleich der Differenz beider Summen ist:

$$R = r - q$$

nach der Seite der grösseren Summe wirkt und deren Angriffspunkt nach der in Antwort auf Frage 25 und 26 enthaltenen Theorie zweier entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte gefunden wird.

$$\overline{bx} = \frac{P_1 \cdot \overline{ba}}{r}$$

Verbindet man in gleicher Weise P_3 und P_4 zu einer Resultante q, zieht die beliebig gerichtete Linie $\overline{dm}$, macht $\overline{nd} = P_4$ und $\overline{on} = P_3$, verbindet o mit c und zieht durch n eine Parallele zu $\overline{oc}$, so erhält man den Angriffspunkt y der aufwärts wirkenden Resultante

$$q = P_3 + P_4$$

Zur Berechnung von $\overline{dy}$ ergibt sich wieder:

$$q : P_4 = \overline{dc} : \overline{dy}$$

woraus:

$$\overline{dy} = \frac{P_4 \cdot \overline{dc}}{q}$$

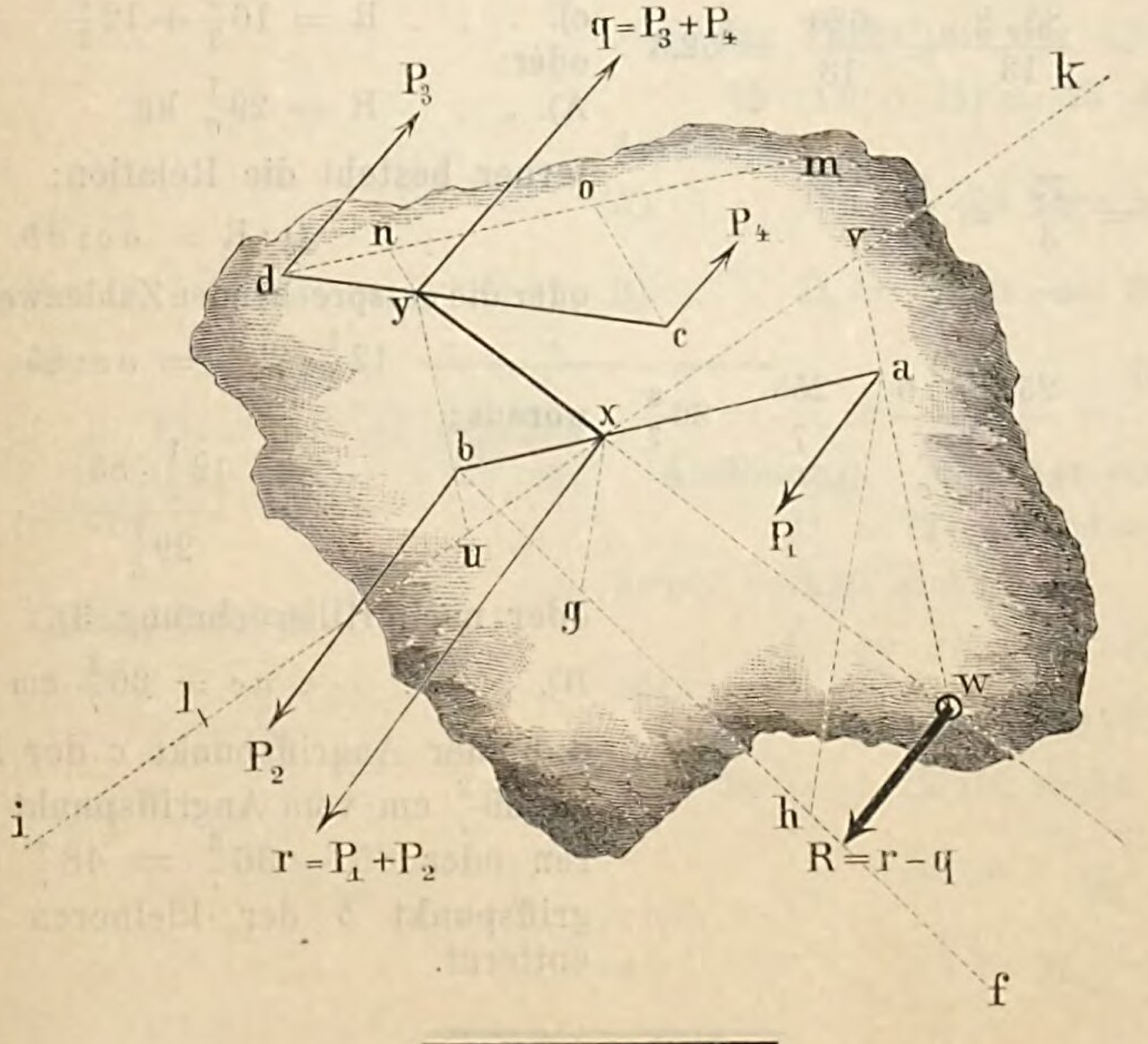
Zwischen den beiden Resultanten r und q sucht man nun eine neue Resultante, indem man durch x eine beliebig gerichtete Gerade $\overline{ik}$ zieht, $\overline{lx} = r$, $\overline{lu} = \overline{xv} = q$ macht, dann $\overline{uy}$ und parallel damit $\overline{vw}$ zieht, wodurch man den Angriffspunkt w der Resultante R erhält. Zur Berechnung der Strecke $\overline{wx}$ benutzt man die Proportion:

$$q : R = \overline{xw} : \overline{xy}$$

woraus:

$$\overline{xw} = \frac{q : \overline{xy}}{R}$$

Figur 60.

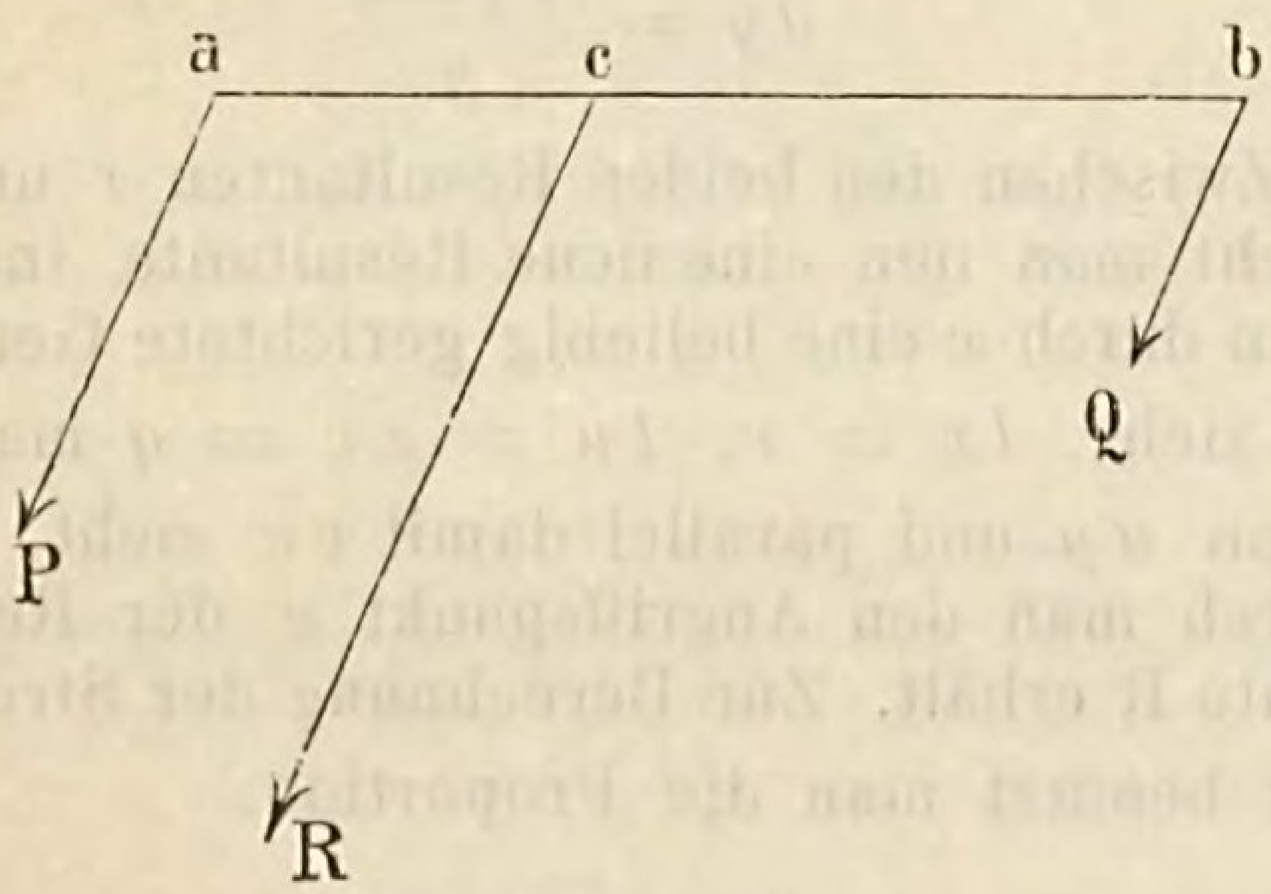


α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 76. An den beiden Enden einer Stange von 85 cm Länge wirken zwei gleichgerichtete Parallelkräfte. Wie gross ist die Resultante und wo muss dieselbe angreifen, wenn:

a) $P = 80$, $Q = 50$ kg
b) $P = 75$, $Q = 180$ kg
c) $P = 16^2/_3$, $Q = 12^1/_2$ kg ist?

Figur 61.



Hilfsrechnungen:

1). . . $\frac{85 \cdot 80}{130} = \frac{85 \cdot 8}{13} = \frac{680}{13} = 52{,}3$

2). . . $\frac{75 \cdot 85}{255} = \frac{75}{3} = 25$

3). . . $\frac{12\frac{1}{2} \cdot 85}{29\frac{1}{6}} = \frac{25 \cdot 85 \cdot 6}{2 \cdot 175} = \frac{255}{7} = 36\frac{3}{7}$

Auflösung. Nach Gleichung 1). in Antw. auf Frage 19 hat man für die Grösse der Resultante:

A). . . $R = 80 + 50 = 130$ kg

Nach Gleich. 3). in Antw. auf Frage 22 ist:

$$\overline{ac} : \overline{ab} = 80 : 130$$

B). . . $\overline{ac} = \frac{85 \cdot 80}{130} = 52{,}3$ cm (s. Hilfsr. 1)

d. h. die Resultante muss in 52,3 cm Entfernung vom Angriffspunkt b der kleineren Kraft Q oder in $85 - 52{,}3 = 32{,}7$ cm Entfernung von dem Angriffspunkt a der grösseren Kraft P angreifen, siehe Fig. 61.

b). . . . $R = 75 + 180$
oder:
A). . . . $R = 255$ kg

ferner besteht die Relation:

$$P : R = \overline{bc} : \overline{ab}$$

oder:

$$75 : 255 = \overline{bc} : 85$$

woraus man

$$\overline{bc} = \frac{75 \cdot 85}{255}$$

oder nach Hilfsrechnung 2:

B). $\overline{bc} = 25$ erhält,

d. h. der Angriffspunkt c der Resultante R ist 25 cm vom Angriffspunkt b oder $85 - 25 = 60$ cm von dem Angriffspunkt a entfernt.

c). . . . $R = 16\frac{2}{3} + 12\frac{1}{2}$
oder:
A). . . . $R = 29\frac{1}{6}$ kg

ferner besteht die Relation:

$$Q : R = \overline{ac} : \overline{ab}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$12\frac{1}{2} : 29\frac{1}{6} = \overline{ac} : 85$$

woraus:

$$\overline{ac} = \frac{12\frac{1}{2} \cdot 85}{29\frac{1}{6}}$$

oder nach Hilfsrechnung 3).:

B). $\overline{ac} = 36\frac{3}{7}$ cm

d. h. der Angriffspunkt c der Resultante R ist $36\frac{3}{7}$ cm vom Angriffspunkt a der grösseren oder $85 - 36\frac{3}{7} = 48\frac{4}{7}$ cm vom Angriffspunkt b der kleineren Parallelkraft entfernt.

Aufgabe 77. An einer, in ihren beiden Endpunkten unterstützten Stange von 120 cm Länge hängen 90 kg in a) 30, b) 50, c) 75 cm Entfernung von dem einen Stützpunkt. Wie verteilt sich in jedem Fall die Last auf beide Stützpunkte?

Auflösung. Es ist in diesem Fall die gegebene Kraft von 90 kg in zwei mit ihr parallele und gleichgerichtete Seitenkräfte zu zerlègen, die als Druck wirken und sich umgekehrt verhalten wie ihre Entfernungen vom Angriffspunkt der Last.

a) Beträgt die Entfernung des Angriffspunktes der Last von dem einen Stützpunkt 30 cm, so beträgt dieselbe vom andern Stützpunkt, da die Stange 120 cm Länge hat, $120 - 30 = 90$ cm. Die Entfernungen verhalten sich demnach wie $30 : 90 = 1 : 3$ und der der Last nähergelegene Stützpunkt hat somit $\frac{3}{4} \cdot 90 = 67\frac{1}{2}$ kg, der andere Stützpunkt dagegen $\frac{1}{4} \cdot 90 = 22\frac{1}{2}$ kg Druck zu erleiden.

b) Ist die Last 50 cm von dem einen Stützpunkt entfernt, dann verhalten sich die Abstände wie:

$$50 : (120 - 50) = 50 : 70 \text{ oder } 5 : 7$$

demnach erleidet der der Last nähergelegene Stützpunkt einen Druck von:

$$D = \frac{7}{12} \cdot 90$$

oder:

A). . . $D = 52\frac{1}{2}$ kg

und der von der Last entfernter liegende Stützpunkt einen Druck von:

B). . . $D = \frac{5}{12} \cdot 90$ oder $37\frac{1}{2}$ kg

c) das Verhältnis der Abstände ist:

$$75 : (120 - 75) = 75 : 45 \text{ oder } 5 : 3$$

demnach:

A). . . $D = \frac{5}{8} \cdot 90$ oder $56\frac{1}{4}$ kg

B). . . $D_1 = \frac{3}{8} \cdot 90$ oder $33\frac{3}{4}$ „

Aufgabe 78. In Figur 61 sei gegeben $R = 72$ kg, $P = 20$ kg und $\overline{ac} = 25$ cm; wie gross ist $\overline{ab}$ und Q?

Hilfsrechnung.

$$\frac{25 \,.\, 72}{52} = \frac{25 \,.\, 18}{13} \qquad \begin{array}{l} 25 \,.\, 18 = \\ \hline 450 : 13 = 34\frac{8}{13} \\ \underline{60} \\ \underline{\;\;8} \end{array}$$

Auflösung. Man hat zunächst:

$$Q = 72 - 20 \text{ oder } 52 \text{ kg}$$

ferner verhält sich:

$$\overline{bc} : \overline{ac} : \overline{ab} = 20 : 52 : 72$$

oder:

$$\overline{ac} : \overline{ab} = 52 : 72$$

oder da $\overline{ac} = 25$ ist, so ist:

$$\overline{ab} = \frac{25 \,.\, 72}{52}$$

oder:

A). $\overline{ab} = 34\frac{8}{13}$ cm (s. Hilfsrechn.)

Aufgabe 79. Eine Kraft von 385 kg soll in zwei gleichgerichtete Parallelkräfte zerlegt werden, deren eine = 150 kg gross und 2 m von der gegebenen Kraft entfernt sein soll. Wie gross ist die zweite Seitenkraft und wie weit ist ihr Angriffspunkt vom Angriffspunkt der 385 kg entfernt?

Hilfsrechnung.

$$\frac{2 \cdot 150}{235} = 60 : 47 = 1{,}276$$

```
47
---
130
 94
---
360
329
---
```

Auflösung. Für die fehlende Seitenkraft hat man:

$$P = 385 - 150 \text{ oder } 235 \text{ kg}$$

Bezeichnet man ferner den kleineren Abstand zwischen den Angriffspunkten der drei Kräfte mit $\overline{ac}$, den grösseren mit $\overline{bc}$, so besteht die Relation:

$$\overline{ac} : \overline{bc} = 150 : 235$$

oder da $\overline{bc} = 2$ m gegeben ist, so ist:

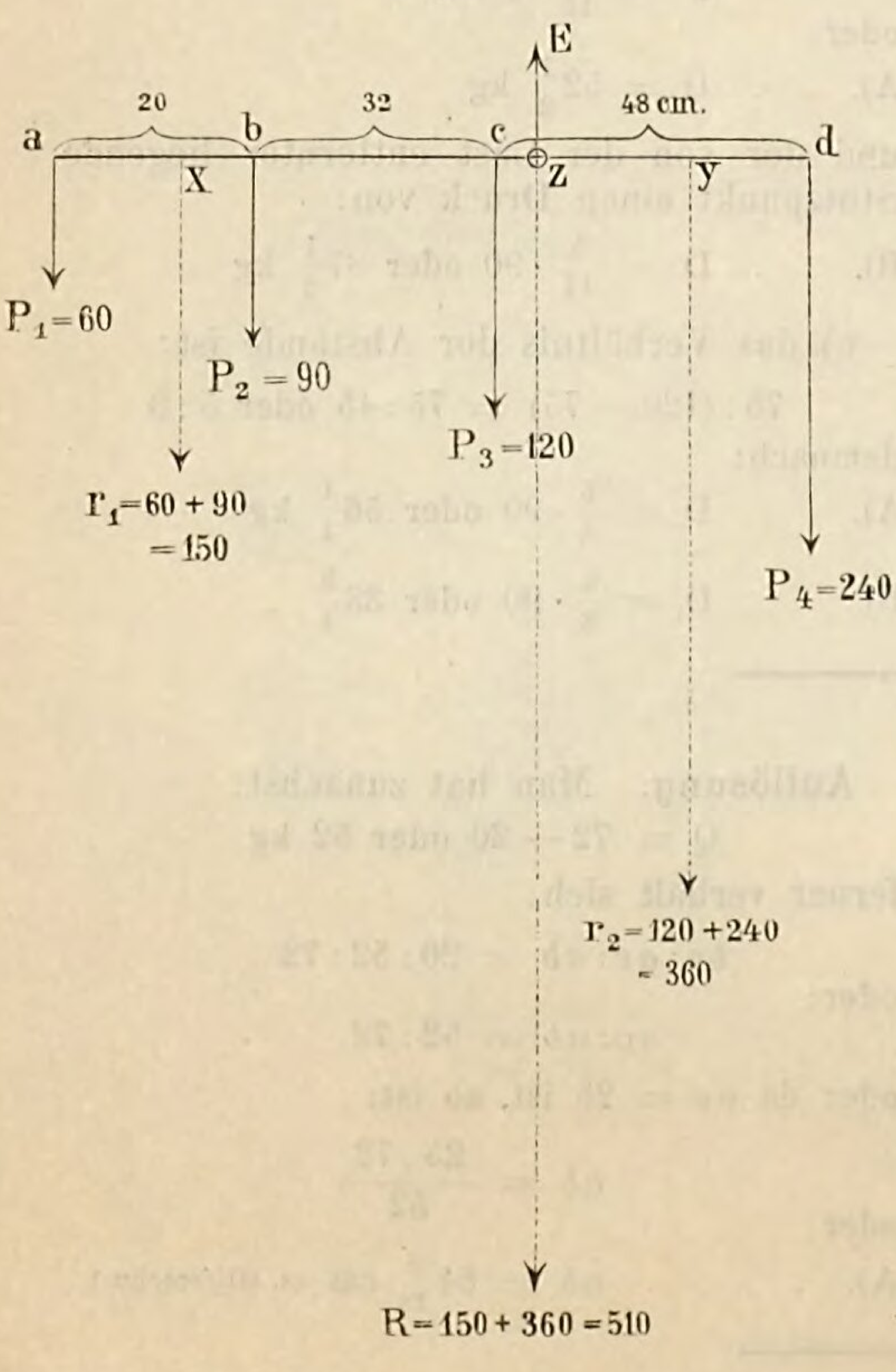
$$\overline{ac} = \frac{2 \cdot 150}{235}$$

oder:

$$\overline{ac} = 1{,}276 \text{ m (siehe Hilfsrechn.)}$$

Aufgabe 80. An einer Stange von 1 m Länge hängen in den, in Fig. 62 angegebenen Abständen, 4 Gewichte von 60, 90, 120 und 240 g. Wo muss die Stange unterstützt werden, um im Gleichgewicht zu sein und welchen Druck erleidet der Stützpunkt?

Figur 62.



Auflösung. Man sucht zunächst die Resultante der beiden Kräfte P_1 und P_2:

$$r_1 = 60 + 90 \text{ oder } 150 \text{ kg}$$

und deren Abstand $\overline{bx}$. Nach den in Antwort auf Frage 22 gegebenen Gleichungen lässt sich folgende Proportion aufstellen:

$$\overline{bx} : \overline{ba} = 60 : 150$$

oder:

$$\overline{bx} = \frac{20 \cdot 60}{150}$$

oder:

A). . . . $\overline{bx} = 8$ cm

Weiter ist die Resultante der beiden Kräfte P_3 und P_4:

$$r_2 = 120 + 240 \text{ oder } 360 \text{ kg}$$

und ihr Abstand ergibt sich aus der Proportion:

$$\overline{dy} : \overline{dc} = 120 : 360$$

hieraus erhält man für

$$\overline{dy} = \frac{48 \cdot 120}{360}$$

oder:

B). . . . $\overline{dy} = 16$ cm

Endlich ist noch die Resultante R der beiden Resultanten $r_1 = 150$ und $r_2 = 360$ zu ermitteln, wonach:

C). R = 510 kg

Die Entfernung

$$\overline{xy} = \overline{bx} + \overline{bc} + \overline{cy}$$

oder:

$$\overline{xy} = 8 + 32 + 32 = 72 \text{ cm}$$

Ferner ist:

$$\overline{zy} : \overline{xy} = 150 : 510$$

hieraus erhält man für

$$\overline{zy} = \frac{72 \,.\, 150}{510}$$

oder:

$$\overline{zy} = 21{,}18 \text{ cm}$$

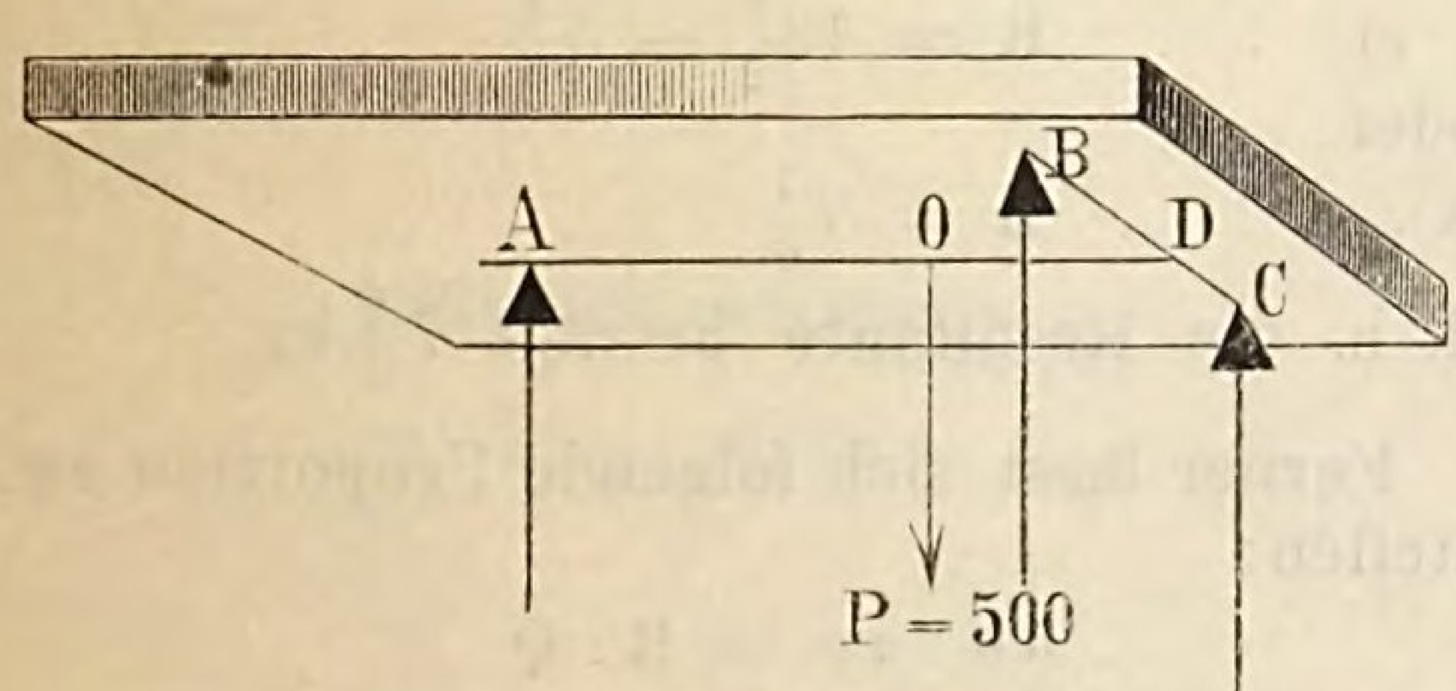
hierzu $\overline{dy} = 16$ cm gezählt, gibt:

D). . . . $\overline{dz} = 37{,}18$ cm

d. h. der Stützpunkt z muss 37,18 cm vom Endpunkt d entfernt angebracht werden und hat, abgesehen von dem Gewicht der Stange, 510 kg zu tragen.

Aufgabe 81. Eine wagerechte Platte (Figur 63) ruhe auf drei Punkten A, B, C und trage in O eine Last P von 500 kg. Die Entfernung AD senkrecht zu BC sei 4 m, BC aber 3 m und AO : OD = 3 : 2, BD : CD = 4 : 3. Welcher Druck wird auf jeden der drei Stützpunkte ausgeübt?

Figur 63.



Auflösung. Da:

$$\overline{AO} : \overline{OD} = 3 : 2$$

so hat zunächst der Stützpunkt:

$$A = \frac{2}{5} \cdot 500 \text{ kg oder } 200 \text{ kg}$$

Druck zu erleiden, während die übrigen 300 kg auf dem Punkt D lasten. Diese 300 kg verteilen sich auf die beiden Stützpunkte B und C und zwar, da:

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 4 : 3$$

so hat:

$$B = \frac{7}{3} \cdot 300$$

oder:

$$B = 128\tfrac{4}{7} \text{kg}$$

und

$$C = \frac{4}{7} \cdot 300$$

oder:

$$C = 171\tfrac{3}{7} \text{ kg}$$

zu tragen.

Aufgabe 82. Auf 2 Punkten eines Körpers wirken die beiden entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte P und Q in 180 cm Entfernung. Wie gross ist die Resultante R und wo liegt deren Angriffspunkt, wenn:

a) P = 250 und Q = 312 kg

b) P = 97 „ Q = 153 „

c) P = $12\frac{1}{2}$ „ Q = $5\frac{1}{3}$ kg

Auflösung. Für die Resultante R hat man nach Antwort auf Frage 24:

$$R = 312 - 250$$

oder:

A). . . . R = 62 kg

Nach Antwort auf Frage 25 lässt sich folgende Proportion aufstellen:

$$\overline{ab} : \overline{ac} = R : P$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$180 : \overline{ac} = 62 : 250$$

Hilfsrechnungen:

1). . . $\overline{ac} = \frac{180 \cdot 250}{62}$

oder: $\overline{ac} = \frac{90 \cdot 250}{31}$

$\frac{90 \cdot 250}{31} = \frac{22500}{31}$

```
31 : 22500 = 726
     217
      80
      62
     180
```

2). . . $\overline{ac} = \frac{180 \cdot 97}{56}$

oder: $\overline{ac} = \frac{45 \cdot 97}{14}$

```
45 . 97
    315
   405
   4365 : 14 = 312
   42
    16
    14
     25
```

3). . . $\overline{ac} = \frac{180 \cdot 5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{6}}$

oder: $\overline{ac} = \frac{180 \cdot 16 \cdot 6}{43 \cdot 3}$

oder: $\overline{ac} = \frac{5760}{43}$

```
5760 : 43 = 134
43
146
129
 170
 172
```

hieraus erhält man für

B). . . . $\overline{ac} =$ ca. 726 (siehe Hilfsrechn. 1)

d. h. die Resultante R wirkt in 726 cm Entfernung vom Angriffspunkt der Kraft Q oder in 726 + 180 = 906 cm Entfernung vom Angriffspunkt der Kraft P in gleicher Richtung wie Q.

b). . . R = 153 — 97

oder:

A). . . . R = 56

d. h. die Resultante beträgt 56 kg.

Ferner besteht die Proportion:

$$\overline{ab} : \overline{ac} = R : P$$

oder die entspr. Zahlenwerte eingesetzt:

$$180 : \overline{ac} = 56 : 97$$

woraus:

B). . . . $\overline{ac} =$ ca. 312 (siehe Hilfsrechn. 2)

d. h. die Resultante greift in 312 cm Entfernung vom Angriffspunkt der grösseren, oder in 312 + 180 = 492 cm Entfernung vom Angriffspunkt der kleineren Kraft an und wirkt in der Richtung der grösseren Kraft.

c). . . $R = 12\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3}$

oder:

A). . . . $R = 7\frac{1}{6}$

d. h. die Resultante beträgt $7\frac{1}{6}$ kg.

Ferner lässt sich folgende Proportion aufstellen:

$$\overline{ab} : \overline{ac} = R : Q$$

oder die entspr. Zahlenwerte eingesetzt:

$$180 : \overline{ac} = 7\frac{1}{6} : 5\frac{1}{3}$$

woraus:

B). . . . $\overline{ac} =$ ca. 134 (siehe Hilfsrechn. 3)

d. h. die Resultante greift in 134 cm Entfernung vom Angriffspunkt der grösseren Kraft an.

Aufgabe 83. An einer geraden Linie von 10 m Länge wirken in 5 Punkten, deren Abstände aus Fig. 64 ersichtlich sind, fünf Parallelkräfte, und zwar P = 4, P_1 = 17 und P_2 = 60 kg nach der einen, Q = 12 und Q_1 = 25 nach der entgegengesetzten Richtung. Wie gross ist die Resultante und wo liegt ihr Angriffspunkt?

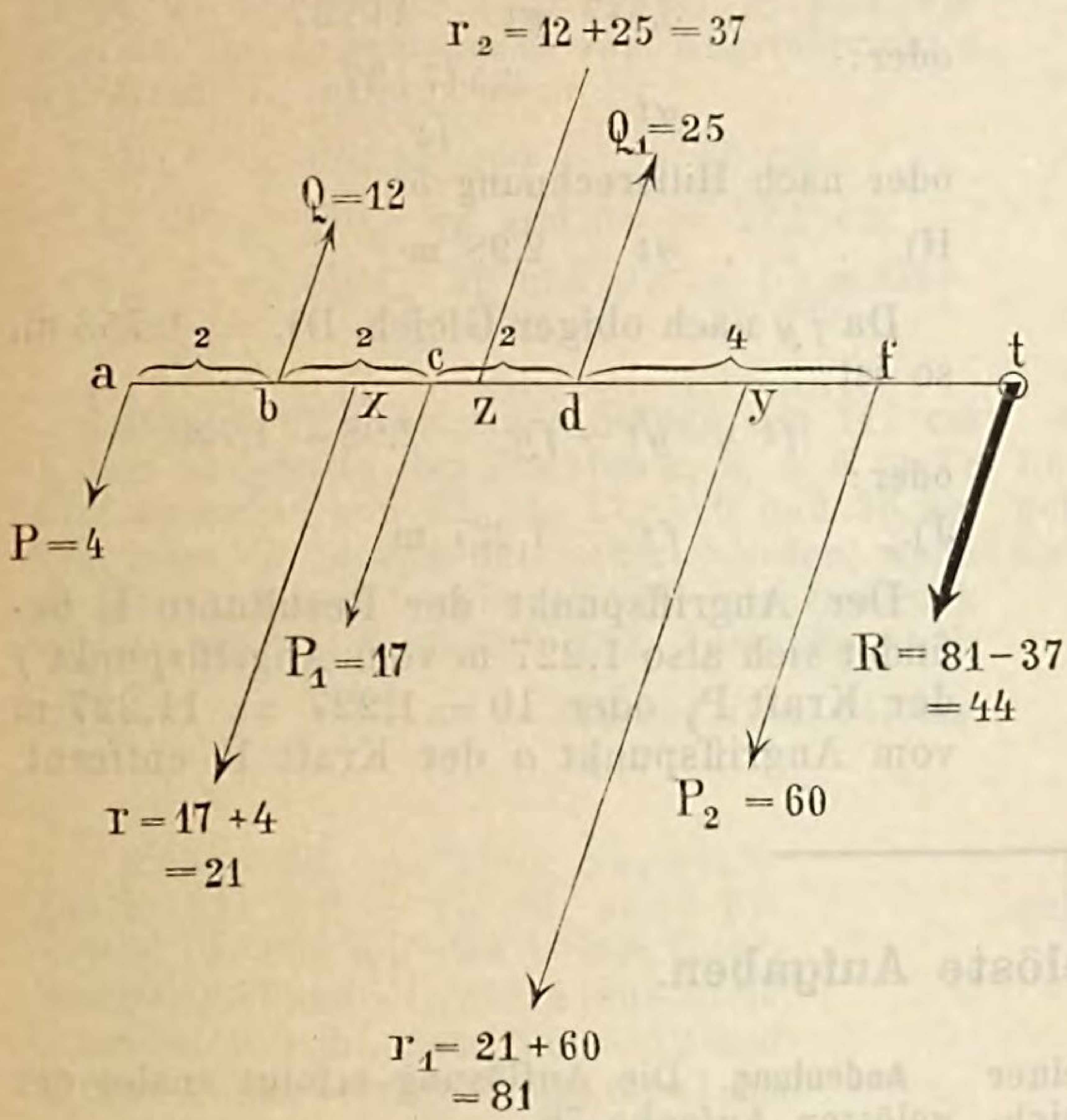
Auflösung. Man ermittelt zuerst die Resultante r_1 der nach der einen Richtung wirkenden Kräfte P, P_1 und P_2; die Resultante r von P und P_1:

A). $r = 17 + 4$

oder:

$r = 21$ kg

Figur 64.



Bezeichnet man den Angriffspunkt dieser Resultante mit x, so erhält man nach Antwort auf Frage 22 die Proportion:

$$\overline{cx} : \overline{ca} = P : r$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{cx} : 2 + 2 = 4 : 21$$

woraus:

$$\overline{cx} = \frac{16}{21}$$

oder:

B). . . $\overline{cx} = 0{,}762$ m (s. Hilfsrechn. 1)

Weiter ist die Resultante der beiden Kräfte r und P_2:

C). . . $r_1 = 21 + 60 = 81$

Bezeichnet man den Angriffspunkt dieser Resultante r_1 mit y, so ergibt sich die Proportion:

$$\overline{fy} : \overline{fx} = r : r_1$$

oder die gegebenen Zahlenwerte dafür eingesetzt:

$$\overline{fy} : 6 + 0{,}762 = 21 : 81$$

oder:

$$\overline{fy} = \frac{6{,}762 \,.\, 21}{81}$$

oder:

D). . . $\overline{fy} = 1{,}753$ m (s. Hilfsrechn. 2)

Ferner ist die Resultante der beiden Kräfte Q und Q_1:

$$r_2 = 25 + 12$$

oder:

E). . . . $r_2 = 37$

Bezeichnet man den Angriffspunkt dieser Resultante mit z, so erhält man die Proportion:

$$\overline{dz} : \overline{db} = Q : r_2$$

oder die bekannten Zahlenwerte eingesetzt:

$$\overline{dz} : 4 = 12 : 37$$

oder:

$$\overline{dz} = \frac{4 \,.\, 12}{37}$$

oder:

F). . . . $\overline{dz} = 1{,}3$ (siehe Hilfsrechn. 3)

Schliesslich ist die Resultante R der beiden Kräfte r_1 und r_2:

$$R = 81 - 37$$

oder:

G). . . . R = 44

Bezeichnet man deren Angriffspunkt, welcher nach Satz 10 in Antwort auf Frage 24 in der Figur 64 nach rechts fallen muss, mit t, so erhält man die Proportion:

Hilfsrechnungen:

1). . . . 160 : 21 = 0,762
147
130
126
40

2). . . . 6,762 . 21
6762
13524
142,002 : 81 = 1,753
81
610
567
430
405
552

3). . . 4 . 12 = 48 48 : 37 = 1,3
37
110
111

Hilfsrechnung.

4). . . $\overline{yz} = \overline{fd} + \overline{dz} - \overline{fy}$

oder: $\overline{yz} = 4 + 1{,}3 - 1{,}753$

$\overline{yz} = 5{,}3 - 1{,}753$

$\overline{yz} = 3{,}547$

5). 3,547 . 37
24829
10641
44 : 131,239 = 2,98
88
432
396
363
352
119

$\overline{yz} : \overline{yt} = R : r_2$

oder die bekannten Zahlenwerte eingesetzt ($\overline{yz} = 3{,}547$) (siehe Hilfsrechn. 4):

$$3{,}547 : \overline{yt} = 44 : 37$$

oder:

$$\overline{yt} = \frac{3{,}547 \cdot 37}{44}$$

oder nach Hilfsrechnung 5:

H). . . . $\overline{yt} = 2{,}98$ m

Da $\overline{fy}$ nach obiger Gleich. D). = 1,753 m, so ist:

$$\overline{ft} = \overline{yt} - \overline{fy} = 2{,}98 - 1{,}753$$

oder:

J). . . . $\overline{ft} = 1{,}227$ m

Der Angriffspunkt der Resultante R befindet sich also 1,227 m vom Angriffspunkt f der Kraft P_2 oder $10 + 1{,}227 = 11{,}227$ m vom Angriffspunkt a der Kraft P entfernt.

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 84. An den beiden Enden einer 50 cm langen Stange wirken die beiden gleichgerichteten Parallelkräfte P und Q; wie gross ist die Resultante und wo ist deren Angriffspunkt, wenn:
a) P = 200, Q = 50 kg
b) P = 345, Q = 218 „
c) P = 88,537, Q = 65,315 kg ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 76.

Aufgabe 85. Ueber eine horizontale Brücke von 24 m Spannweite fährt eine Lokomotive von 40 t Gewicht. Wie verteilt sich ihre Last auf beide Widerlager, wenn sie a) 6, b) 12, c) 20 m von dem einen entfernt ist?

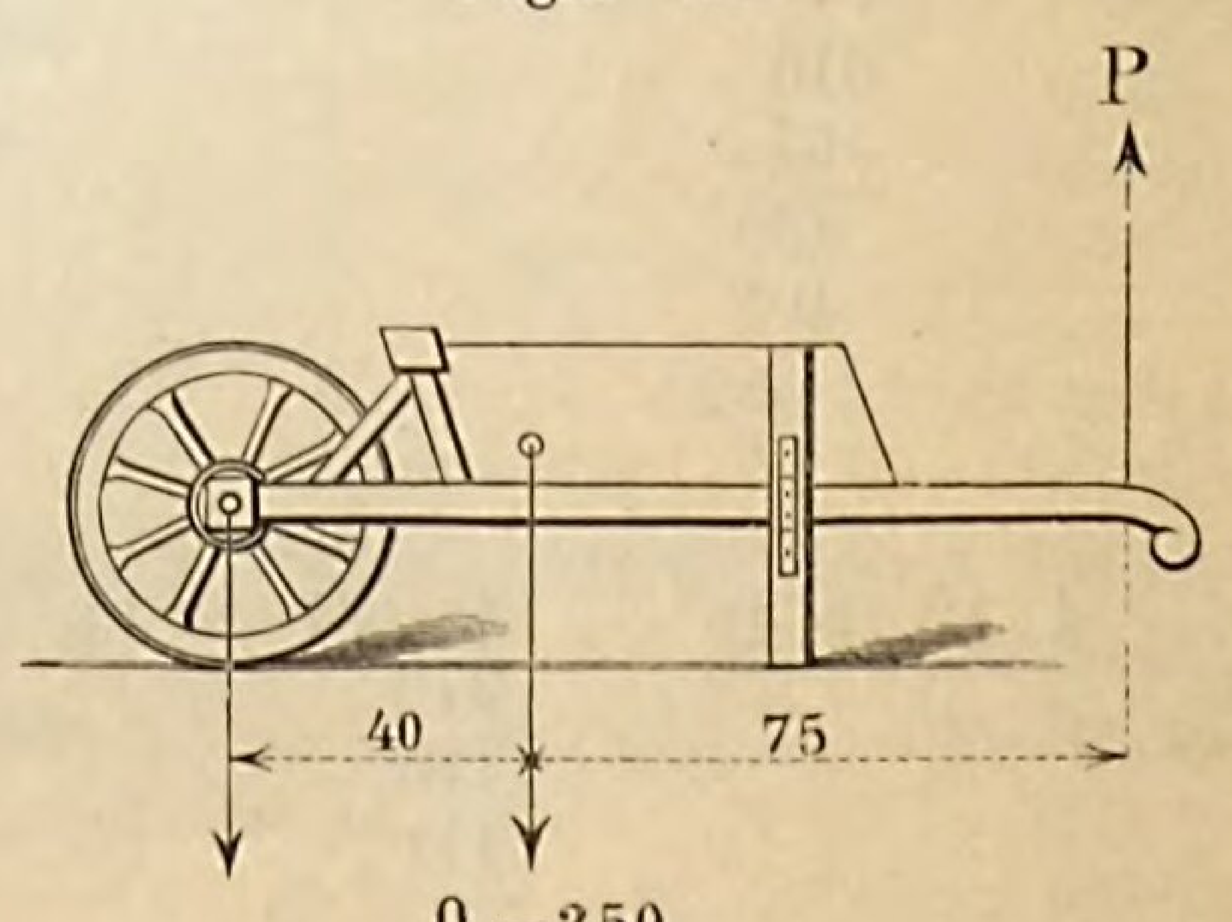
Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 77.

Aufgabe 86. An einem einrädrigen Schiebkarren wirken in den Entfernungen a und b von der Radachse die Last Q und die Kraft P des Arbeiters. Wie gross ist diese letztere und der Druck auf die Achse des Rades?

(Q = 250 kg, a). = 40, b). = 75 cm.)

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 77. (Siehe Figur 65.)

Figur 65.



Aufgabe 87. Eine Kraft R = 490 kg soll in zwei gleichgerichtete Parallelkräfte zerlegt werden, deren eine P, sowohl der Grösse als auch der Entfernung $\overline{ac}$ nach bestimmt ist. Wie gross ist die zweite Parallelkraft Q und wie weit ist ihr Angriffspunkt vom Angriffspunkt *c* der Kraft R entfernt, wenn:

a). P = 120 kg und $\overline{ac}$ = 80 cm

b). P = 310,5 kg und $\overline{ac}$ = 22,5 cm

c). P = $213\frac{11}{12}$ kg und $\overline{ac}$ = $1\frac{1}{2}$ m ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der Lösung der Aufgabe 79.

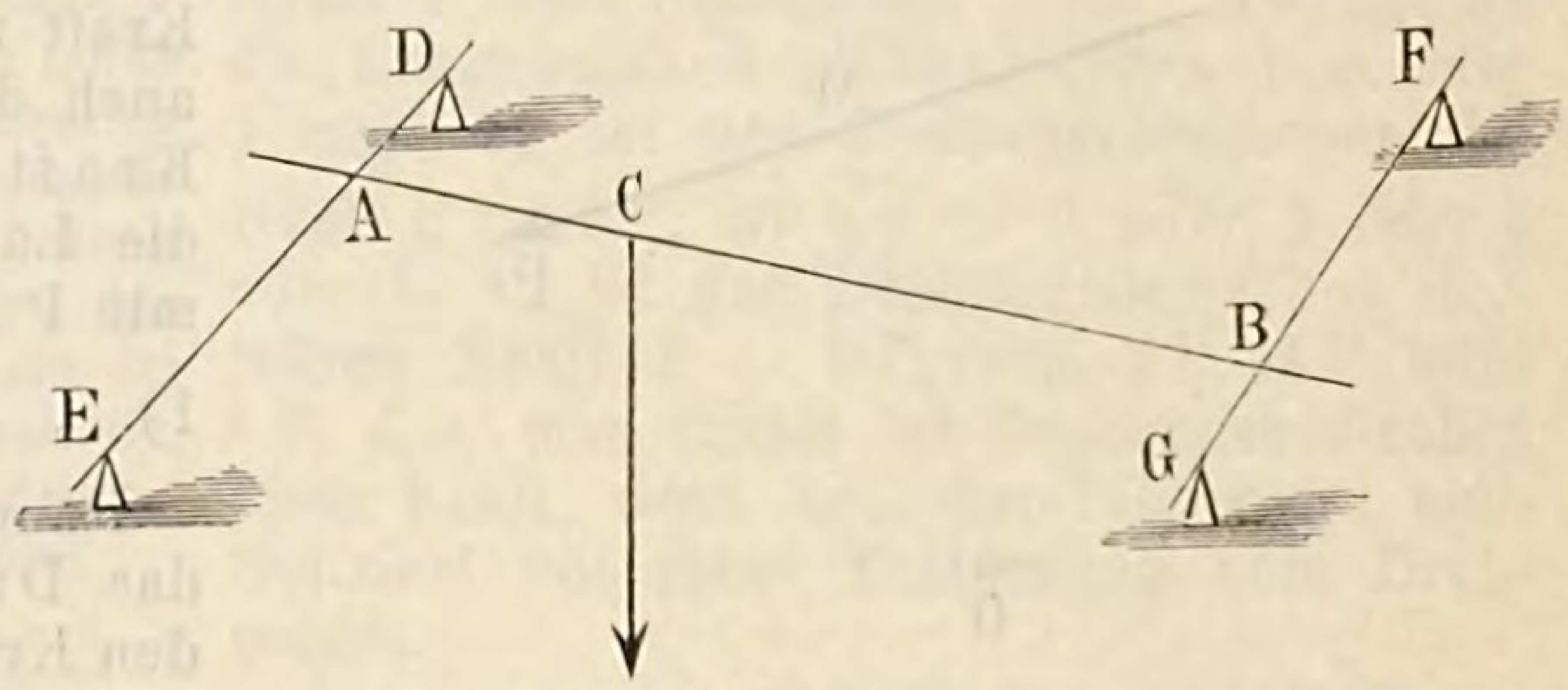
Aufgabe 88. An einer Stange von 147 cm Länge hängen in den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* und *e* fünf Gewichte von 79, 65, 27, 120 und 36 kg. Wo muss die Stange unterstützt werden, wenn sie im Gleichgewicht sein soll und welchen Druck erleidet der Stützpunkt? Die Abstände sind: $\overline{ab} = 25$, $\overline{ac} = 63$, $\overline{ad} = 112$ und $\overline{ae} = 147$ cm.

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der Lösung der Aufgabe 80. Da hier 5 Kräfte gegeben sind, so ist hier eine Partialresultante mehr zu berechnen als in Aufgabe 80.

Aufgabe 89. An einer wagerechten Stange AB = 50 cm, siehe Figur 66, welche auf den beiden Querstangen ED und FG, deren jede 35 cm lang ist, so ruht, dass AD = 12 und BG = 10 cm beträgt, hängt eine Last von 380 kg in der Entfernung AC = 20 cm. Welchen Druck hat jeder der vier Stützpunkte D, E, F und G zu erleiden?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 81.

Figur 66.



Aufgabe 90. Auf 2 Punkte einer geraden Linie wirken die beiden entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte P und Q in 42 cm Entfernung. Wie gross ist die Resultante R und wo liegt deren Angriffspunkt, wenn:

a). P = 40, Q = 100 kg

b). P = $37\frac{1}{2}$, Q = $28\frac{3}{4}$ kg

c). P = 7,583, Q = 5,372 „ ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 82.

Aufgabe 91. Fünf parallele Kräfte von 50, 30, 70, 90 und 120 kg wirken an fünf Punkten einer geraden Linie, wobei die Kräfte von 30 und 120 kg den übrigen gerade entgegengesetzt gerichtet sind. Von dem Angriffspunkt *a* der ersten Kraft von 50 kg haben die Angriffspunkte der übrigen Kräfte eine Entfernung von 50, 120, 210 und 320 cm. Wo liegt der Angriffspunkt der Resultante und wie gross ist dieselbe?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich analog der gelösten Aufgabe 83.

Anmerkung 3. Ehe wir zu der allgemeinsten Aufgabe, zu der Vereinigung von Kräften übergehen, die an beliebig vielen, fest miteinander verbundenen Punkten nach den verschiedensten Richtungen, sowohl in einer Ebene als in verschiedenen Ebenen wirksam sind, ist es nötig, die statischen Momente und die Kräftepaare näher kennen zu lernen.

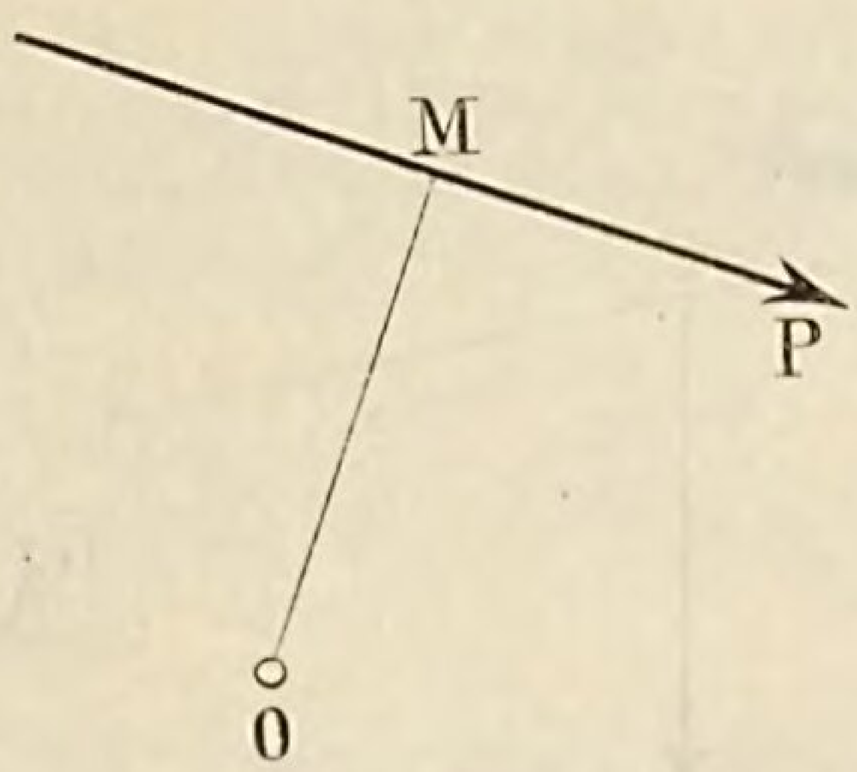
6). Ueber statische Momente.

a. Ueber die statischen Momente von Kräften, welche in ein und derselben Ebene wirken, im allgemeinen.

Frage 28. Was versteht man unter dem statischen Moment und was unter dem Drehungsmoment einer Kraft.

Erkl. 81. „Moment" kommt vom lat. momentum, entstanden aus movimentum, von movēre, bewegen. Moment bedeutet demnach „das Bewegende, Entscheidende".

Figur 67.



Antwort. Unter dem statischen Moment[1]) einer Kraft P in bezug auf einen beliebigen festen Punkt O versteht man das Produkt, bestehend aus der Kraft P und dem senkrechten Abstand MO ihrer Richtungslinie von dem festen Drehpunkt O. Oder, da man die senkrechte Entfernung der Angriffslinie einer Kraft von ihrem festen Unterstützungspunkt den Hebelarm oder kurz den Arm der Kraft nennt, so kann das statische Moment auch definiert werden als das Produkt aus Kraft mal Hebelarm. Bezeichnet man die Länge des Hebelarms mit l, die Kraft mit P und ihr Moment mit M, so ist:

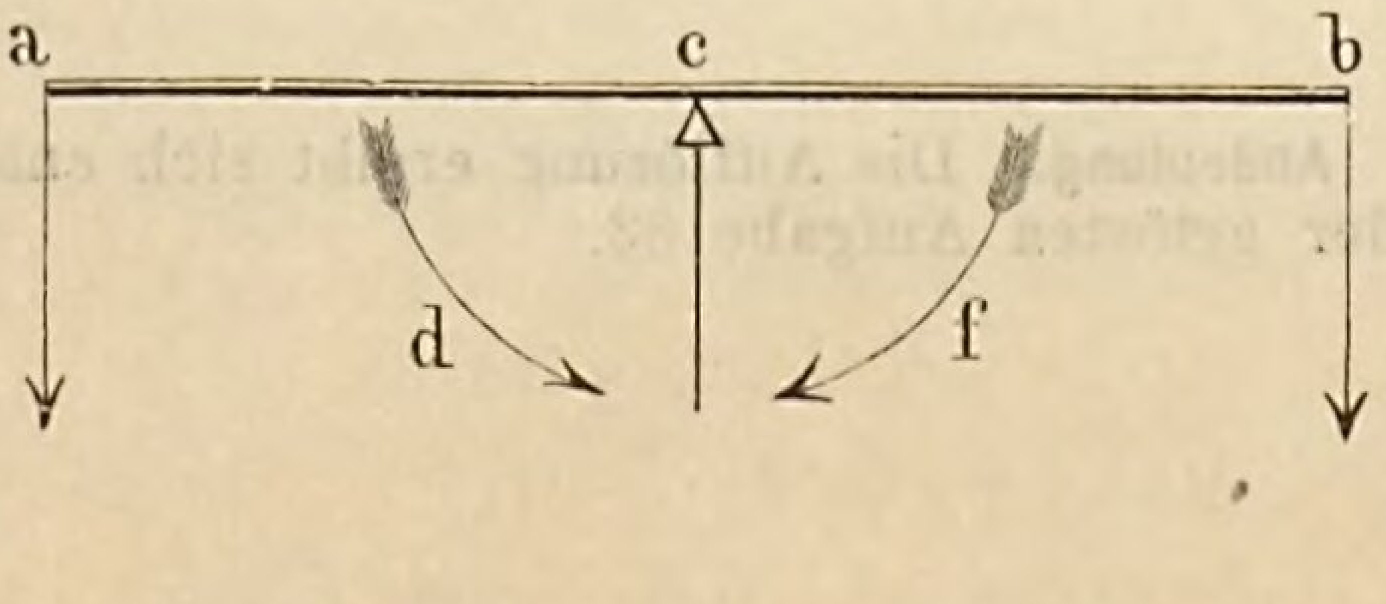
1). $M = Pl$

Da dieses Produkt zugleich ein Mass für das Drehungsbestreben der betreffenden Kraft P ist, so nennt man dasselbe wohl auch das Drehungsmoment der Kraft.

[1]) Siehe Erkl. 81.

Frage 29. Was versteht man unter dem Drehungsbestreben einer Kraft und wovon ist dasselbe abhängig?

Figur 68.



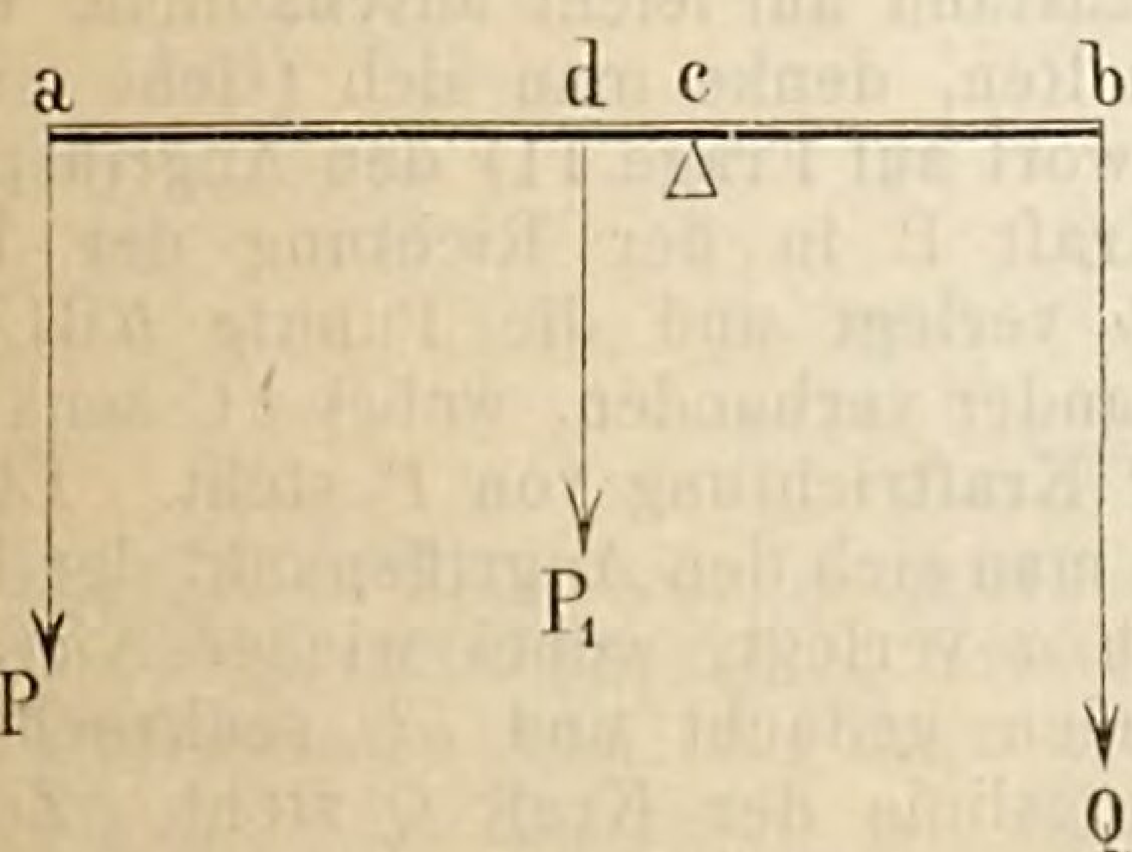
Antwort. Denkt man sich einen homogenen[1]) Stab ab in seinem Mittelpunkt c unterstützt, so ist derselbe im Gleichgewicht, resp. im Zustand der Ruhe. Wirkt dann ein und dieselbe Kraft P an dem Stab, und zwar das einemal in a, dann in c und endlich in b, so ist die Wirkung derselben immer eine andere. In a angebracht, bringt die Kraft eine Drehung in der Richtung des Pfeiles d hervor, siehe Figur 68, in c angebracht, ist diese selbe Kraft ohne Einfluss auf die Drehung des Stabes, und in b wirkend, verursacht die Kraft eine Drehung des Stabes in der Richtung des Pfeiles f. Die

[1]) Siehe Erkl. 82.

Erkl. 82. Das Wort homogen kommt vom griech. homós, d. h. gleich, einerlei; unter einem homogenen Körper versteht man einen Körper von einerlei Natur, von durchaus gleicher Beschaffenheit, und ein homogener Stab ist somit ein überall gleich dicker und durchweg aus demselben Stoff bestehender Stab.

Erkl. 83. Das statische Moment wird positiv oder negativ genommen, je nachdem die durch die Richtung der Kraft angezeigte Umdrehungsrichtung den Körper rechts herum oder links herum drehen würde. Welche von beiden Drehungsrichtungen man als die positive ansehen will ist gleichgiltig, nur muss bei allen Kräften auf übereinstimmende Weise verfahren werden. In der Regel wählt man die von links nach rechts herumgerichtete Drehung als positive Drehungsrichtung, also diejenige, mit welcher die Drehung der Uhrzeiger übereinstimmt, während man die derselben entgegengesetzte Umlaufsrichtung als negativ bezeichnet. Dieses Produkt ist identisch mit der Fläche des Parallelogramms, das aus der betreffenden Kraft als einer Seite und deren Hebelarm als anderer Seite konstruiert werden kann, wenn man dieser Fläche ein Vorzeichen beilegt, das abhängig ist von der Richtung des um sie im Sinn der Kraftrichtung ausgeführten Umlaufs, denn der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich Grundlinie mal senkrechte Höhe

Figur 69.



Kraft P in a oder b angreifend ist also bestrebt, den Körper oder Stab zu drehen, und zwar in dem einen Fall im entgegengesetzten Sinn als in dem andern Fall. Bringt man nun in a und b gleichzeitig zwei gleiche Kräfte an, so hebt das Drehungsbestreben der einen Kraft das der andern Kraft auf und der Stab befindet sich demnach im Gleichgewicht, wobei sein Stützpunkt einen Druck erleidet, welcher gleich der Summe der auf ihn wirkenden Kräfte ist. (Siehe Erkl. 77.)

Nach den früheren Betrachtungen können aber auch zwei gleichgerichtete Parallelkräfte im Gleichgewicht sein, ohne gleiche Intensität zu besitzen. Das Drehungsbestreben einer Kraft hängt somit nicht allein von der Grösse der Kraft selber, sondern auch von ihrer Entfernung $\overline{ac}$ vom Stütz- oder Drehpunkt ab, und zwar wächst das Bestreben der Kraft, um den Punkt c eine Drehung hervorzubringen, nicht nur mit der Kraft allein, sondern ist auch um so grösser, je weiter entfernt der Angriffspunkt a der Kraft P vom Stützpunkt c ist. Beträgt $\overline{ac}$ die Längeneinheit „Eins“ (etwa 1 m oder 1 cm), so ist das Drehungsbestreben der Kraft $P = 1\,P$; ist $\overline{ac} = 2$ oder 3 oder 4 oder l, so ist das Drehungsbestreben derselben Kraft $P = 2P$ resp. $3P$, $4P$ oder $l\,P$, d. h. man erhält das Drehungsbestreben einer Kraft, wenn man ihre Intensität multipliziert mit ihrer Entfernung vom Drehpunkt.

Demnach ist das Drehungsbestreben der Kraft P in Fig. 69 $= P \, . \, \overline{ac}$, das Drehungsbestreben der Kraft $Q = Q \, . \, \overline{bc}$. Sind beide Produkte einander gleich, so herrscht Gleichgewicht und es verbleibt der Körper im Zustande der Ruhe oder:

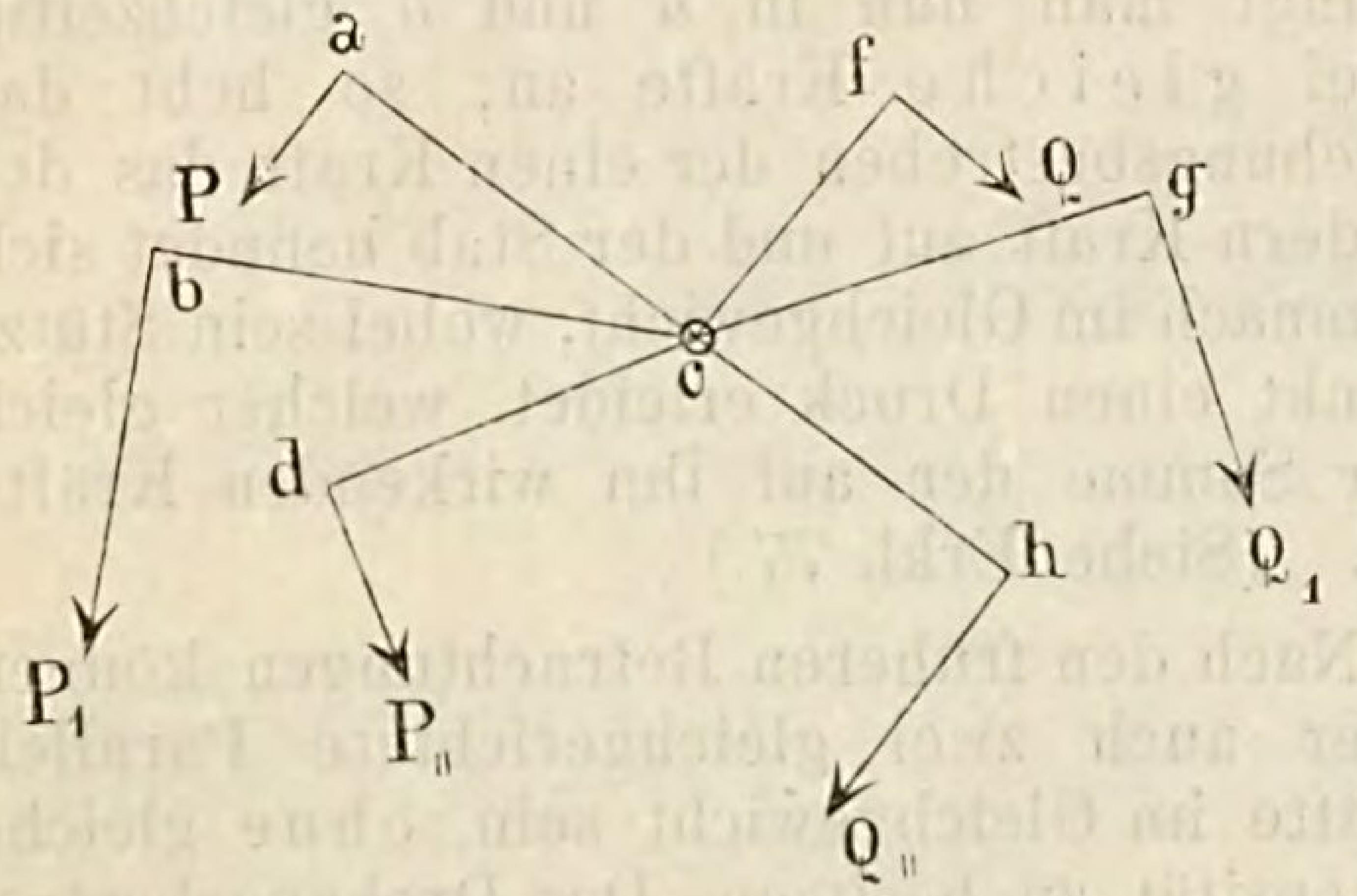
Satz 11. Zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegengesetzte Drehung zu erteilen streben, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre mechanischen oder statischen Momente einander gleich sind.

Wirkt in d, Figur 69, noch eine dritte Kraft P_1, so muss, für den Fall des Gleichgewichts, nach obiger Betrachtung:

$$P \, . \, \overline{ac} + P_1 \, . \, \overline{dc} = Q \, . \, \overline{bc} \text{ sein.}$$

Wirken im allgemeinen mehr als zwei Kräfte in entgegengesetztem Drehungssinn auf einen materiellen Punkt, so ist nach obigem Satz 11 Gleichgewicht, wenn die Ge-

Figur 70.



samtwirkung der nach der einen Drehrichtung wirkenden Kräfte gleich ist der Gesamtwirkung der in entgegengesetztem Drehungssinn wirkenden Kräfte, oder mit Bezug auf Figur 70:

$$P.\overline{ac}+P_1.\overline{bc}+P_2.\overline{dc}=Q.\overline{cf}+Q_1.\overline{cg}+Q_2.\overline{ch}$$

das heisst:

Satz 12. Es besteht Gleichgewicht, wenn die statischen Momente der auf der einen Seite wirkenden Kräfte zusammen gleich sind den statischen Momenten der entgegengesetzt wirkenden Kräfte, oder da:

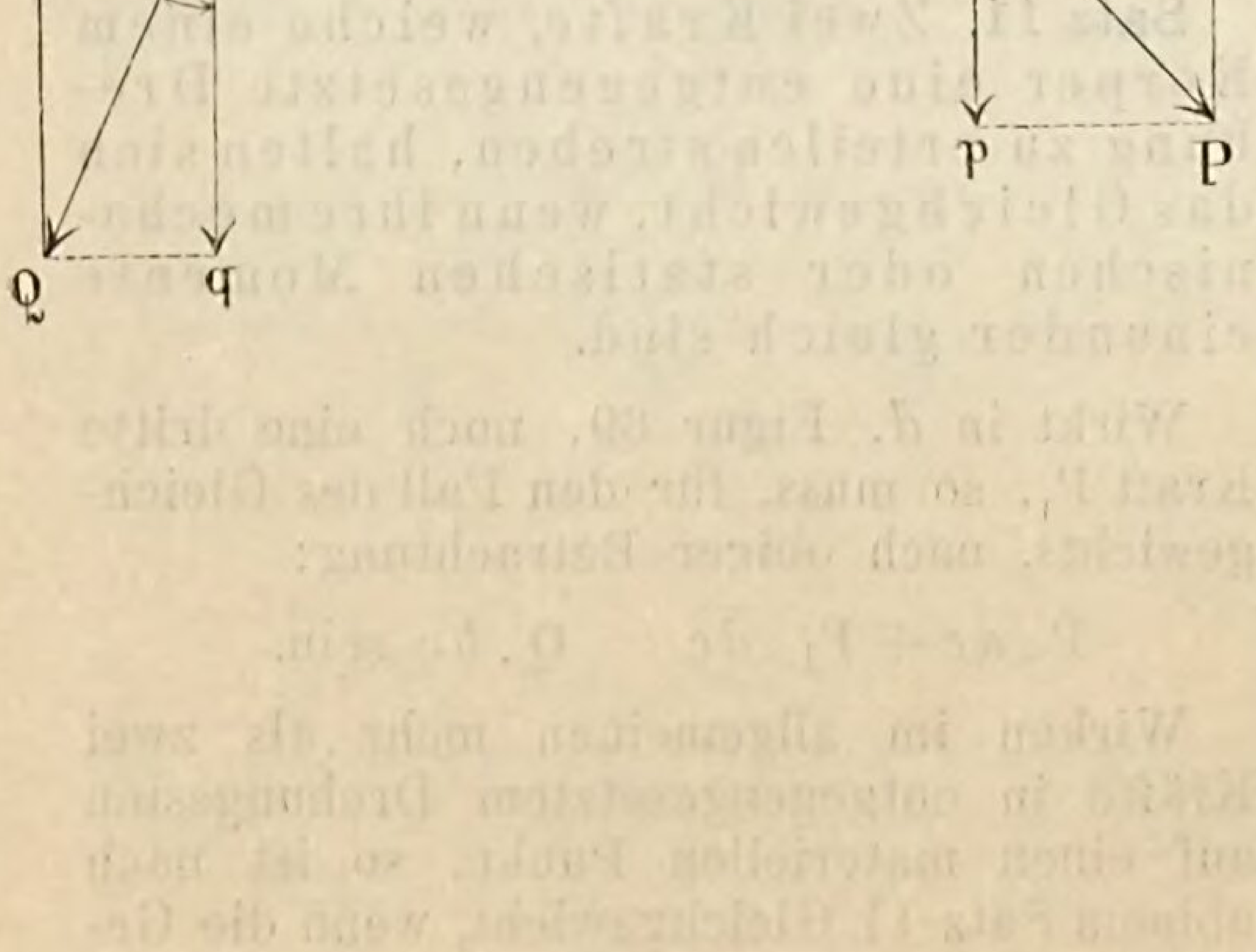
$$P.\overline{ac}+P_1.\overline{bc}+P_2.\overline{dc}-Q.\overline{cf}-Q_1.\overline{cg}-Q_2.\overline{ch}=0$$

so kann man sagen:

Ein drehender Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehungsmomente der auf ihn einwirkenden Kräfte = 0 ist. (Siehe Erkl. 83.)

Frage 30. Welche Beziehungen bestehen für den Fall des Gleichgewichts zwischen den statischen Momenten von Kräften, welche schief auf die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte wirken und nicht parallel laufen?

Figur 71a.



Antwort. Sind die Richtungslinien der Kräfte P und Q, Fig. 71a und b, welche die Drehung eines Körpers um C hervorzubringen suchen, nicht parallel, so muss für den Fall des Gleichgewichts auch nicht $P.\overline{BC}=Q.\overline{AC}$ sein, denn offenbar ist die Wirkung jeder der Kräfte P und Q in bezug auf Drehung um den Punkt C eine andere, je nachdem sich ihre Richtungslinien ändern.

Um nun einen Ausdruck für den Gleichgewichtszustand auf leicht anschauliche Weise zu erhalten, denke man sich (siehe Satz 5 in Antwort auf Frage 11) den Angriffspunkt der Kraft P in der Richtung der Kraft nach b verlegt und die Punkte bBC fest miteinander verbunden, wobei $\overline{bC}$ senkrecht zu der Kraftrichtung von P steht. Ebenso denke man sich den Angriffspunkt der Kraft Q nach a verlegt, wobei wieder AaC fest verbunden gedacht und $\overline{aC}$ senkrecht zur Richtungslinie der Kraft Q steht. Zerlegt man ferner jede der beiden Kräfte P und Q in zwei rechtwinklig zueinander wirkende Seitenkräfte, von denen p und q senkrecht auf $\overline{AB}$ wirken, während die beiden andern Komponenten mit $\overline{AB}$ gleichgerichtet und offenbar auf eine Drehung um den Punkt C ohne allen Einfluss sind, so ergibt sich, dass von der Kraft P eigentlich nur die Komponente:

1). $p = P \cdot \cos\alpha$

und von der Kraft Q nur die Komponente:

2). $q = Q \cdot \cos\beta$

zur Wirkung kommt.

Nach der Definition in Antw. auf Frage 28 ist das Moment der Kraft p:

$$M = p \cdot \overline{CB}$$

oder nach obiger Gleichung:

3). . . . $M = P \cdot \cos\alpha \cdot \overline{CB}$

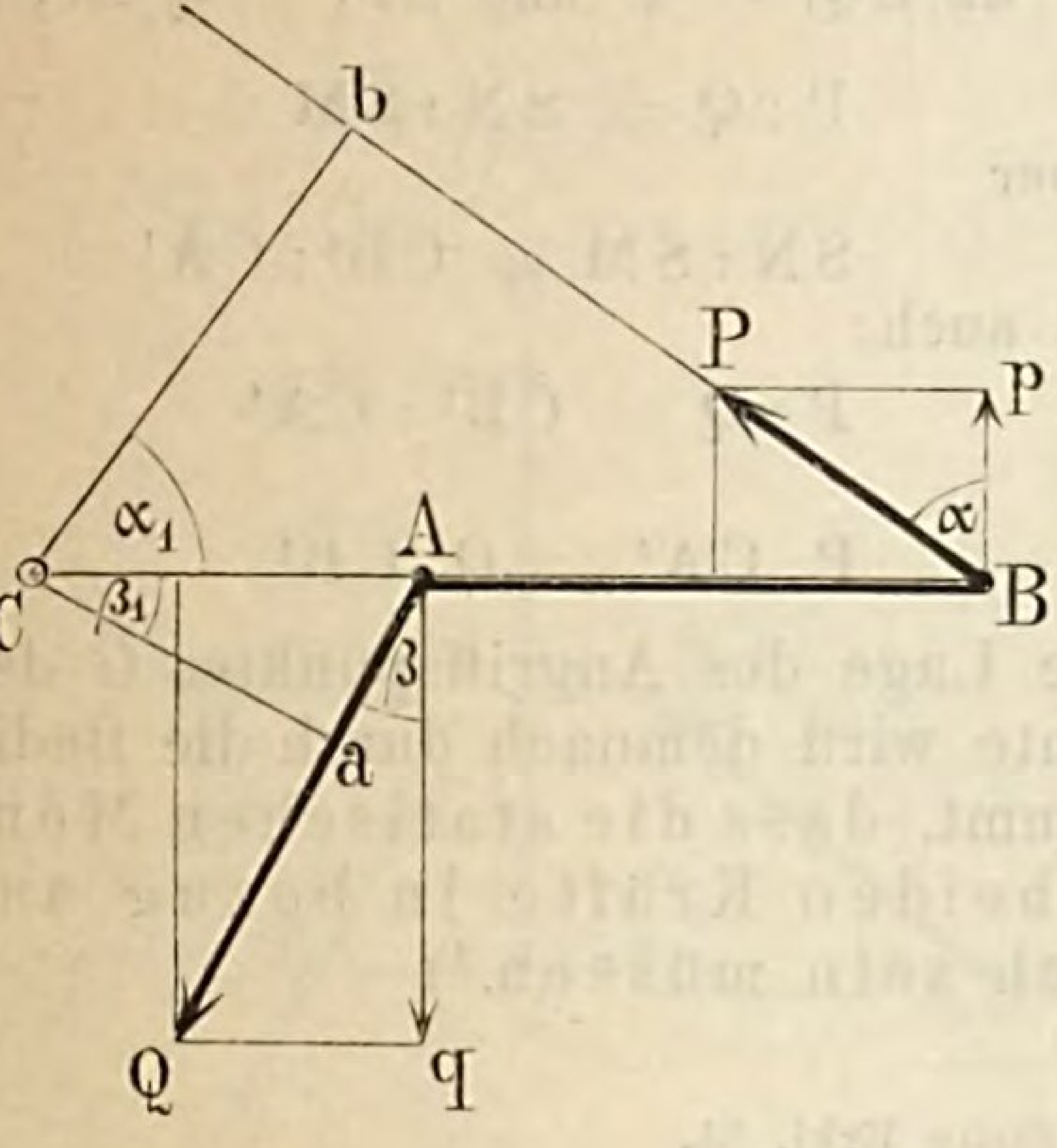
und das Moment der Kraft q ist:

$$M = q \cdot \overline{AC}$$

oder für q aus Gleichung 2). den Wert eingesetzt, ist:

4). . . . $M = Q \cdot \cos\beta \cdot \overline{AC}$

Figur 71 b.



Der senkrechte Abstand der Kraft P von der Drehachse ist aber $= \overline{Cb}$ und der senkrechte Abstand der Kraft Q von der Drehachse $= \overline{Ca}$. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass die beiden Dreiecke BpP und CbB, sowie die beiden Dreiecke QqA und AaC einander ähnlich sind, und somit $\alpha = \alpha^1$ und $\beta = \beta^1$ ist. Es ist nun:

$$\overline{Cb} = \overline{CB} \cdot \cos\alpha^1$$

und

$$\overline{Ca} = \overline{AC} \cdot \cos\beta^1$$

und somit auch:

5). . . . $P \cdot \overline{Cb} = P \cdot \overline{CB} \cdot \cos\alpha$

und

6). . . . $Q \cdot \overline{Ca} = Q \cdot \overline{CA} \cdot \cos\beta$

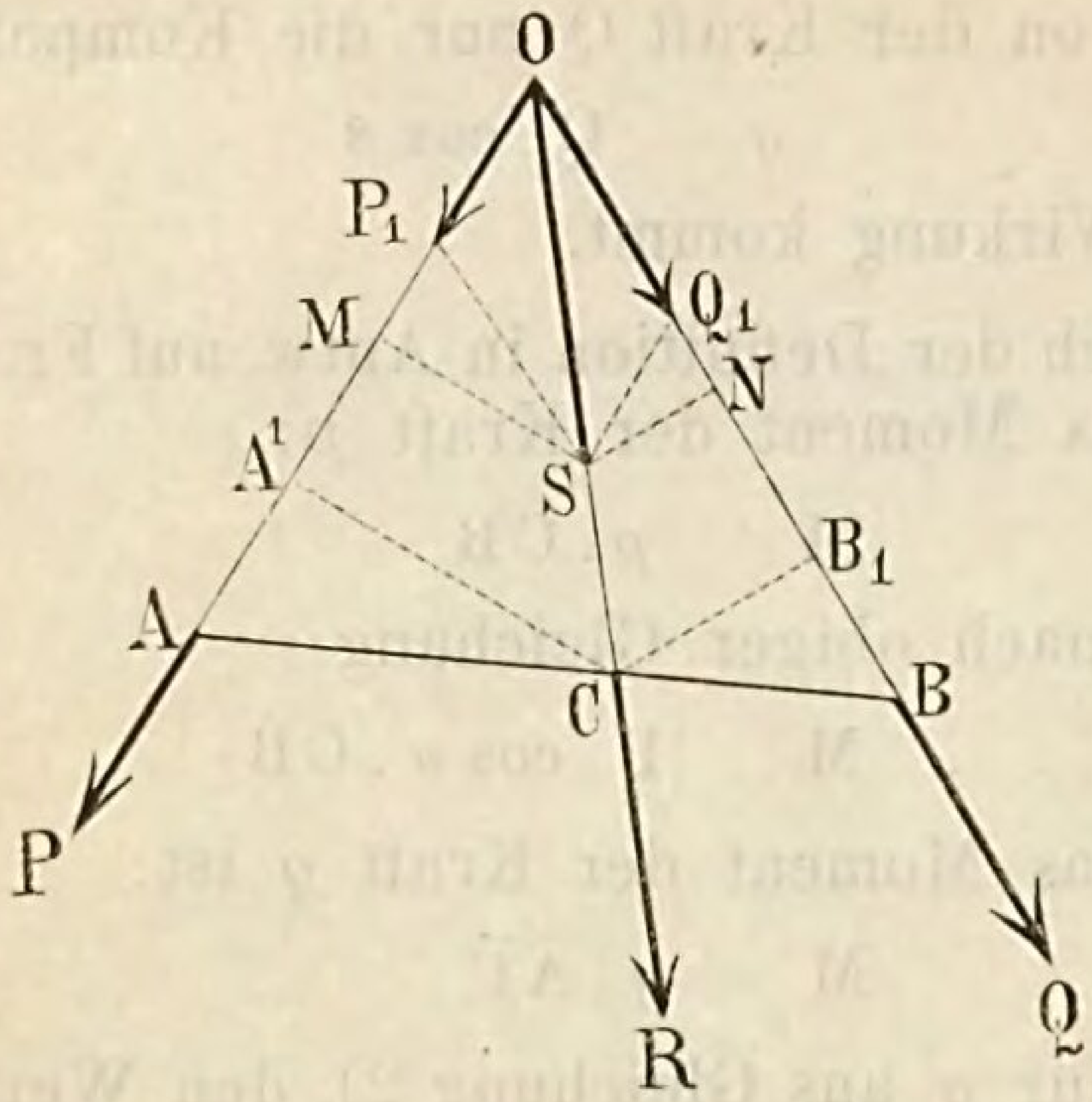
Man sieht hieraus, dass es gleichwertig ist, das Moment der Kraft P als $p \cdot \overline{CB}$ oder als $P \cdot \overline{Cb}$ zu nehmen, sowie dass es gleichwertig ist, das Moment der Kraft Q als $q \cdot \overline{AC}$ oder als $Q \cdot \overline{Ca}$ zu nehmen, dass also der Satz 11 in Antwort auf Frage 29 auch für Kräfte gilt, welche nicht senkrecht zu ihrer Angriffslinie wirken.

Frage 31. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei nicht parallelen Kräften und deren Resultante, und wie lässt sich der Angriffspunkt der letzteren mit Hilfe der statischen Momente bestimmen?

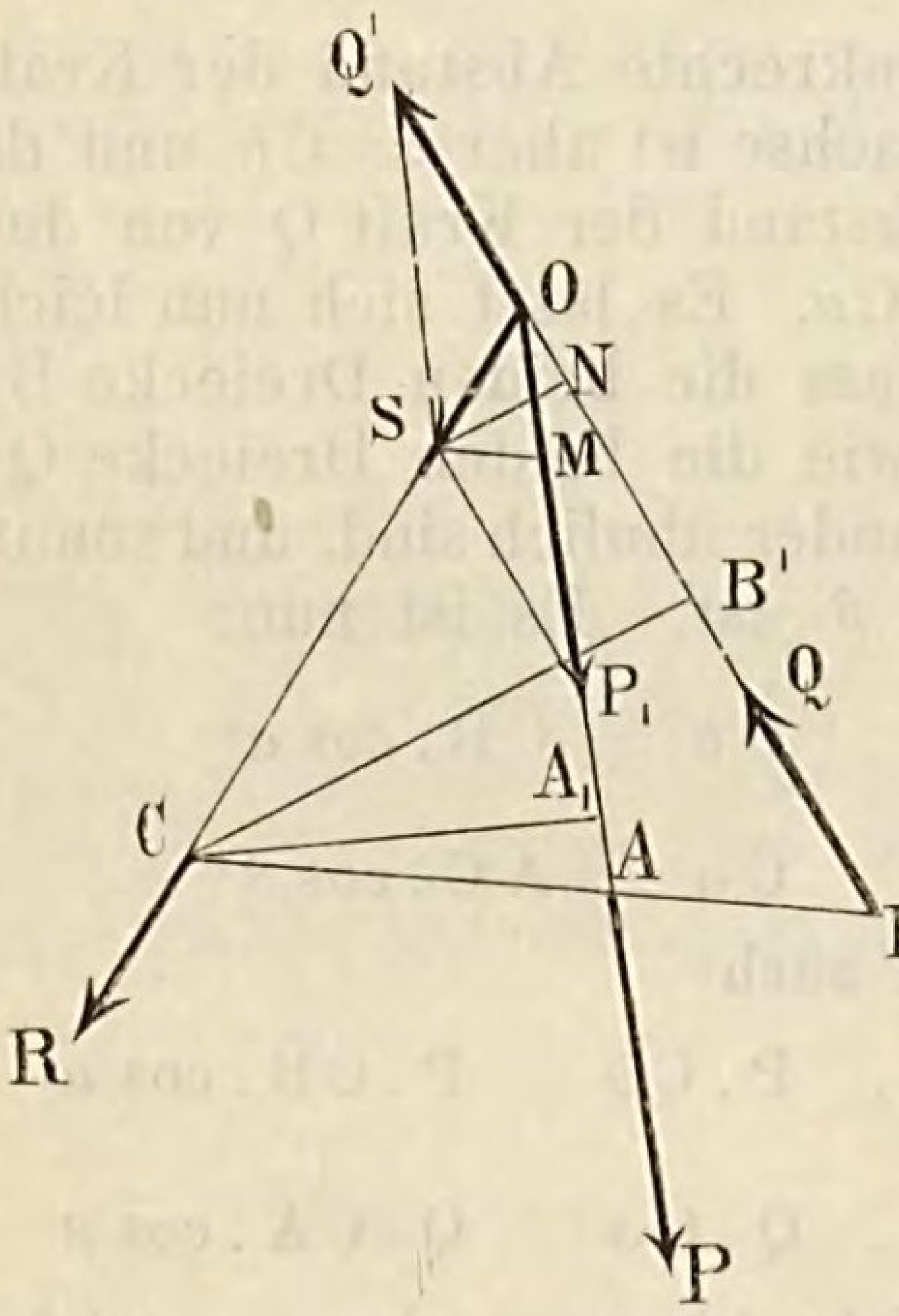
Erkl. 84. Wenn umgekehrt die statischen Momente zweier nicht parallelen Kräfte, die in einer Ebene liegen, für einen und denselben Punkt dieser Ebene einander gleich sind, so liegt dieser Punkt auch in der Richtung der Resultante.

Antwort. Wirken auf die beiden Punkte A und B, Fig. 72 a und b, eines starren Körpers die beiden Kräfte P und Q, welche nicht parallel laufen, so schneiden sich die Richtungslinien bei gehöriger Verlängerung im Punkt O, welcher mit dem starren Körper in starrer Verbindung zu denken ist, und vereinigen sich nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft, welche man sich in jedem Punkt ihrer Richtung, also

Figur 72.



Figur 72b.



auch in C wirkend denken kann und deren Intensität sich nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm leicht berechnen lässt. Zieht man nun von C und S die Lote $\overline{SM}$ und $\overline{CA^1}$ senkrecht $\overline{AO}$ und $\overline{SN}$ und $\overline{CB^1}$ senkrecht $\overline{OB}$, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke MSP_1 und NSQ_1:

$$\overline{SQ_1} : \overline{SP_1} = \overline{SN} : \overline{SM}$$

oder, da $\overline{SQ_1} = P$ und $\overline{SP_1} = Q$ ist, so ist:

$$P : Q = \overline{SN} : \overline{SM}$$

da aber

$$\overline{SN} : \overline{SM} = \overline{CB^1} : \overline{CA^1}$$

so ist auch:

$$P : Q = \overline{CB^1} : \overline{CA^1}$$

oder:

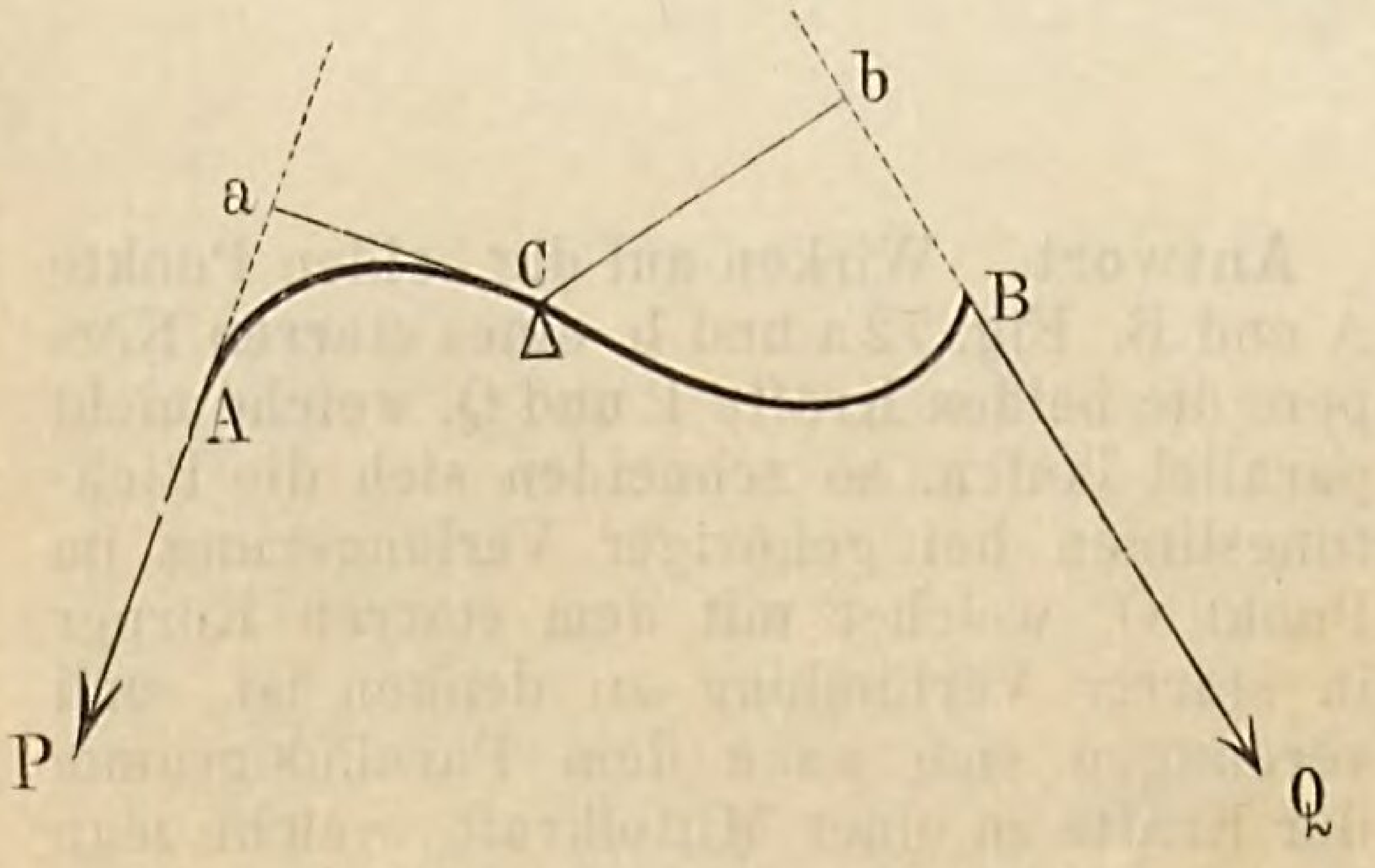
1). . . . $P \,.\, CA^1 = Q \,.\, \overline{CB^1}$

Die Lage des Angriffspunktes C der Resultante wird demnach durch die Bedingung bestimmt, dass die statischen Momente der beiden Kräfte in bezug auf ihn gleich sein müssen.[1])

[1]) Siehe Erkl. 84.

Frage 32. Gilt der Satz von der Gleichheit der Momente auch für jede andere Gestalt der Angriffslinie resp. des Hebels und für alle Richtungen der beiden Kräfte?

Figur 73.



Antwort. Der Satz von der Gleichheit gilt auch für jede andere Gestalt des Hebels resp. der Angriffslinie und für alle Richtungen der beiden Kräfte. Es sei ABC irgend eine krumme Stange, an deren Enden A und B die beiden Kräfte P und Q in den Richtungen $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ wirken, siehe Fig. 73.

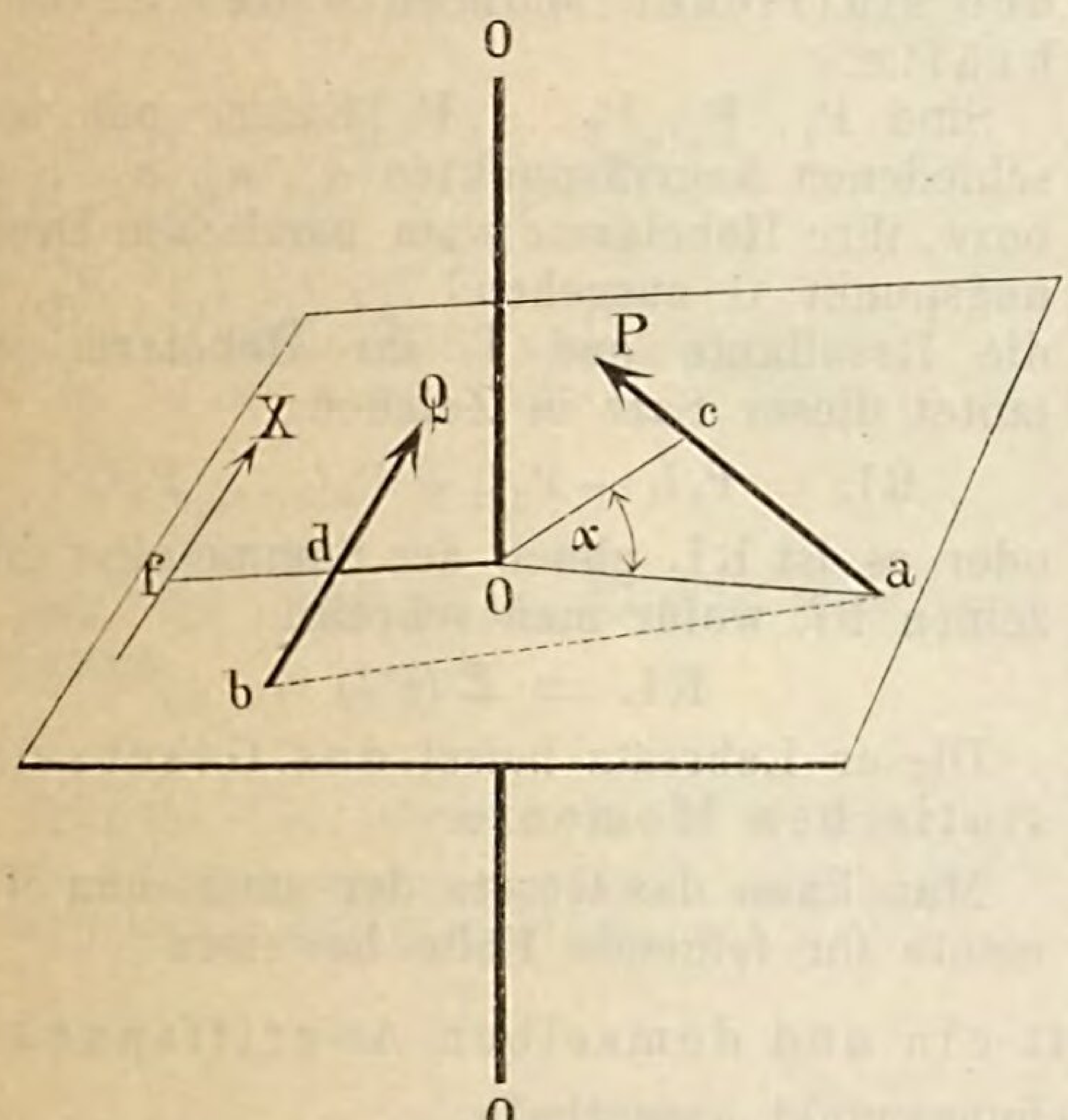
Zieht man von dem Unterstützungspunkt C auf die Richtungen dieser Kräfte die senkrechten Linien $\overline{Ca} = p$ und $\overline{Cb} = q$, so muss für den Fall des Gleichgewichts:

$$Pp = Qq$$

sein, oder die Momente der beiden Kräfte müssen gleich gross sein.

Frage 33. In welchen Beziehungen stehen die statischen Momente zweier Kräfte für den Fall des Gleichgewichts, wenn deren Drehungspunkt ganz ausserhalb des Körpers liegt, auf den dieselben einwirken?

Figur 74.



Antwort. Man kann den Satz von der Gleichheit der statischen Momente auch auf den Fall ausdehnen, dass der Drehungs- oder Stützpunkt der wirkenden Kräfte ganz ausserhalb des Körpers zu liegen kommt, auf den die Kräfte wirken, indem man sich eine Gerade, eine sog. Achse denkt, welche rechtwinklig zu der Kräfteebene steht und von den Richtungslinien der einzelnen Kräfte Lote auf diese Achse fällt. Multipliziert man dann jede Kraft mit ihrer so bestimmten Entfernung oder ihrem Hebelarm, d. h. bestimmt man die statischen Momente der Kräfte, so müssen für den Fall des Gleichgewichts die Momente der in entgegengesetztem Drehungssinn wirkenden Kräfte einander gleich sein, d. h. in Bezug auf Fig. 74 muss:

$$P \cdot \overline{Oc} = Q \cdot \overline{Od}$$

sein.

Für den Fall, dass nicht der Hebelarm einer Kraft, sondern die Entfernung des Angriffspunktes derselben von der Drehachse und der Winkel bekannt ist, welchen letztere Linie mit dem Hebelarm bildet, erhält man z. B. für den Hebelarm $\overline{OC}$ der Kraft P in Figur 74:

$$\overline{Oc} = \overline{Oa} \cdot \cos \alpha$$

Soll irgend eine der gegebenen Kräfte, etwa die Kraft Q durch eine andere, in f angreifende Kraft X ersetzt werden, welche die nämliche Wirkung wie die Kraft P hervorbringt, so wird in f eine kleinere Kraft als Q genügen, und zwar wird dieselbe um so kleiner sein, je grösser die Entfernung $\overline{Of}$ im Verhältnis zu der Entfernung von $\overline{Od}$ ist, denn es muss:

$$X \cdot \overline{Of} = Q \cdot \overline{Od}$$

oder:

$$X = \frac{Q \cdot \overline{Od}}{\overline{Of}}$$

sein, d. h.:

Man findet die gesuchte Kraft, welche gleiche Wirkung wie die gegebene Kraft hervorbringt, wenn man das statische Moment der gegebenen Kraft durch den Hebelarm der gesuchten Kraft dividiert.

b. Ueber die statischen Momente von Kräften, welche in ein und derselben Ebene nach einer Seite der Angriffslinie wirken.

Frage 34. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem statischen Moment der Resultante von zwei oder mehreren nach derselben Seite der Angriffslinie gerichteten Kräften und den statischen Momenten der Komponenten?

Erkl. 85. Es ist Σ das griechische Sigma oder dasselbe, was der Buchstabe *S* im Deutschen ist, und deutet an, dass die einzelnen Produkte $P_1 l_1 \ldots P_n l_n$ mit Berücksichtigung ihrer $+$ oder $-$ Vorzeichen zu einer algebraischen Summe zusammengefasst werden sollen. Diese Bezeichnung mit Σ ist in der Mechanik sehr häufig.

Erkl. 86. Die algebraische Summe der statischen Momente der Komponenten ist eine wirkliche Summe, sobald alle Kräfte auf derselben Seite des Drehungspunktes liegen; sie ist aber eine Differenz, nämlich die Differenz zwischen der Summe der statischen Momente der Kräfte, die in Uhrzeigerrichtung drehend wirken, und der Summe der statischen Momente der Kräfte, die in entgegengesetztem Drehungssinne wirken, sobald die Kräfte auf verschiedenen Seiten des Drehungspunktes wirken.

Antwort. Für zwei oder mehrere nach derselben Seite gerichtete Kräfte einer Ebene ist das statische Moment der Resultante in Bezug auf einen beliebigen Drehungspunkt der Kräfteebene gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte.

Sind $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ bezw. ihre Hebelarme vom nämlichen Drehungspunkt O ausgehend $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$, R die Resultante und L ihr Hebelarm, so lautet dieser Satz in Zeichen:

$$RL = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 \ldots P_n l_n$$

oder es ist RL gleich der Summe aller einzelnen Pl, wofür man schreibt:

$$RL = \Sigma (Pl)\ ^{1)}$$

Dieser Lehrsatz heisst das Gesetz der statischen Momente.

Man kann das Gesetz der statischen Momente für folgende Fälle beweisen:

A. Für Kräfte mit ein und demselben Angriffspunkt:
- a) wenn der Drehungspunkt ausserhalb,
- b) „ „ „ innerhalb der Richtungen der beiden Kräfte angenommen wird.

B. Für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten:
- a) wenn der Drehungspunkt ausserhalb der Richtungen der Kräfte liegt,
- b) „ „ „ zwischen den Angriffspunkten der Kräfte liegt und zwar:
 - α) zwischen der grösseren Kraft und der Resultante,
 - β) „ „ kleineren „ „ „ „

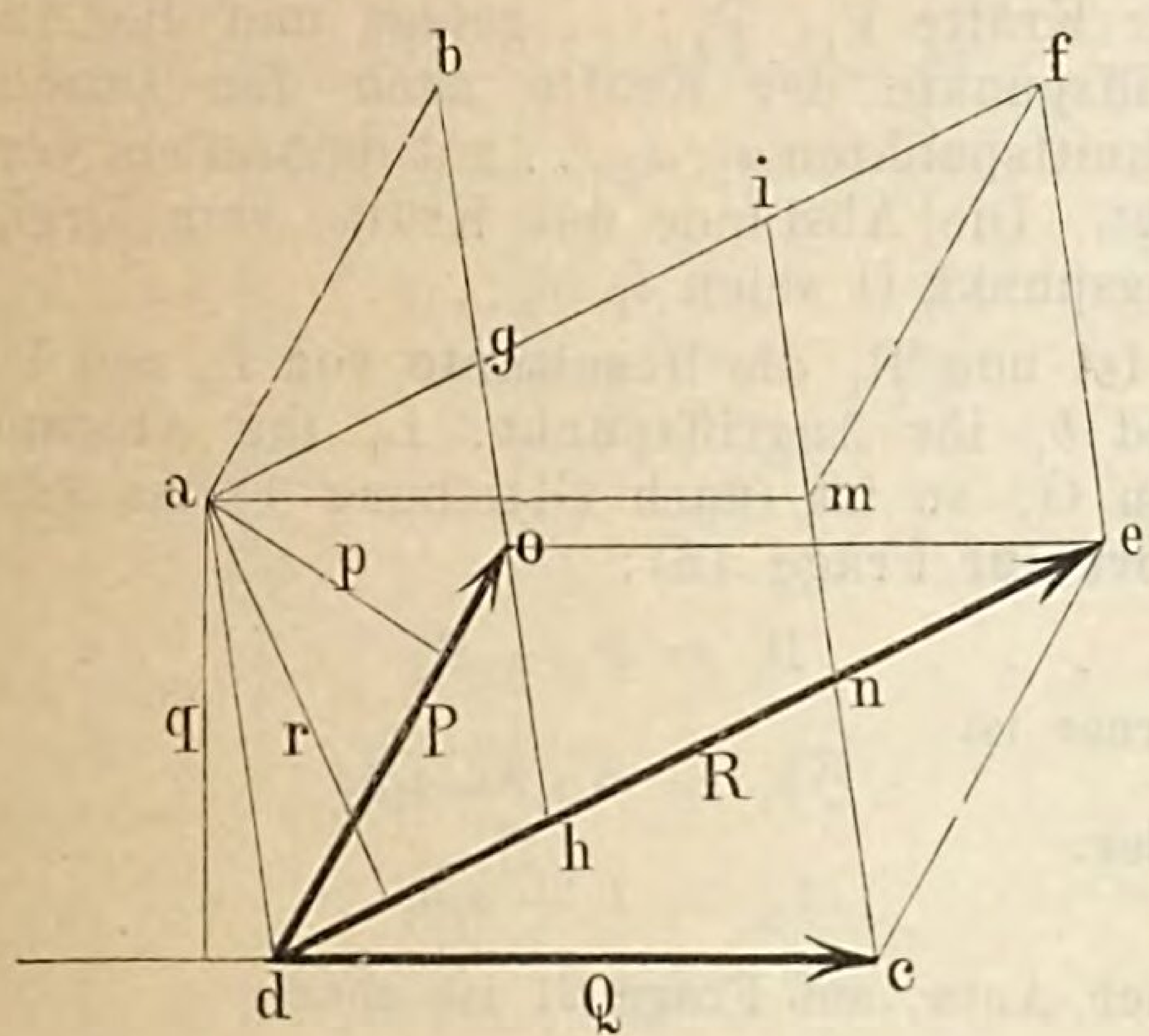
Dass das Gesetz der statischen Momente für alle diese Fälle Giltigkeit hat, ergibt sich aus folgenden Beweisen:

1. Beweis des Gesetzes der statischen Momente: für 2 Kräfte mit demselben Angriffspunkt, deren Drehungspunkt ausserhalb der Richtungen der beiden Kräfte liegt.

Es seien P und Q, Figur 75, die gegebenen Kräfte, *p* und *q* ihre Hebelarme, R die Resultante der Kräfte P und Q und *r* deren Hebelarm, *a* der Drehungspunkt.

[1]) Siehe Erkl. 85.

Figur 75.

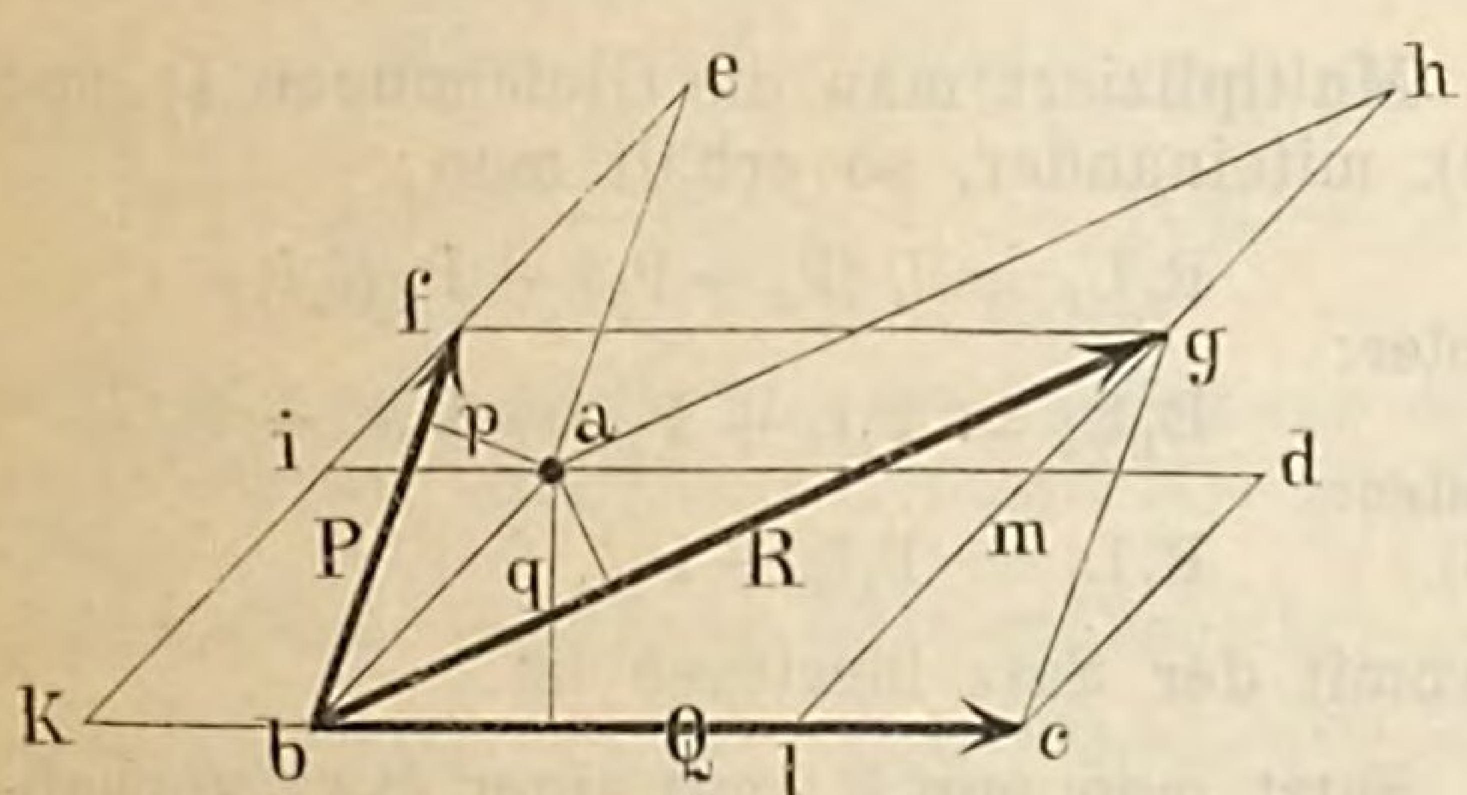


Erkl. 87. || gr ist das Zeichen für Parallelogramm.

Erkl. 88. Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet:

„Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleichflächig."

Figur 76.



Erkl. 89. Liegt der Drehungspunkt in der Richtung der Resultante zweier Komponenten, dann sind die statischen Momente der letzteren einander gleich (siehe Antwort auf Frage 31), folglich die Hebelarme den Kräften umgekehrt proportional und der Hebelarm von R $= 0$, also auch $Rr = 0$.

Zu beweisen ist nun:

$$Rr = Pp + Qq$$

Nach Erkl. 88 ist:

$Rr =$ dem Flächeninhalt des || gr $adef$ [1])

$Pp =$ || gr $abod$ und

$Qq =$ || gr $adcm$

somit ist zu beweisen, dass

|| gr $adef =$ || gr $abod +$ || gr $adcm$ ist.

Es ist nun:

|| gr $abod =$ || gr $aghd$ [2])

und

|| gr $adcm =$ || gr $adni$ [2])

folglich

$$abod + adcm = aghd + adni$$

oder, da

$$aghd = ifen \text{ ist,}$$

so ist:

$$abod + adcm = \underbrace{ifen + adni}$$

oder:

$$abod + adcm = adef$$

oder:

$$Pp + Qq = Rr$$

2. Beweis des Gesetzes der statischen Momente: für 2 Kräfte mit demselben Angriffspunkt, deren Drehungspunkt a innerhalb der beiden Kraftlinien angenommen wird, und deren Momente somit entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Es seien P, Q und R wieder die gegebenen Komponenten nebst ihrer Resultante, und p, q und r die bezüglichen Hebelarme, vom Drehpunkt a aus, dann ist zu beweisen, dass:

$$-Rr = Pp + (-Qq)$$

oder dass

$$Qq = Pp + Rr$$

oder nach Erkl. 88, dass

|| gr $abcd =$ || gr $aefb +$ || gr $abgh$

Nun ist:

$$aefb = aikb \text{ [2])}$$

und

$$abgh = ablm \text{ [2])}$$

$$aefb + abgh = \underbrace{aikb + ablm}$$

oder:

$$aefb + abgh = iklm$$

oder, da

|| gr $iklm =$ || gr $abcd$

so ist:

$$aefg + abgh = abcd$$

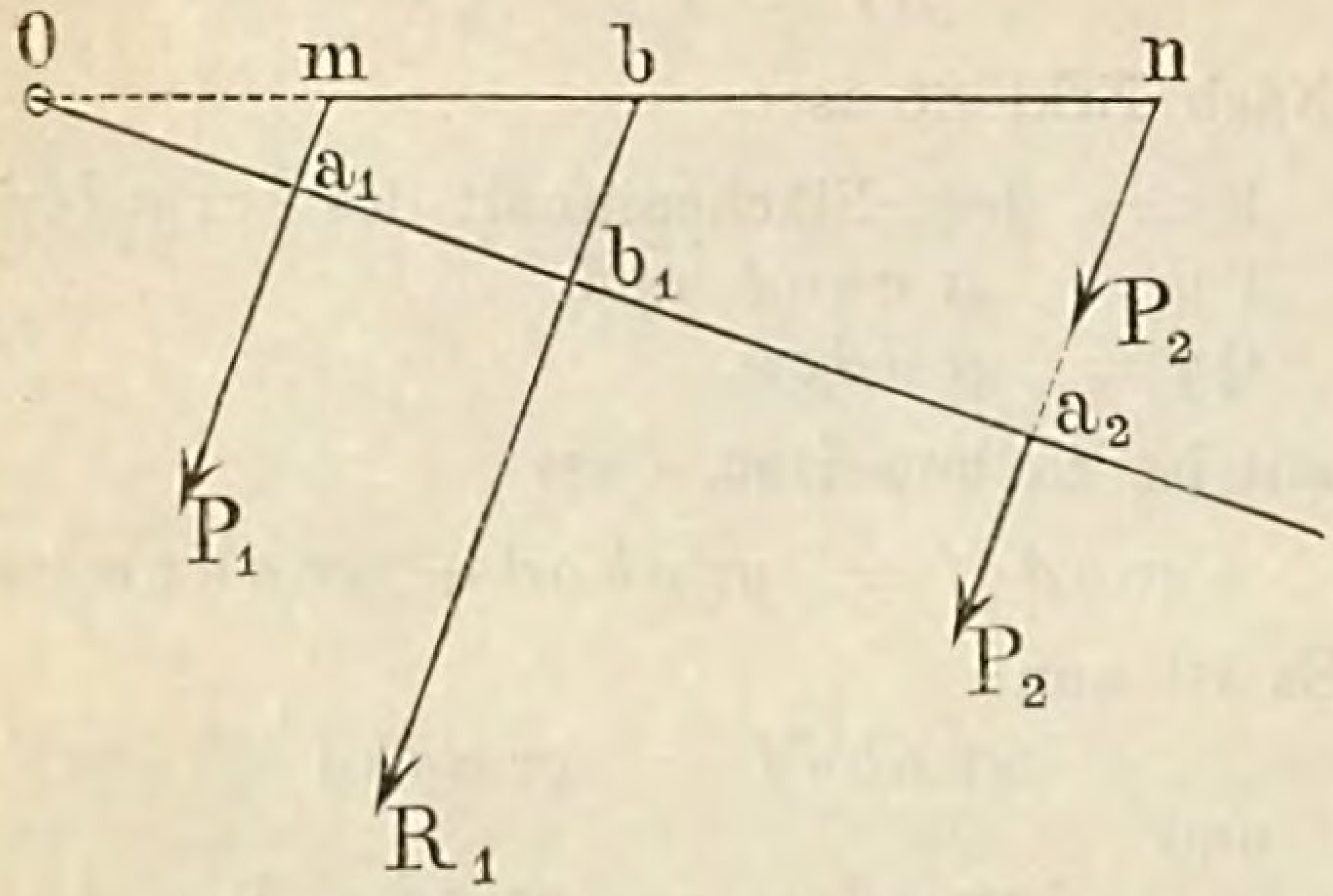
oder:

$$Pp + Rr = Qq$$

3. Beweis des Gesetzes der statischen Momente: für Kräfte mit verschiedenen An-

[1]) Siehe Erkl. 87.
[2]) Siehe Erkl. 88.

Figur 77.



Erkl. 90. Man kann das Gesetz der statischen Momente benutzen, um die Resultante mehrerer gleichgerichteten Parallelkräfte durch Rechnung ihrer Lage nach zu bestimmen. Hat man nämlich eine mit mehreren Gewichten P_1, P_2, P_3 beschwerte Stange a_1, a_2, a_3, so nehme man in dieser Linie irgendwo willkürlich einen Punkt O und setze die bekannten Entfernungen der Angriffspunkte a_1, a_2, a_3 dieser Kräfte von jenem Punkte $O = l_1, l_2, l_3$ (siehe Figur 78) u. s. w. Ist dann x der Hebelarm der Resultante $= \overline{OC}$ die gesuchte Entfernung des Drehungspunktes O von demjenigen Punkt c, in welchem die Stange unterstützt werden muss, wenn dieselbe unter der Wirkung aller dieser Kräfte P_1, P_2, P_3 ... im Gleichgewicht bleiben soll, so hat man aus nebenstehender Gleichung 4)., wenn man für R_2 den Wert P_1, P_2, P_3 ... schreibt:

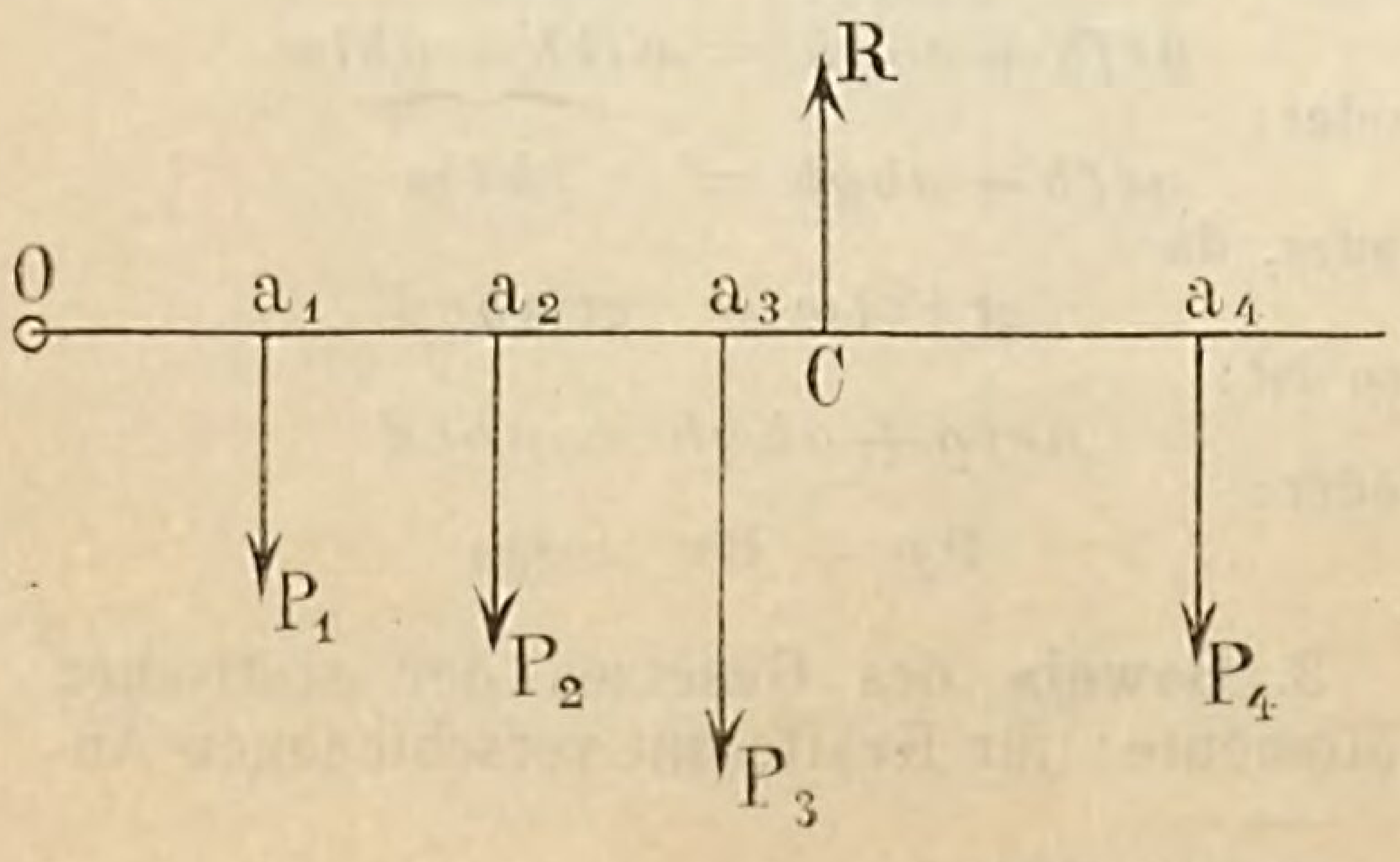
$$x = L_2 = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

oder:

$$x(P_1 + P_2 + P_3) - P_1 l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3 = 0$$

so dass also auch hier für den Fall des Gleichgewichts die Summe aller Momente = 0 sein muss, wenn man die nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander entgegengesetzt nimmt.

Figur 78.



griffspunkten, deren Drehungspunkt ausserhalb der Richtungen der Kräfte liegt.

Man denke sich durch den Drehungspunkt O in Figur 77 ein Lot zu den Richtungen der Kräfte P_1, P_2 gelegt und die Angriffspunkte der Kräfte nach den Durchschnittspunkten a_1, a_2 ... mit demselben verlegt. Die Abstände der Kräfte vom Drehungspunkt O seien l_1, l_2

Ist nun R_1 die Resultante von P_1 und P_2, und b_1 ihr Angriffspunkt, L_1 ihr Abstand von O, so ist (nach Gleichung 1). in Antwort auf Frage 19):

1). $R_1 = P_1 + P_2$

ferner ist:

$$\overline{Ob_1} = \overline{Oa_1} + \overline{a_1 b_1}$$

oder:

$$L_1 = l_1 + \overline{a_1 b_1}$$

nach Antw. auf Frage 21 ist aber:

$$\overline{a_1 b_1} : \overline{a_1 a_2} = P_2 : R_1$$

oder:

$$\overline{a_1 b_1} = \frac{\overline{a_1 a_2} \cdot P_2}{R_1}$$

oder:

$$\overline{a_1 b_1} = \frac{\overline{a_1 a_2} \cdot P_2}{P_1 + P_2}$$

also:

$$L_1 = l_1 + \frac{\overline{a_1 a_2} \cdot P_2}{P_1 + P_2}$$

oder:

2). . . . $L_1 = l_1 + \dfrac{P_2 (l_2 - l_1)}{P_1 + P_2}$

Multipliziert man die Gleichungen 1). und 2). miteinander, so erhält man:

$$R_1 L_1 = l_1 (P_1 + P_2) + P_2 (l_2 l_1)$$

oder:

$$R_1 L_1 = P_1 l_1 + P_2 l_1 + P_2 l_2 - P_2 l_1$$

oder:

3). . . $R_1 L_1 = P_1 l_1 + P_2 l_2$

womit der Satz bewiesen ist.

Setzt man nun R_1 mit einer etwa vorhandenen dritten Kraft P_3 zusammen, so erhält man, wenn R_2 die Resultante beider Kräfte, L_2 ihr Hebelarm ist, auf dieselbe Weise wie oben:

$$R_2 L_2 = R_1 L_1 + P_3 l_3$$

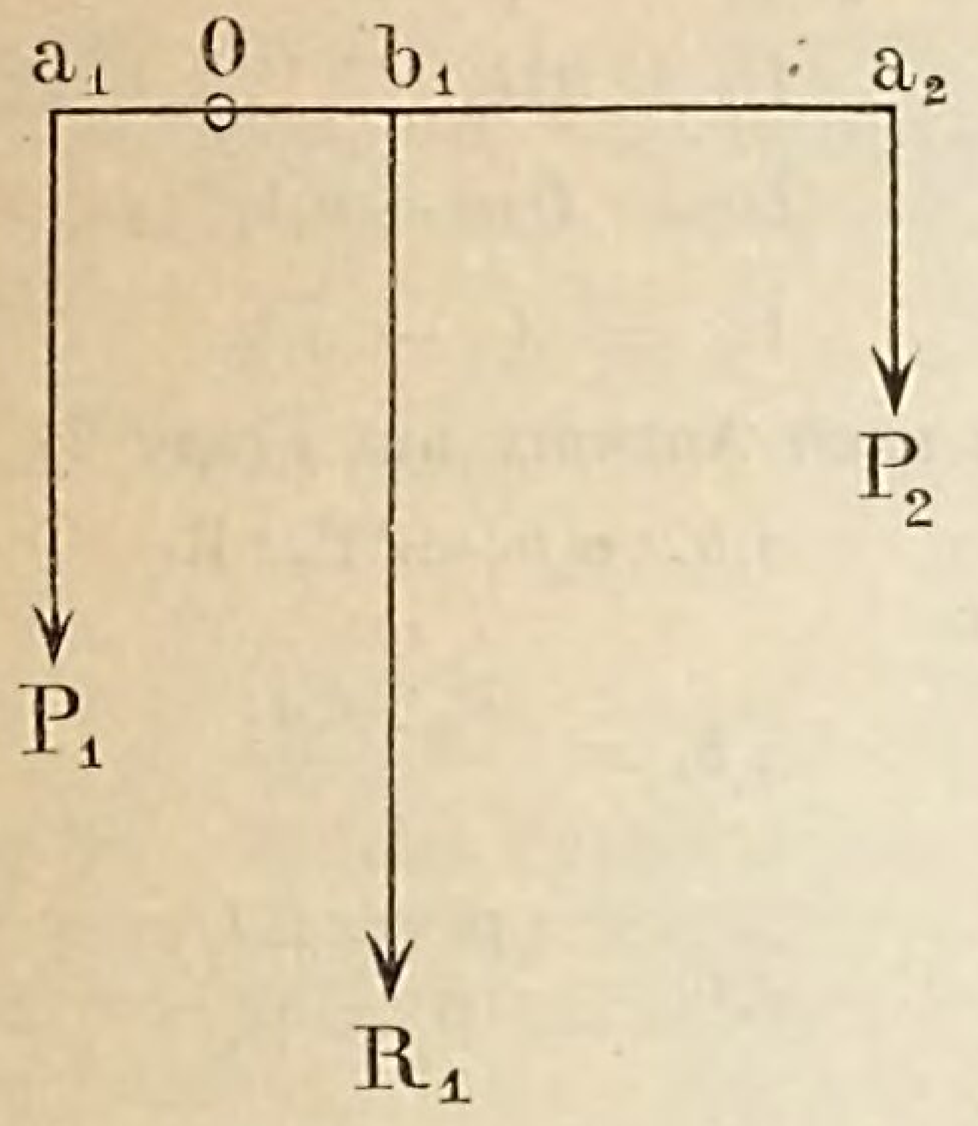
also nach Gleichung 3).:

4). . . . $R_2 L_2 = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3$

In derselben Weise kann man noch weitere Kräfte in Rechnung bringen.

4. Beweis des Gesetzes der statischen Momente: für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten, wenn der Drehungspunkt zwi-

Figur 79.



Erkl. 91. Sind mehr als zwei Kräfte vorhanden, etwa $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ auf der einen Seite des Drehungspunktes in den Abständen $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$, ferner $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_n$ auf der andern Seite in den Abständen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$, so kann man die Summe der statischen Momente auf der einen Seite des Drehungspunktes:

$$P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots P_n l_n = R_1 L_1$$

und ebenso:

$$Q_1 \lambda_1 + Q_2 \lambda_2 + \ldots Q_n \lambda_n = R_2 L_2$$

setzen.

Ist nun R die Resultierende aller Kräfte im Abstand L vom Drehungspunkt, so ist:

$$RL = R_1 L_1 - R_2 L_2$$

folglich:

$$RL = P_1 l_1 + P_2 l_2 \ldots\ldots + P_n l_n - (Q_1 \lambda_1 + Q_2 \lambda_2 + \ldots Q_n \lambda_n)$$

Hierbei ist stets die kleinere Summe von der grösseren zu subtrahieren, damit RL positiv wird.

Aus obiger Gleichung folgt endlich für:

$$L = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 \ldots + P_n l_n - (Q_1 \lambda_1 + Q_2 \lambda_2 \ldots + Q_n \lambda_n)}{P_1 + P_2 \ldots + P_n + Q_1 + Q_2 + \ldots Q_n}$$

Die Strecke L ist von dem Drehungspunkt O aus stets nach der Seite der grösseren Momentsumme abzutragen.

schen dem Angriffspunkt der grösseren Kraft und dem der Resultante liegt.

Es seien zunächst die beiden Kräfte P_1 und P_2 angreifend in a_1 und a_2 vorhanden, R_1 sei die Resultante mit dem Angriffspunkt b_1, dann ist nach Antw. auf Frage 19:

5). $R_1 = P_1 + P_2$

und

6). . . $L_1 = \overline{Ob_1} = \overline{Oa_2} - \overline{b_1 a_2}$

oder, da

$$\overline{Oa_2} = l_2$$

und $\overline{b_1 a_2} : \overline{a_1 a_2} = P_1 : R_1$ (nach Antw. auf Frage 21)

oder:

$$\overline{b_1 a_2} = \frac{\overline{a_1 a_2} \cdot P_1}{R_1}$$

oder, da

$$\overline{a_1 a_2} = \overline{Oa_1} + \overline{Oa_2}$$

d. h.: $\overline{a_1 a_2} = l_1 + l_2$

so ist:

$$\overline{b_1 a_2} = \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{R_1}$$

oder:

$$\overline{b_1 a_2} = \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{P_1 + P_2}$$

und diese Werte in 6). gibt:

7). . . . $L_1 = l_2 - \dfrac{P_1 (l_1 + l_2)}{P_1 + P_2}$

Multipliziert man Gleichung 5). mit 7)., so erhält man:

$$R_1 L_1 = l_2 (P_1 + P_2) - P_1 (l_1 + l_2)$$

oder:

$$R_1 L_1 = P_1 l_2 + P_2 l_2 - P_1 l_1 - P_1 l_2$$

oder:

8). . . $R_1 L_1 = P_2 l_2 - P_1 l_1$

Da $P_1 \cdot \overline{a_1 b_1} = P_2 \cdot \overline{b_1 a_2}$ (nach Antw. auf Frage 22) so ist:

$P_1 \cdot \overline{Oa_1}$ kleiner als $P_2 \cdot \overline{Oa_2}$

d. h.: $P_2 l_2$ ist grösser als $P_1 l_1$

Es ist demnach zur Bestimmung des statischen Moments der Resultante das kleinere statische Moment vom grösseren abzuziehen und R_1 liegt von O aus auf der Seite des grösseren Moments.

Ferner ist nach Gleichung 8).:

9). . . . $L_1 = \dfrac{P_2 l_2 - P_1 l_1}{P_1 + P_2}$

und L_1 liegt von O aus nach P_2 hin, d. h. nach der Seite des grösseren Moments.

5. Beweis des Gesetzes der statischen Momente: für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten, wenn der Drehungspunkt zwi-

schen dem Angriffspunkt der kleineren Kraft und dem der Resultante liegt.

In Figur 80 ist:

$$10). \quad . \quad . \quad R_1 = P_1 + P_2$$

$$L_1 = Ob_1$$

oder:

$$L_1 = \overline{Oa_1} - \overline{a_1b_1}$$

oder:

$$L_1 = l_1 - \overline{a_1b_1}$$

oder da nach Antwort auf Frage 21:

$$a_1b_r : a_1a_2 = P_2 : R_1$$

und also

$$\overline{a_1b_1} = \frac{P_2 \,.\, a_1a_2}{R}$$

oder:

$$\overline{a_1b_1} = \frac{P_2\,(l_1 + l_2)}{P_1 + P_2}$$

so ist:

$$11). \quad . \quad . \quad . \quad L_1 = l_1 - \frac{P_2\,(l_1 + l_2)}{P_1 + P_2}$$

Gleichung 10). und 11). multipliziert, gibt:

$$R_1L_1 = (P_1 + P_2)\,l_1 - P_2\,(l_1 + l_2)$$

oder:

$$R_1L_1 = P_1l_1 + P_2l_1 - P_2l_1 - P_2l_2$$

oder:

$$12). \quad . \quad . \quad R_1L_1 = P_1l_1 - P_2l_2$$

Da: $\quad P_1 \,.\, \overline{a_1b_1} = P_2 \,.\, \overline{a_2b_1}$

so ist jedenfalls auch $P_1l_1 > P_2l_2$.

Es wird also auch in diesem Falle, also stets, das kleinere vom grösseren Moment subtrahiert und R_1 liegt von O aus nach der Seite dės grösseren Moments.

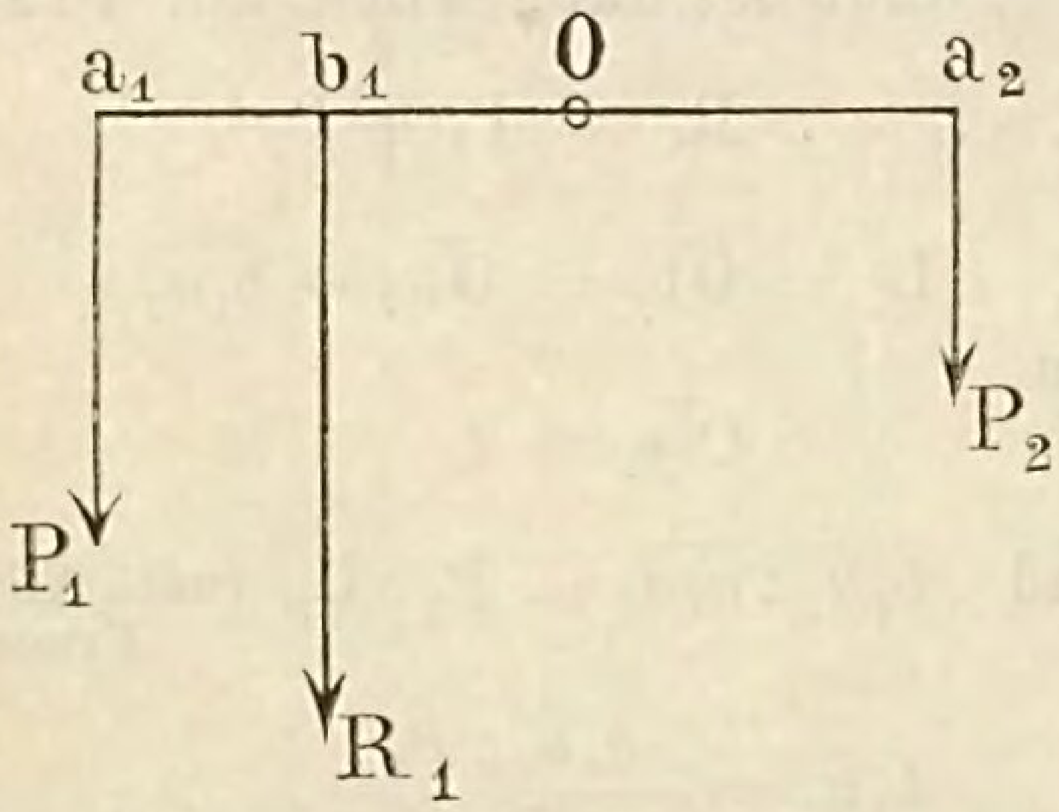
Aus Gleichung 12). folgt:

$$13). \quad . \quad . \quad . \quad L_1 = \frac{P_1l_1 - P_2l_2}{P_1 + P_2}$$

und L_1 liegt nach der Seite des grösseren Moments hin.

Soll also bei gegebener Lage von O auf a_1, a_2 der Angriffspunkt b_1 der Resultierenden R_1 bestimmt werden, so berechne man nach Gleichung 9). oder 13). L_1 und trage diese Strecke von O aus stets nach der Seite des grösseren Moments hin auf $\overline{a_1, a_2}$ ab.

Figur 80.



Erkl. 92. Ist der Drehungspunkt O der Angriffspunkt der Resultierenden selbst, so ist das statische Moment derselben in Bezug auf O = 0, weil L = 0, folglich die Summe der statischen Momente der Kräfte auf der einen Seite des Drehungspunktes (oder des Angriffspunktes der Resultante) gleich der Summe der statischen Momente der Kräfte auf der andern Seite.

Erkl. 93. Ist die Summe der statischen Momente der Kräfte auf der einen Seite des Drehungspunkts gleich der Summe der statischen Momente der Kräfte auf der andern Seite, so fällt der Angriffspunkt der Resultante mit dem Drehungspunkt zusammen. Ist O in diesem Falle ein fester Punkt, so wird die Wirkung der in O angreifenden Resultante aufgehoben und der Körper, auf welchen die Kräfte wirken, ist somit in Ruhe.

Erkl. 94. Wenn die eine Seitenkraft im Drehungspunkt selbst angreift, so ist das statische Moment der andern Seitenkraft gleich dem statischen Moment der Resultante beider Kräfte. Greift z. B. die Kraft P_1 in O an, so ist $l_1 = 0$ und demnach auch $P_1 l_1 = 0$, folglich $RL = P_2 l_2$. Wäre der Punkt O ein fester Punkt, so würde in diesem Falle die Kraft P_1 aufgehoben, die Kraft P_2 brächte dann allein dieselbe Wirkung hervor wie die Resultante und man könnte also R in der Entfernung L vom Drehungspunkt O ersetzen durch die Kraft P_2 in der Entfernung l_2.

c. Ueber die statischen Momente von Kräften, welche in ein und derselben Ebene nach entgegengesetzten Seiten der Angriffslinie wirken.

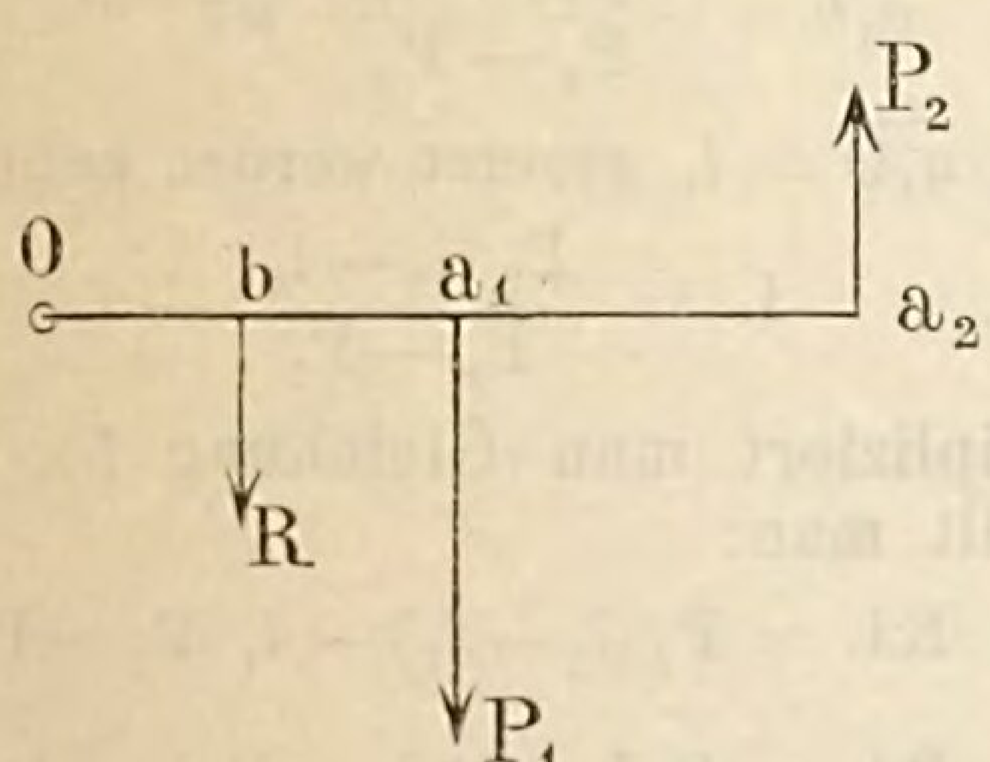
Frage 35 Welche Lage kann der Drehungspunkt in Bezug zu den Angriffspunkten zweier Seitenkräfte und deren Resultante einnehmen?

Antwort. Der Drehungspunkt kann ganz ausserhalb der Richtungen sowohl rechts als links von den Angriffspunkten der genannten Kräfte liegen, oder aber er liegt zwischen der Resultante und der grösseren der gegebenen Komponenten oder endlich zwischen beiden Komponenten.

Frage 36. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem statischen Moment der Resultante von zwei nach entgegengesetzten Seiten der Angriffslinie wirkenden Kräften und den statischen Momenten der letzteren?

Antwort. Liegt der Drehungspunkt ausserhalb der beiden Kräfte, so ist das statische Moment der Resultierenden gleich der Differenz der statischen Momente der Komponenten; liegt der Drehungspunkt dagegen zwischen den beiden Komponenten, so ist das Moment der Resultierenden gleich der Summe der Momente der Komponenten.

Figur 81.



1. Beweis: Der Drehungspunkt O liegt auf der Verlängerung von $\overline{a_1, a_2}$ über a_1 und b hinaus, Figur 81, und P_1 sei grösser als P_2. Bezeichnet man den Abstand der Resultante von O mit L, sowie die Abstände der Kräfte P_1 und P_2 mit l_1 resp. l_2, so ist nach Antwort auf Frage 24:

1). . . . $R = P_1 - P_2$

Ferner ist:

$$L = \overline{O\,b}$$

oder:

$$L = \overline{O\,a_1} - \overline{b\,a_1}$$

oder, da

$$\overline{O\,a_1} = l_1$$

und

$$\overline{b\,a_1} : \overline{a_1 a_2} = P_2 : R \quad \text{(nach Antwort auf Frage 25)}$$

oder:

$$\overline{b\,a_1} : l_2 - l_1 = P_2 : P_1 - P_2$$

oder:

$$\overline{b\,a_1} = \frac{P_2\,(l_2 - l_1)}{P_1 - P_2} \text{ ist,}$$

so ist:

2). . . $L = l_1 - \dfrac{P_2\,(l_2 - l_1)}{P_1 - P_2}$

Multipliziert man nun die beiden Gleich. 1). und 2). miteinander, so erhält man:

$$RL = l_1\,(P_1 - P_2) - P_2\,(l_2 - l_1)$$

oder:

$$RL = P_1 l_1 - P_2 l_1 - P_2 l_2 + P_2 l_1$$

oder:

3). . . $RL = P_1 l_1 - P_2 l_2$

was zu beweisen war.

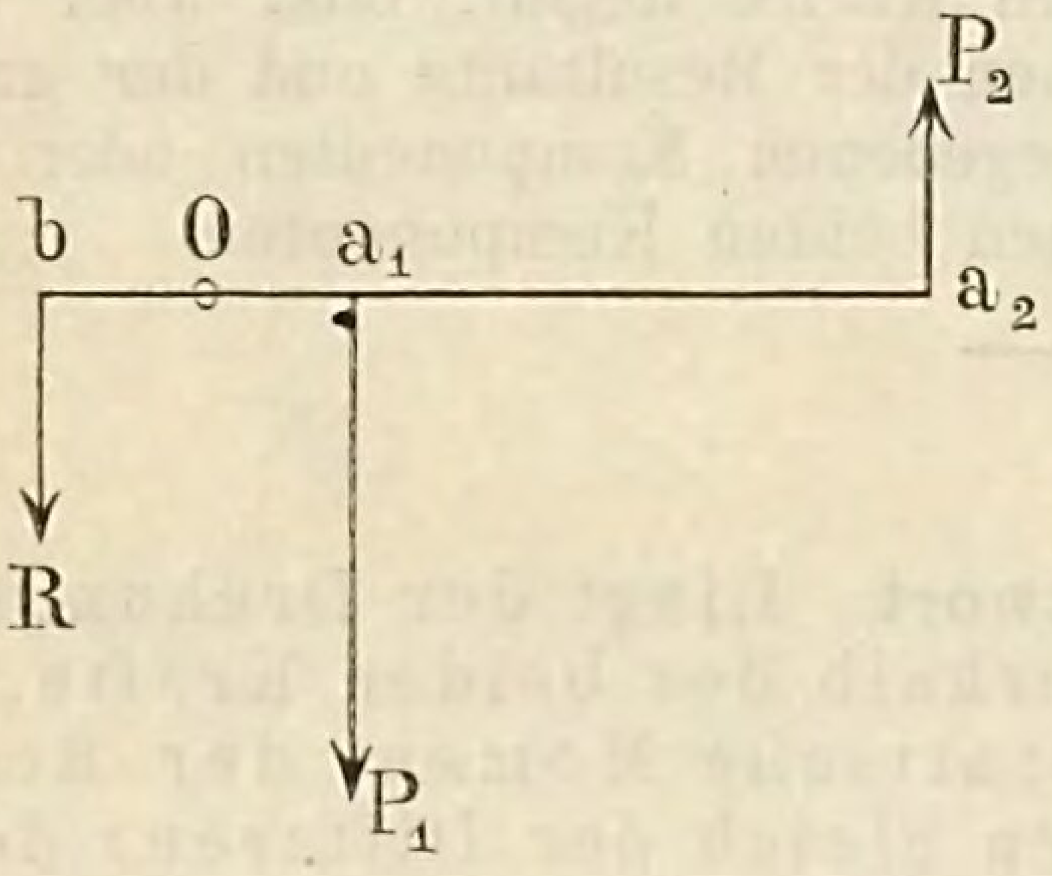
Hieraus folgt für:

$$4). \quad . \quad . \quad . \quad L = \frac{P_1 l_1 - P_2 l_2}{P_1 - P_2}$$

Da R und L positive Grössen sind, so muss $P_1 l_1$ grösser als $P_2 l_2$ sein.

Man kann aus der Lage und Grösse der Kräfte P_1 und P_2 leicht die Lage des Angriffspunktes b der Resultante finden und trägt das so ermittelte L [siehe Gleich. 4).] von O aus nach der grösseren Kraft P_1 hin auf $\overline{O a_1}$ ab.

Figur 82.



2. Beweis: Der Drehungspunkt O liege auf der verlängerten Angriffslinie zwischen a_1 und b, siehe Figur 82, es ist:

$$5). \quad . \quad . \quad . \quad R = P_1 - P_2 \quad \text{(siehe Antwort auf Frage 24)}$$

ferner ist:

$$L = \overline{O b}$$

oder:

$$L = \overline{a_1 b} - \overline{a_1 O}$$

oder, da nach Antwort auf Frage 25:

$$\overline{a_1 b} : \overline{a_1 a_2} = P_2 : R$$

oder:

$$\overline{a_1 b} : (l_2 - l_1) = P_2 : P_1 - P_2$$

oder:

$$\overline{a_1 b} = \frac{P_2 (l_2 - l_1)}{P_1 - P_2} \text{ ist}$$

und für $\overline{a_1 O} = l_1$ gesetzt werden kann, so ist:

$$6). \quad . \quad . \quad . \quad L = \frac{P_2 (l_2 - l_1)}{P_1 - P_2} - l_1$$

Multipliziert man Gleichung 5). und 6)., so erhält man:

$$RL = P_2 (l_2 - l_1) - l_1 (P_1 - P_2)$$

oder:

$$RL = P_2 l_2 - P_2 l_1 - P_1 l_1 + P_2 l_1$$

oder:

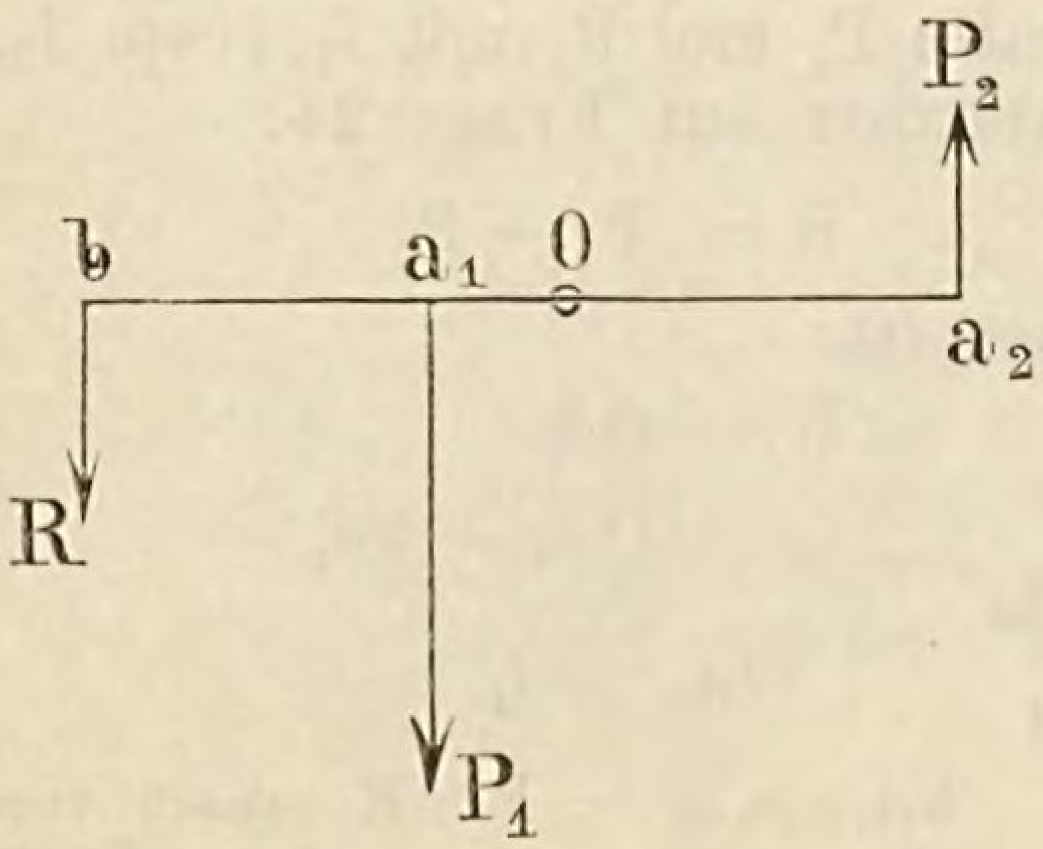
$$7). \quad . \quad . \quad RL = P_2 l_2 - P_1 l_1$$

und hieraus:

$$8). \quad . \quad . \quad L = \frac{P_2 l_2 - P_1 l_1}{P_1 - P_2}$$

In diesem Falle liegt L von O aus nicht nach P_1 hin, sondern nach der entgegengesetzten Seite, es hat aber auch die grössere Kraft P_1 das kleinere Moment.

Figur 83.



3. Beweis: Liegt O zwischen a_1 und a_2, so ist, siehe Figur 83:

$$R = P_1 - P_2$$

ferner ist:

$$L = \overline{O b}$$

oder:

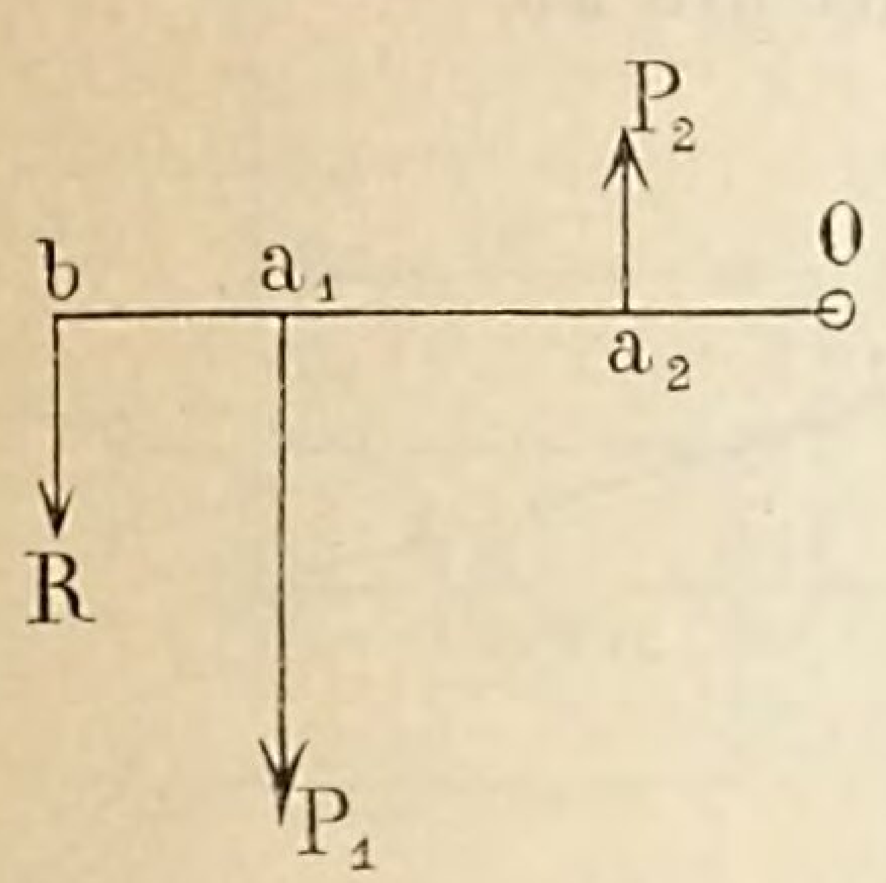
$$L = \overline{O a_1} + \overline{a_1 b}$$

oder, da

$$\overline{O a_1} = l_1$$

und $\overline{a_1 b} : \overline{a_1 a_2} = P_2 : R$

Figur 84.



d. h.:

$$\overline{a_1 b} : l_1 + l_2 = P_2 : P_1 - P_2$$

also:

$$\overline{a_1 b} = \frac{P_2 (l_1 + l_2)}{P_1 - P_2}$$

dies mit dem Wert für R multipliziert, gibt:

$$RL = l_1 (P_1 - P_2) + P_2 (l_1 + l_2)$$

oder:

9). . . $RL = P_1 l_1 + P_2 l_2$

und daraus:

10). . . $L = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2}{P_1 - P_2}$

Die Strecke L liegt von 0 aus nach der grösseren Kraft P_1 hin.

4. **Beweis**: Liegt 0 auf der Verlängerung von $\overline{a_1 a_2}$ über a_2 hinaus, Figur 84, so ist:

$$R = P_1 - P_2$$

ferner ist:

$$L = \overline{0 b}$$

oder:

$$L = \overline{0 a_1} + \overline{a_1 b}$$

oder, da

$$\overline{0 a_1} = l_1$$

und

$$\overline{a_1 b} : \overline{a_1 a_2} = P_2 : R$$

oder:

$$\overline{a_1 b} : l_1 - l_2 = P_2 : P_1 - P_2$$

oder:

$$\overline{a_1 b} = \frac{P_2 (l_1 - l_2)}{P_1 - P_2}$$

so ist:

$$L = l_1 + \frac{P_2 (l_1 - l_2)}{P_1 - P_2}$$

dies mit dem Wert für R multipliziert, gibt:

$$RL = l_1 (P_1 - P_2) + P_2 (l_1 - l_2)$$

oder:

11). . . $RL = P_1 l_1 - P_2 l_2$

und

12). . . . $L = \frac{P_1 l_1 - P_2 l_2}{P_1 - P_2}$

Die Strecke L liegt von 0 aus nach der grösseren Kraft P_1 hin, welche dieses Mal wieder das grössere Moment hat.

Frage 37. Welcher Satz lässt sich aus den obigen Beweisen über die Lage des Angriffspunktes der Resultante aufstellen?

Antwort. Zur Bestimmung der Lage des Angriffspunktes der Resultante dividiert man, für den Fall, dass der Drehungspunkt ausserhalb der Angriffspunkte der beiden Komponenten liegt, die Differenz der Momente der Kräfte durch die Differenz der Kräfte [siehe die obigen Gleichungen 4)., 8). und 12)] und trägt die so erhaltene Strecke L vom Drehpunkt aus nach der grösseren Kraft hin oder nach

Erkl. 95. Aus nebenstehendem Satz ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1). Greift die Resultante im Drehpunkt an, dann ist $L = 0$, also auch $RL = 0$, d. h. $P_1 l_1 = P_2 l_2$, d. h. die statischen Momente der beiden Kräfte P_1 und P_2 sind einander gleich.

2). Der Angriffspunkt der Resultante fällt mit dem Drehungspunkt zusammen, wenn letz-

terer ausserhalb der Kräfte liegt und die statischen Momente der Kräfte einander gleich sind.

Ist nämlich in obigen Gleichungen 3). und 7). $P_1 l_1 = P_2 l_2$, so ist $RL = 0$, da aber R grösser als 0, so ist $L = 0$, d. h. O fällt mit *b* zusammen.

Ist in Gleichung 9). $P_1 l_1 = P_2 l_2$, so ist $RL = 2 P_1 l_1$, also RL grösser als 0 und auch L grösser als 0.

Im Fall des obigen 4. Beweises endlich kann $P_1 l_1$ nie $= P_2 l_2$ werden, denn:

P_1 ist grösser P_2 und
l_1 " " l_2, folglich ist auch
$P_1 l_1$ grösser $P_2 l_2$

3). Greift eine der beiden gegebenen Kräfte im Drehungspunkt an, so ist das statische Moment der Resultante = dem statischen Moment der andern Kraft. (Man braucht nur in Gleichung 3)., 7)., 9). oder 11). für l_1 oder $l_2 = 0$ einzusetzen.)

4). Ist der Drehungspunkt fest, so lässt sich eine darauf wirkende Kraft ersetzen durch eine in der Kraftebene auf der entgegengesetzten Seite des Punktes und nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft, sobald das statische Moment unverändert bleibt. Dabei ist es gleichgiltig, ob die sich gegenseitig ersetzenden Kräfte parallel laufen oder eine beliebige Lage in der Kräfteebene haben, wenn nur ihre statischen Momente in Bezug auf den festen Punkt gleich sind und beide das nämliche Drehungsbestreben haben (siehe Antwort auf Frage 30 und 31).

der entgegengesetzten Seite auf der Richtung von $\overline{a_1, a_2}$ ab, je nachdem die grössere Kraft auch das grössere Moment hat oder nicht. Liegt der Drehpunkt zwischen den Angriffspunkten der beiden Komponenten, so dividiert man die Summe der Momente der Kräfte durch die Differenz der Kräfte [siehe obige Gleich. 10).] und trägt die so erhaltene Strecke L vom Drehpunkt aus stets nach der grösseren Kraft hin ab.

Frage 38. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem statischen Moment der Resultante von mehr als zwei nach entgegengesetzten Seiten der Angriffslinie wirkenden Kräften und den statischen Momenten der letzteren?

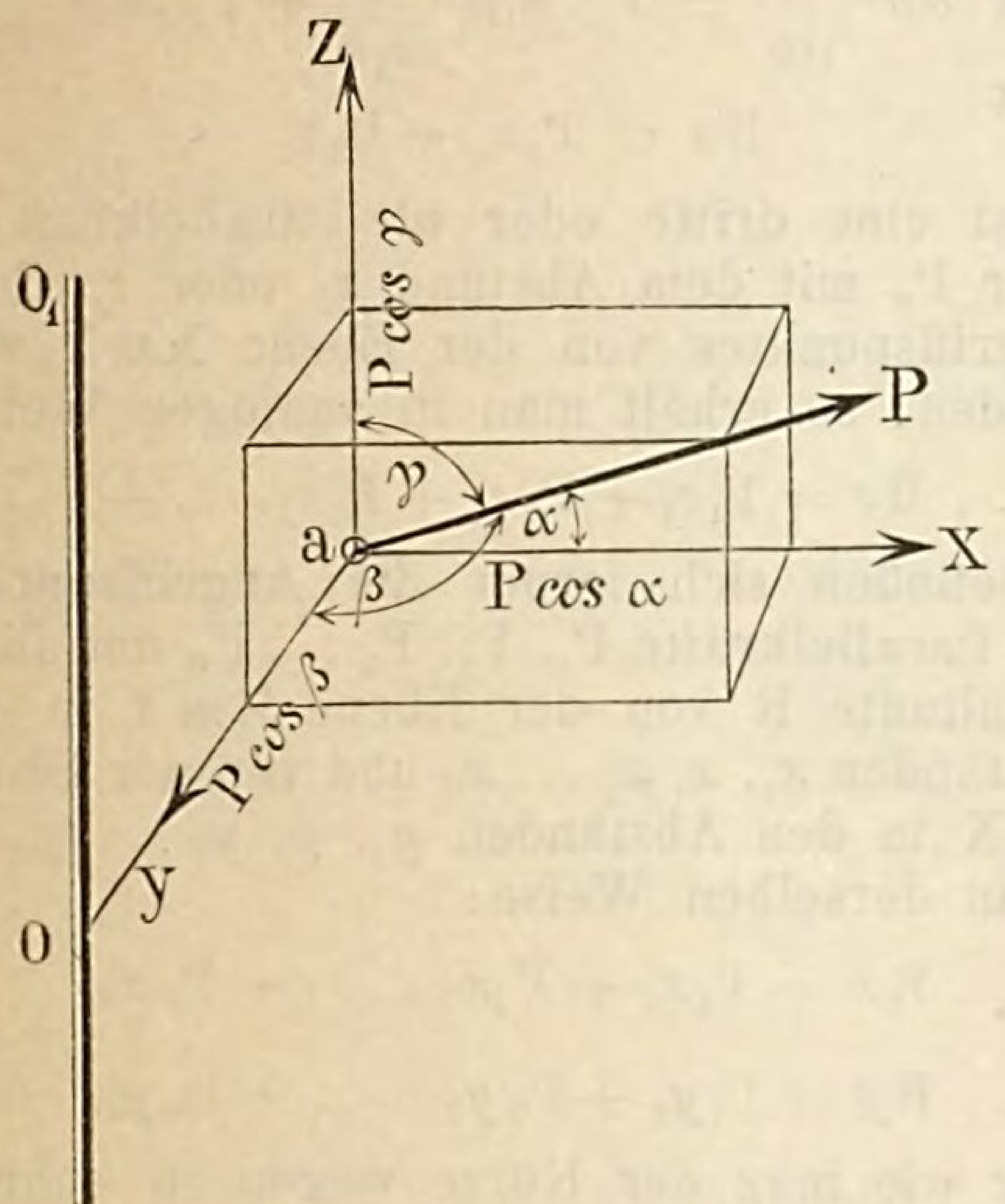
Antwort. Wirken mehr als zwei Kräfte nach entgegengesetzten Seiten der Angriffslinie, so suche man (nach Antwort auf Frage 34) die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte auf jeder Seite und ersetze dieselben durch das statische Moment ihrer Resultante, wodurch man auf einen der vier Fälle (siehe Antwort auf Frage 36) geführt wird. Je nach der Lage des Drehungspunktes zu den Angriffspunkten der beiden Resultanten wird dann die Summe oder Differenz der statischen Momente beider Resultanten gleich sein dem statischen Moment der Resultante aller Kräfte, oder für den Fall, dass die beiden Resultanten einander gleich werden, bilden dieselben ein Kräftepaar (siehe nächsten Abschnitt).

In analoger Weise bestimmt man den Hebelarm L der Resultante (siehe die folgenden Aufgaben).

d. Ueber die statischen Momente von Kräften in verschiedenen Ebenen.

Frage 39. Welches ist der Begriff des statischen Moments in seiner allgemeinsten Form?

Figur 85.



Antwort. In Figur 85 sei a ein materieller Punkt und P eine von den Kräften, die auf denselben wirken. Die gegebene feste Gerade $\overline{O O_1}$ ist die Drehungsachse. Wenn man die Kraft P in drei rechtwinklig zueinander gerichtete Seitenkräfte zerlegen will, so, dass deren Beziehungen zu jener Achse in ihrer einfachsten Gestalt hervortreten, so bieten sich hierzu folgende drei Richtungen dar.

Die Richtung $\overline{az}$ der einen Seitenkraft sei parallel der Achse $\overline{O O_1}$, die Richtung der zweiten $\overline{ay}$ sei senkrecht zur Achse $\overline{O O_1}$ und die Richtung der dritten $\overline{ax}$ sei rechtwinklig zu den beiden vorigen gerichtet. Sind α, β und γ die resp. Winkel, welche die Kraft P mit diesen drei Richtungen einschliesst, so sind $P.\cos\gamma$, $P.\cos\beta$ und $P.\cos\alpha$ die drei Seitenkräfte.

Das Produkt $P.\cos\alpha.\overline{aO}$ wird das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die Achse $\overline{O O_1}$ genannt.

Man erhält demnach das statische Moment einer gegebenen Kraft in Bezug auf eine gegebene Achse, indem man diejenige der drei Seitenkräfte, welche sowohl zur Achse als auch zu dem vom Angriffspunkt auf die Achse gefällten Perpendikel rechtwinklig gerichtet ist mit der Länge eben dieses Perpendikels multipliziert.

Ist der Winkel $\alpha = 90^0$, so ist das statische Moment der Kraft $P = 0$, indem die Kraftrichtung mit der Achsenrichtung in einer und derselben Ebene liegt.

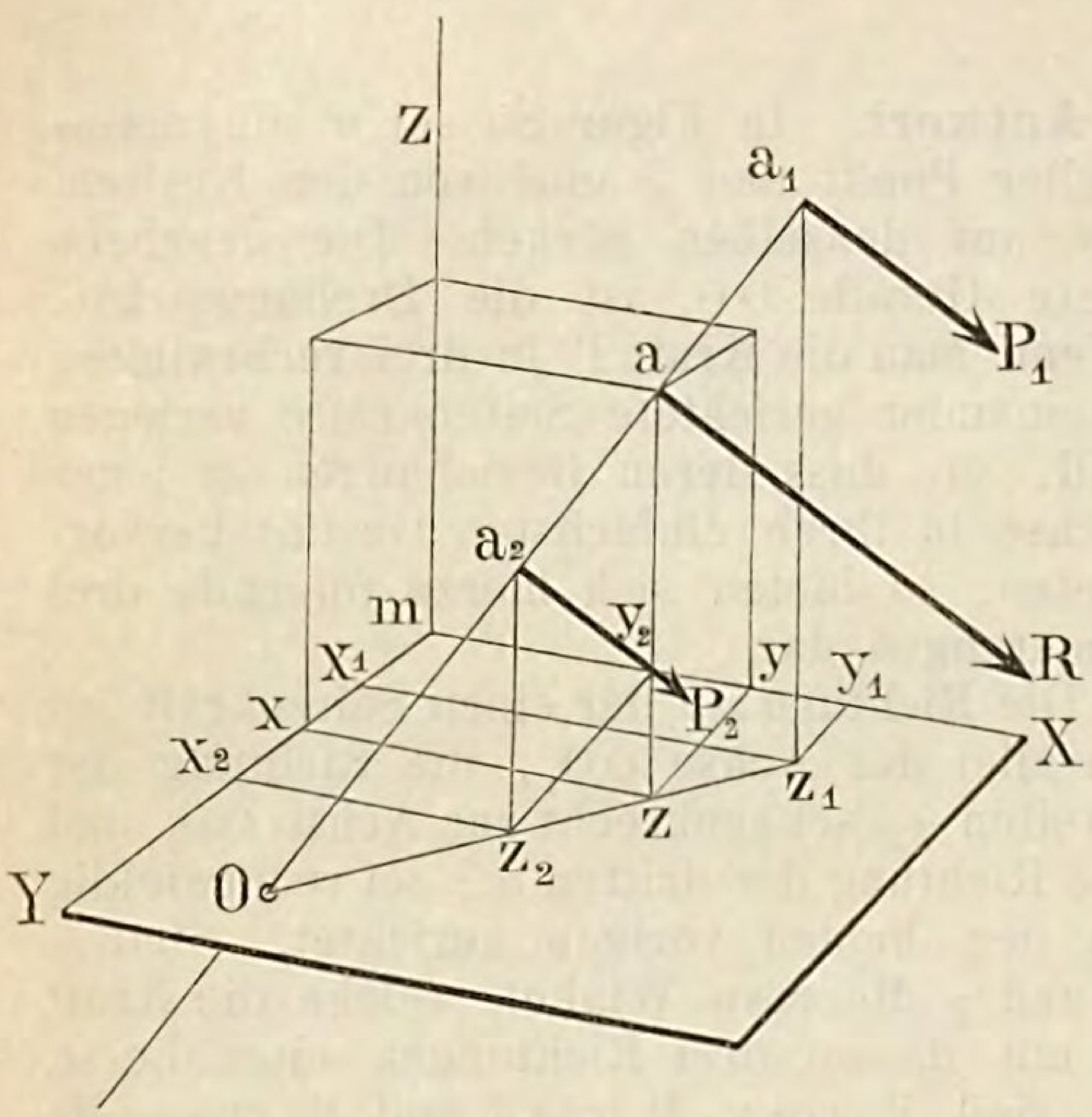
Frage 40. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem statischen Moment der Resultante paralleler Kräfte im Raum und den statischen Momenten dieser Komponenten?

Antwort. Parallele Kräfte im Raum lassen sich ersetzeu durch eine Mittelkraft, welche gleich ist der Summe der Parallelkräfte und deren statisches Moment gleich ist der Summe der statischen Momente der parallelen Kräfte in Bezug auf dieselbe Drehungsachse.

Es seien in Figur 86 P_1 und P_2 zwei parallele Kräfte, $R = P_1 + P_2$ ihre Resultante und a_1, a und a_2 die Angriffspunkte dieser Kräfte. Verlängert man die Angriffslinie $\overline{a_1 a_2}$ bis zu ihrem Durchschnittspunkt O mit der Ebene mxy, so ist nach Antw. auf Frage 34:

$$1). \quad . \quad . \quad R.\overline{ao} = P_1.\overline{a_1 o} + P_2.\overline{a_2 o}$$

Figur 86.



Erkl. 96. Aus nebenstehender Antwort ergeben sich folgende Sätze:

1). Sind die einzelnen Parallelkräfte und die Abstände ihrer Angriffspunkte von drei Ebenen, welche man gewöhnlich senkrecht zueinander wählt, gegeben, so kann man mittels der Gleich. 1:

$$R = P_1 + P_2 \ldots + P_n$$

die Mittelkraft und mittels der nebenstehenden Gleichungen 2)., 3). und 4). die Abstände ihres Angriffspunktes von den drei Grundebenen berechnen. Hierdurch ist der Ort desselben vollständig bestimmt.

2). Aus den Gleichungen 2)., 3). und 4). ist ersichtlich, dass der Ort des Angriffspunktes der Resultante nur abhängig ist von der Grösse der Parallelkräfte und der Lage ihrer Angriffspunkte, keineswegs aber von ihrer Richtung. Somit bleibt auch bei anderer Richtung der Kräfte der Angriffspunkt unverändert und aus diesem Grund nennt man den Angriffspunkt der Resultante paralleler Kräfte den Mittelpunkt des Kräftesystems (s. Erkl. 78).

3). In Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gelegte Ebene ist das statische Moment der Mittelkraft, also auch die Summe der statischen Momente der Parallelkräfte = 0. Umgekehrt, wenn für eine bestimmte Ebene die Summe der statischen Momente der Parallelkräfte = 0 ist, so liegt in ihr der Mittelpunkt der Parallelkräfte.

4). Sind zwei oder mehr Systeme mit parallelen Kräften unter sich verbunden, so ist auch das statische Moment der Mittelkraft sämtlicher Systeme gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Systeme.

Fällt man von den Angriffspunkten auf die Ebene XmY die Lote z, z_1 und z_2, so ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $a_1 z_1 o$, azo und $a_2 z_2 o$:

$$z : \overline{ao} = z_1 : \overline{a_1 o} = z_2 : \overline{a_2 o}$$

Multipliziert man die Gleichung 1). gliedweise mit je einem dieser Verhältnisse, so erhält man:

$$R \cdot \overline{ao} \cdot \frac{z}{\overline{ao}} = P_1 \cdot \overline{a_1 o} \cdot \frac{z_1}{\overline{a_1 o}} + P_2 \cdot \overline{a_2 o} \cdot \frac{z_2}{\overline{a_2 o}}$$

oder:

$$R z = P_1 z_1 + P_2 z_2$$

Ist eine dritte oder n^{te} Parallelkraft P_3 oder P_n mit dem Abstand z_3 oder z_n ihres Angriffspunktes von der Ebene XmY vorhanden, so erhält man in analoger Weise:

$$2). \ldots R z = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \ldots + P_n z_n$$

Befinden sich ferner die Angriffspunkte der Parallelkräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ und ihrer Resultante R von der Ebene ZmY in den Abständen $x_1, x, x_2 \ldots x_n$ und von der Ebene ZmX in den Abständen $y_1, y, y_2 \ldots y_n$, so ist in derselben Weise:

$$3). \ldots R x = P_1 x_1 + P_2 x_2 \ldots + P_n x_n$$

und

$$4). \ldots R y = P_1 y_1 + P_2 y_2 \ldots + P_n y_n$$

oder wie man der Kürze wegen zu schreiben pflegt:

$$5). \ldots \begin{cases} R x = \Sigma \; P_1 x_1 \\ R y = \Sigma \, . \, P_1 y_1 \\ R z = \Sigma \, . \, P_1 z_1 \end{cases}$$

Setzt man für $R = \Sigma P_1$, so erhält man aus obigen Gleichungen 5). für:

$$x = \frac{\Sigma \, . \, P_1 x_1}{\Sigma P_1}$$

$$y = \frac{\Sigma \, . \, P_1 y_1}{\Sigma P_1}$$

$$z = \frac{\Sigma \, . \, P_1 z_1}{\Sigma P_1}$$

d. h. der Abstand des Mittelpunkts paralleler Kräfte von irgend einer Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf diese Ebene, dividiert durch die algebraische Summe dieser Kräfte.

Frage 41. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem statischen Moment der Resultante nicht paralleler Kräfte im Raume und den statischen Momenten dieser Komponenten?

Antwort. Auch in diesem Falle ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte in Bezug auf eine gegebene Achse.

Wenn aP (siehe Figur 85) die sich aus dem Kräfteparallelepipedon ergebende Resultante R vorstellt, so ist das statische Moment derselben in Bezug auf die Drehachse $\overline{OO_1}$:

$$M = R \cdot \overline{aO}$$

Die Grösse Rx hat nach dem Lehrsatz vom Kräfteparallelepipedon (siehe dort) die Bedeutung:

$$Rx = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 \ldots + P_n \cdot \cos\alpha_n$$

Die Substitution dieses Wertes ergibt für M die Gleichung:

$$M = P_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \overline{aO} + P_2 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \overline{aO} \ldots + P_n \cdot \cos\alpha_n \cdot \overline{aO}$$

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind, nach der in Antwort auf Frage 39 gegebenen Definition die statischen Momente der Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$ in Bezug auf die Achse $\overline{OO_1}$.

Bezeichnet man diese statischen Momente, für welche positive und negative Werte sich ergeben werden, je nachdem die einzelnen Winkel spitze oder stumpfe sind resp. mit M_1, $M_2 \ldots M_n$, so erhält man:

$$M = M_1 + M_2 \ldots + M_n$$

Frage 42. Unter welchen Bedingungen wird im allgemeinen die drehende Bewegung eines auf einen Körper einwirkenden Systems verschieden gerichteter Kräfte im Raum gänzlich aufgehoben, d. h. wenn wird das System in Bezug auf drehende Bewegung um eine feste Achse im Gleichgewicht sein?

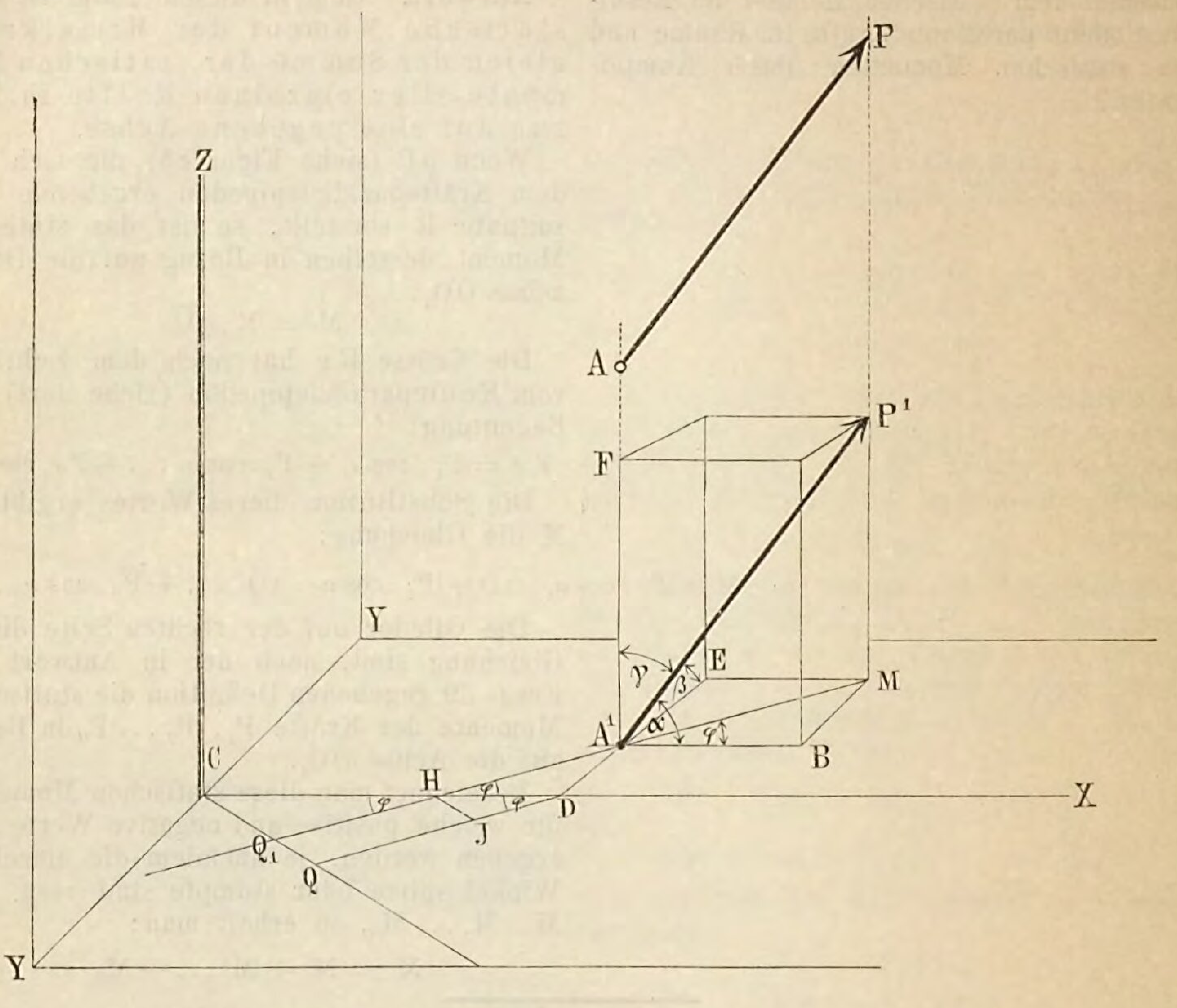
Antwort. Zunächst ist auch hier, wie bei der fortschreitenden Bewegung (siehe Kräfteparallelepipedon) zu bemerken, dass die drehende Bewegung eines Kräftesystems ganz aufgehoben sein wird, wenn sie nur für drei untereinander senkrechte Achsen aufgehoben ist.

Es seien $\overline{CX}$, $\overline{CY}$ und $\overline{CZ}$, siehe Fig. 87, die drei zueinander senkrechten Koordinatenachsen, zwischen denen irgendwo im Raum eine der gegebenen Kräfte, z. B. die Kraft P an dem materiellen Punkt A angreift und mit den Achsen resp. die Winkel α, β und γ bildet.

Fällt man vom Punkt A ein Lot $\overline{AA^1}$ auf die Ebene XY und zieht vom Treffpunkt A^1 in derselben Ebene ein Lot $\overline{A^1D}$ auf die Achse $\overline{CX}$, so sind $\overline{CD} = x$, $\overline{DA^1} = y$ und $\overline{AA^1} = z$ die drei Koordinaten des Angriffspunkts A der Kraft P.[1])

[1]) Siehe Erkl. 97.

Figur 87.



Erkl. 97. Unter Koordinaten (vom lat. coordinatus = zugeordnet) versteht man Zahlengrössen, durch welche die Lage von Punkten in einer Ebene oder im Raum bestimmt wird, zu welchem Zweck für jeden Punkt 2 resp. 3 einander zugeordnet sind, d. h. zusammengehören. Will man die Lage eines Punktes beschreiben, so geht man von bekannten als festliegend angenommenen Punkten, Linien oder Flächen aus und gibt an, in welcher Entfernung und Richtung von diesen jener Punkt liegt; die hierzu nötigen Längen und Winkel, welche die Lage des Punktes bestimmen, heissen Koordinaten.

Wenn z. B. in einer Ebene zwei zueinander senkrechte, unbegrenzte gerade Linien XOX und YOY, siehe Figur 88, gezogen werden, so ist die Lage des Punktes P bestimmt, sobald man seine Entfernung von den beiden Linien, d. h. die Länge der Lote $\overline{PY_1} = \overline{OX_1}$ und $\overline{PX_1} = \overline{OY_1}$ kennt. Die beiden Lote, durch deren Längen die Lage des Punktes unzweideutig angegeben wird, heissen die Koordinaten des Punktes P. Will man nun die Lage eines Punktes im Raum bezeichnen, so legt man ein Koordinatensystem zu Grunde, welches aus drei aufeinander senkrechten Koordinaten-

Lässt man dann die Gerade $\overline{AP}$ mit sich selbst parallel herab, bis ihr Angriffspunkt A in der Ebene YX in den Punkt A^1 fällt, so stellt $\overline{A^1P^1}$ die so herabgelassene Kraft P nach Grösse und Richtung vor.

Man zerlege diese Kraft $\overline{A^1P^1} = P$ in ihre drei senkrechten Seitenkräfte $\overline{A^1B} = X$, $\overline{A^1E} = Y$ und $\overline{A^1F} = Z$, indem man das rechtwinklige Parallelepipedon zeichnet, dessen Diagonale $\overline{A^1P^1}$ ist und dessen Seiten mit den drei Koordinatenachsen parallel sind.

In demselben ist Winkel $BA^1P^1 = \alpha$, $EA^1P^1 = \beta$ und $FA^1P^1 = \gamma$, also auch die Seitenkraft $X = P \cdot \cos\alpha$, $Y = P \cdot \cos\beta$ und $Z = P \cdot \cos\gamma$.

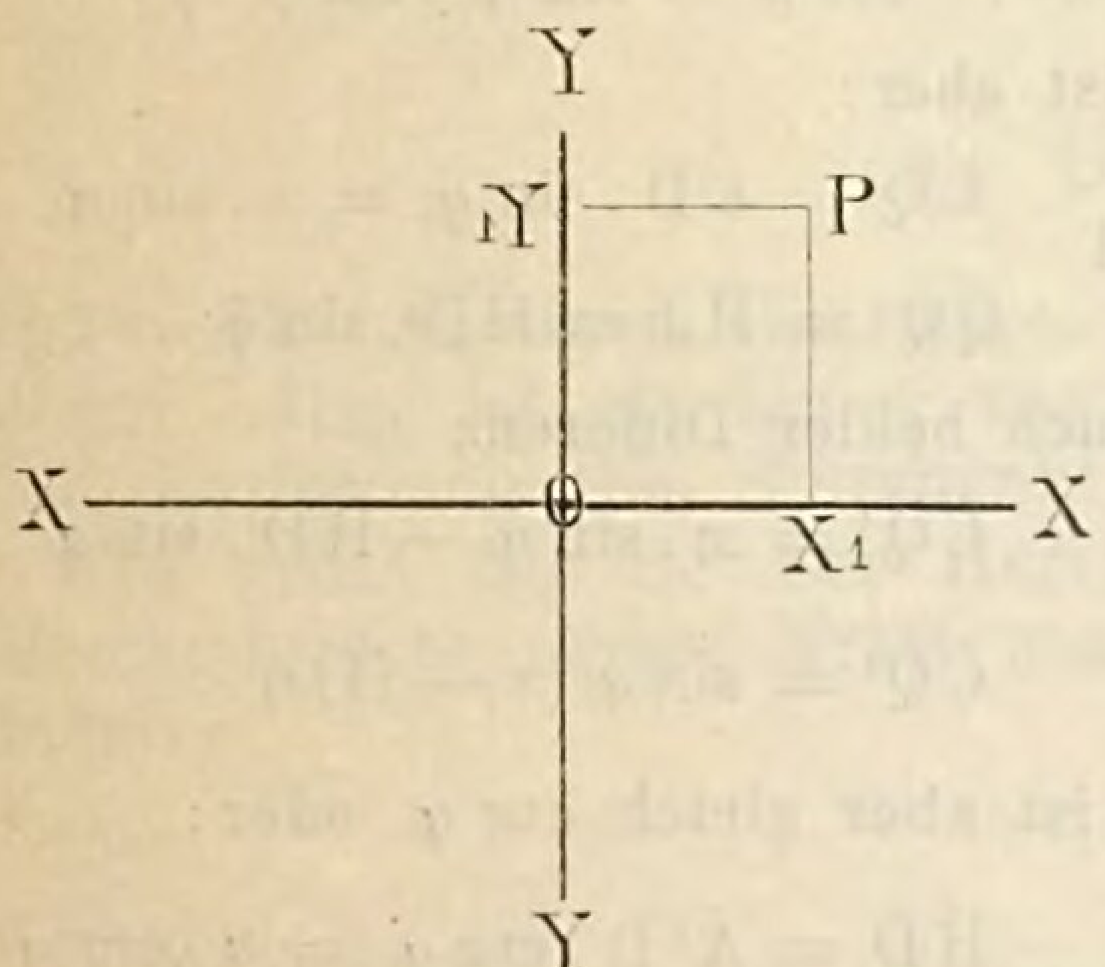
Von diesen drei Seitenkräften ist aber die letzte Kraft Z auf die Drehung des Systems um die Achse $\overline{CZ}$ offenbar ohne allen Einfluss, weil diese Kraft der genannten Achse parallel läuft und wir haben demnach nur die Wirkungen der beiden Kräfte $\overline{A^1B} = X$ und $\overline{A^1E} = Y$ zu untersuchen.

Denkt man sich Punkt A^1 mit dem Punkt

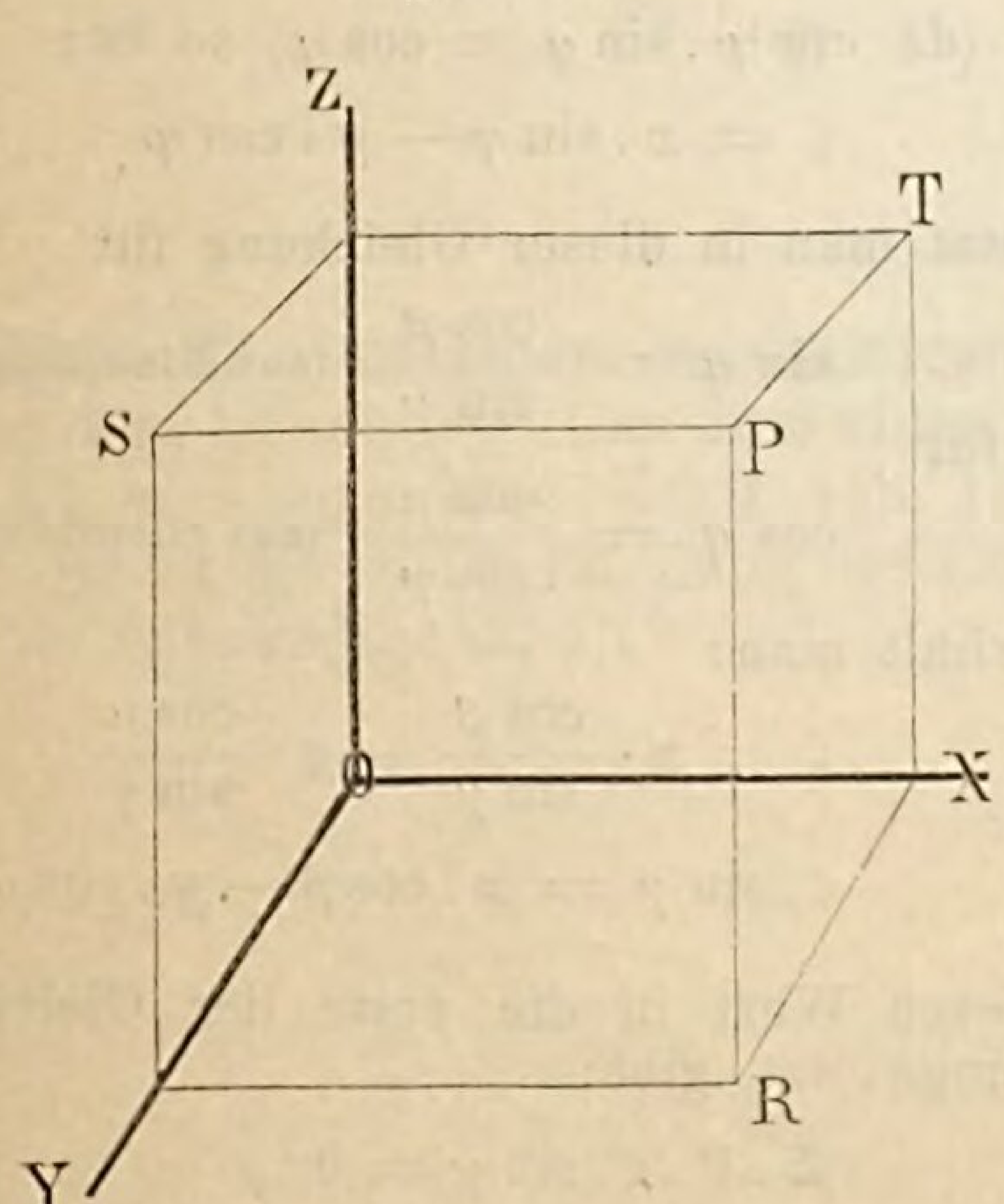
achsen $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ und $\overline{OZ}$ besteht. Durch diese Achsen werden drei zueinander senkrechte Ebenen, die Koordinatenebenen festgelegt, siehe Figur 89, nämlich durch $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ die Ebene XOY, durch $\overline{OY}$ und $\overline{OZ}$ die Ebene YOZ und durch $\overline{OZ}$ und $\overline{OX}$ die Ebene ZOX.

Ist nun ein Punkt P im Raum durch seine Koordinaten zu bezeichnen, so fällt man von ihm aus das Lot $\overline{PR}$ auf die XY Ebene; ist die Länge desselben, nebst den Koordinaten $\overline{RY}$ und $\overline{RX}$ des Fusspunkts R bekannt, so ist damit die Lage von Punkt P unzweifelhaft bestimmt. $\overline{RX}$, $\overline{RY}$ und $\overline{PR}$ sind also die Koordinaten des Punktes P, oder da $\overline{RX} = \overline{PT}$ und $\overline{RY} = \overline{PS}$, so kann man sagen: die rechtwinkligen Raum-Koordinaten eines Punktes sind seine Entfernungen von den drei Koordinatenebenen.

Figur 88.



Figur 89.



C fest verbunden (etwa durch zwei Stangen $\overline{A^1D}$ und $\overline{DC}$), so wird die Kraft $\overline{A^1E} = Y$ den Punkt A^1 um die Achse $\overline{CZ}$ in einer der Uhrzeigerrichtung entgegengesetzten Richtung zu drehen suchen, und zwar um so stärker, je grösser ihre Intensität und je grösser die Entfernung des Punktes A^1 (der Hebelarm der Kraft) von der Achse CZ ist. Diese Entfernung ist aber gleich der senkrecht gegen die Kraft gerichteten Geraden $\overline{CD} = x$, so dass daher diese Kraft $\overline{A^1E} = Y$ den Punkt A^1 mit der Gewalt Yx um die Achse $\overline{CX}$ drehen wird.

Ebenso wird aber auch die Kraft $\overline{A^1B} = X$ den Punkt A^1 um dieselbe Achse und zwar in Uhrzeigerrichtung drehen, und gleichfalls desto stärker, je grösser die Intensität X dieser Kraft und je grösser ihre Entfernung von der Achse $\overline{CX}$, d. h. ihr Hebelarm ist. Dieser ist aber $\overline{A^1D} = y$, also hat diese Kraft das Drehungsbestreben Xy.

Betrachtet man daher beide Drehungen zusammen, so hat man, da sie nach entgegengesetzten Richtungen stattfinden, für die ganze Drehung des Systems, die aus der Wirkung der Kraft P um die Achse $\overline{CZ}$ entsteht, den Ausdruck $Yx - Xy$, oder was dasselbe ist:

$$P\,(x \,.\, \cos\beta - y \,.\, \cos\alpha)$$

Auf ähnliche Weise wird die aus einer zweiten Kraft P' entstehende Drehung des Systems um dieselbe Achse:

$$P'\,(x' .\, \cos\beta' - y' .\, \cos\alpha') \text{ u. s. f.}$$

für alle übrigen etwa vorhandenen Kräfte sein.

Soll daher das System unter der Wirkung aller Kräfte P, P′, P″ keine drehende Bewegung um die $\overline{CZ}$-Achse erzeugen, d. h. soll dasselbe in Beziehung auf die Drehung um die Achse CZ im Gleichgewicht sein, so wird man die Bedingungsgleichung haben:

$$P\,(x . \cos\beta - y . \cos\alpha) + P'\,(x' . \cos\beta' - y' . \cos\alpha') + P''\,(x'' . \cos\beta'' - y'' . \cos\alpha'') = 0$$

oder wie man der Kürze wegen zu schreiben pflegt:

$$\Sigma \,.\, P\,(x \,.\, \cos\beta - y \,.\, \cos\alpha) = 0$$

Völlig ähnliche Ausdrücke erhält man in Bezug auf die beiden anderen Drehungen um die Achse $\overline{YY}$ und $\overline{CX}$. Verwandelt man nämlich die vorhergehenden Grössen:

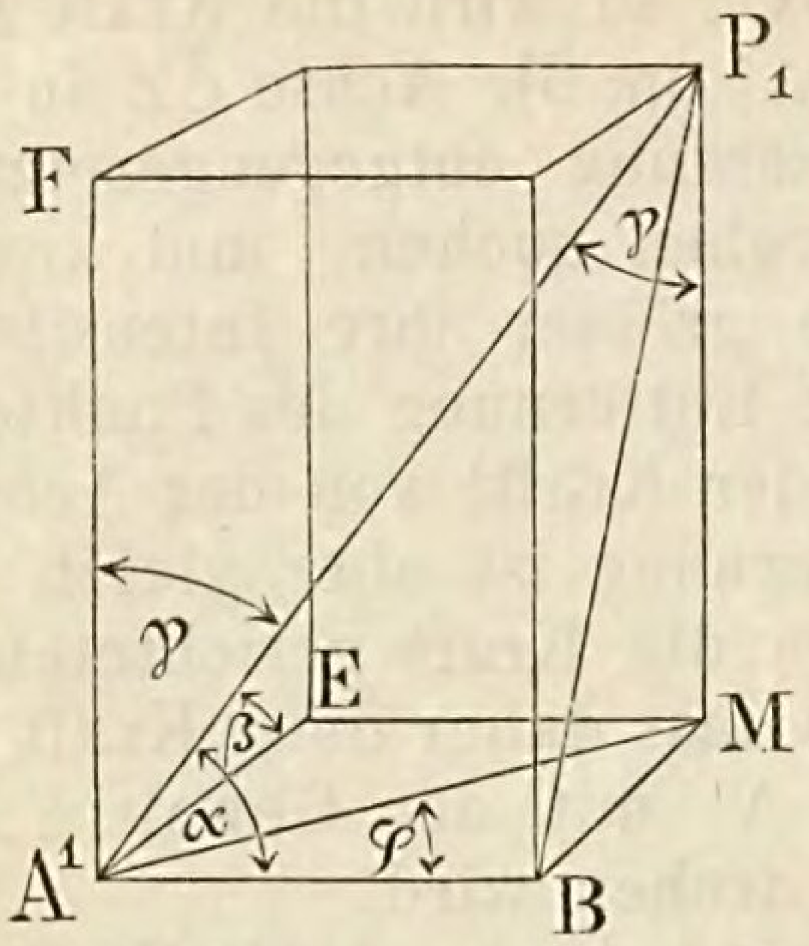
$$x,\ y,\ z \text{ und } \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

in derselben Ordnung in

$$z,\ x,\ y \text{ und } \gamma,\ \alpha,\ \beta$$

und in

Figur 90.



Erkl. 98. Von der Richtigkeit dieser Gleichungen kann man sich direkt überzeugen. Es ist, siehe Figur 90:

im Dreieck A^1P^1B $\quad \cos\alpha = \dfrac{\overline{A^1B}}{\overline{A^1P^1}}$

" " MA^1B $\quad \cos\varphi = \dfrac{\overline{A^1B}}{\overline{A^1M}}$

" " A^1P^1M $\quad \sin\gamma = \dfrac{\overline{A^1M}}{\overline{A^1P^1}}$

Diese Werte in nebenstehende Gleichung 2). eingesetzt, gibt:

$$\frac{\overline{A^1B}}{\overline{A^1P^1}} = \frac{\overline{A^1B}}{\overline{A^1M}} \cdot \frac{\overline{A^1M}}{\overline{A^1P^1}}$$

oder:

$$\frac{\overline{A^1B}}{\overline{A^1P^1}} = \frac{\overline{A^1B}}{\overline{A^1P^1}}$$

Ferner ist im Dreieck EA^1P^1:

$$\cos\beta = \frac{\overline{A^1E}}{\overline{A^1P^1}}$$

oder da $\overline{A^1E} = \overline{BM}$, so ist:

$$\cos\beta = \frac{\overline{BM}}{\overline{A^1P^1}}$$

im Dreieck A^1BM ist:

$$\sin\varphi = \frac{\overline{BM}}{\overline{A^1M}}$$

und im Dreieck A^1P^1M:

$$\sin\gamma = \frac{\overline{A^1M}}{\overline{A^1P^1}}$$

Diese Werte in nebenstehende Gleichung 3). eingesetzt, gibt:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{A^1P^1}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{A^1M}} \cdot \frac{\overline{A^1M}}{\overline{A^1P^1}}$$

oder:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{A^1P^1}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{A^1P^1}}$$

y, z, x und β, γ, α

so erhält man die drei Gleichungen, welche das Gleichgewicht der drehenden Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern bestimmen.

$$1). \ldots \begin{cases} \Sigma . P\,(x . \cos\beta - y . \cos\alpha) = 0 \\ \Sigma . P\,(z . \cos\alpha - x . \cos\gamma) = 0 \\ \Sigma . P\,(y . \cos\gamma - z . \cos\beta) = 0 \end{cases}$$

Es sei nun $\zeta = \overline{CQ^1}$ die kürzeste Entfernung der Richtung der Kraft P von der Achse CZ, welche man erhält, indem man die Diagonale $\overline{MA^1}$ des Parallelogramms $A'BME$ verlängert und auf diese Verlängerung das Lot $\overline{CQ^1}$ zieht. Ferner ziehe man $\overline{DQ}$ parallel $\overline{A^1Q^1}$; ist dann der Winkel $BA^1M = A^1HD = \varphi$, so hat man in den rechtwinkligen Dreiecken des Parallelepipedon die zwei Gleichungen:

2). . . . $\cos\alpha = \cos\varphi . \sin\gamma$

und

3). . . . $\cos\beta = \sin\varphi . \sin\gamma$ [1]

Es ist aber:

$$\overline{CQ} = \overline{CD} . \sin\varphi = x . \sin\varphi$$

und

$$\overline{QQ^1} = \overline{HJ} = \overline{HD} . \sin\varphi$$

also auch beider Differenz

$$\overline{CQ^1} = x . \sin\varphi - \overline{HD} . \sin\varphi$$

oder:

$$\overline{CQ^1} = \sin\varphi\,(x - \overline{HD})$$

$\dfrac{\overline{HD}}{\overline{A^1D}}$ ist aber gleich $\operatorname{ctg}\varphi$ oder:

$$\overline{HD} = \overline{A^1D} . \operatorname{ctg}\varphi = y . \operatorname{ctg}\varphi$$

und daher:

$$\overline{CQ^1} \text{ oder } \zeta = \sin\varphi\,(x - y . \operatorname{ctg}\varphi)$$

oder:

$$\zeta = x . \sin\varphi - y . \operatorname{ctg}\varphi . \sin\varphi$$

oder (da $\operatorname{ctg}\varphi . \sin\varphi = \cos\varphi$) so ist:

$$\zeta = x . \sin\varphi - y . \cos\varphi$$

Setzt man in dieser Gleichung für

$$\sin\varphi = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} \quad \text{(aus Gleichung 3)}$$

und für

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{(aus Gleichung 2)}$$

so erhält man:

$$\zeta = x \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} - y \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

oder:

$$\zeta . \sin\gamma = x . \cos\beta - y . \cos\alpha$$

Diesen Wert in die erste der Gleichungen 1). eingesetzt, gibt:

$$\Sigma . P . \zeta . \sin\gamma = 0$$

[1]) Siehe Erkl. 98.

Nennt man ebenso υ und ξ die senkrechten Entfernungen der Richtung der Kraft P von der Achse YY und CX, so hat man ebenso [s. die obige zweite der Gleich. 1).]:

$$z \,.\, \cos\alpha - x \,.\, \cos\gamma = \upsilon \,.\, \sin\beta$$

und [siehe obige dritte der Gleich. 1).] auch:

$$y \,.\, \cos\gamma - z \,.\, \cos\beta = \xi \,.\, \sin\alpha$$

so dass man also für das Gleichgewicht der drehenden Bewegung hat:

$$4). \quad \ldots \quad \begin{cases} \Sigma \,.\, P \,.\, \xi \,.\, \sin\alpha = 0 \\ \Sigma \,.\, P \,.\, \upsilon \,.\, \sin\beta = 0 \\ \Sigma \,.\, P \,.\, \zeta \,.\, \sin\gamma = 0 \end{cases}$$

d. h. es muss für das Gleichgewicht der drehenden Bewegung die Summe der Momente aller auf einen Körper wirkenden Kräfte in Beziehung auf drei untereinander senkrechte Achsen gleich Null sein.

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 92. An einem einarmigen Hebel von 80 cm Länge ist ein Druck von 30 kg in 20 cm Entfernung vom Stützpunkt wirksam. Wie gross ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Kraft am Ende des Hebels?

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Kraft mit x, so besteht, da für den Fall des Gleichgewichts die statischen Momente der zur Wirkung kommenden Kräfte einander gleich sein müssen, für x die Bestimmungsgleichung:

$$80x = 20 \,.\, 30$$

und hieraus erhält man für:

$$x = \frac{20 \,.\, 30}{80}$$

oder:

$$x = 7\tfrac{1}{2}$$

Die gesuchte Kraft beträgt also $7\frac{1}{2}$ kg.

Aufgabe 93. An einem zweiarmigen Hebel von 2 m Länge wirkt an dem einen Arm von 1,75 m Länge eine Kraft von 18 kg. Wie gross ist die zur Herstellung des Gleichgewichts notwendige Kraft?

Auflösung. Gemäss der Aufgabe ist der eine Hebelarm, an welchem eine Kraft von 18 kg wirkt = 1,75 m, mithin ist der andere Hebelarm, an dem die gesuchte Kraft wirken soll (2 — 1,75) m oder 0,25 m lang.

Bezeichnet man nun die gesuchte Kraft mit x, so besteht nach dem Gesetz der statischen Momente die Relation:

$$0{,}25x = 1{,}75 \,.\, 18$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{1{,}75 \,.\, 18}{0{,}25}$$

oder, da $0{,}25 = \frac{1}{4}$, so ist:

$$x = 4 \,.\, 1{,}75 \,.\, 18$$

oder:

$$x = 126$$

Die gesuchte Kraft ist mithin = 126 kg.

Aufgabe 94. An einer 85 cm langen Kurbel dreht ein Mann mit 30 kg Druck. Wie lang muss die Kurbel sein, wenn ein Knabe mit 17 kg Druck dieselbe Arbeit leistet?

Auflösung. Die Kurbel entspricht einem einarmigen Hebel, dessen Drehungsbestreben um so grösser ist, je grösser die an ihm wirkende Kraft und je länger deren Arm ist. Das Drehungsbestreben der Kraft von 30 kg an einem 0,85 m langen Arm ist 30 . 0,85. Nennen wir nun den zu suchenden Arm x, so ist das Drehungsbestreben der zweiten Kraft von 17 kg auch $17x$ und nach dem Gesetz der statischen Momente erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$17x = 0{,}85 \,.\, 30$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{0{,}85 \,.\, 30}{17}$$

oder:

$$x = 0{,}05 \,.\, 30$$

oder:

$$x = 1{,}50$$

Die gesuchte Länge der Kurbel ist mithin = 1,5 m.

Aufgabe 95. An einem einarmigen Hebel wirken in den Entfernungen $p_1 = 1^1/_2$ m und $p_2 = 5^1/_3$ m vom Drehpunkt senkrecht

a) nach derselben Richtung,

b) nach entgegengesetzten Richtungen

die beiden Kräfte $P_1 = 6^2/_3$ und $P_2 = 10$ kg. Wo muss eine dritte Kraft von $12^2/_3$ kg angebracht werden, um Gleichgewicht zu erzeugen?

Auflösung. a). Nach der in Antwort auf Frage 34 gegebenen Formel ist das statische Moment der Resultante:

$$Rp = P_1 p_1 + P_2 p_2$$

und hieraus erhält man für den unbekannten Hebelarm der Resultante:

$$r = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{R}$$

setzt man in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$r = \frac{6\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} + 10 \,.\, 5\frac{1}{3}}{12\frac{2}{3}}$$

oder:

$$r = \frac{10 + 53\frac{1}{3}}{12\frac{2}{3}}$$

oder:

$$r = \frac{63\frac{1}{3}}{12\frac{2}{3}}$$

oder:

$$r = 5$$

d. h. die vorhandene Kraft von $12^2/_3$ kg muss in 5 m Entfernung vom Drehpunkt nach entgegengesetzter Richtung der Parallelkräfte wirken, wenn Gleichgewicht stattfinden soll.

b). Im zweiten Fall ist das statische Moment von $P_2 p_2$ nach Erkl. 83 als eine negative Grösse in Rechnung zu bringen, und so erhält man für den unbekannten Hebelarm der Resultante:

$$r = \frac{P_1 p_1 - P_2 p_2}{R}$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte ein, so ergibt sich:

$$r = \frac{10 - 53\frac{1}{3}}{12\frac{2}{3}}$$

oder:

$$r = -\frac{43\frac{1}{3}}{12\frac{2}{3}}$$

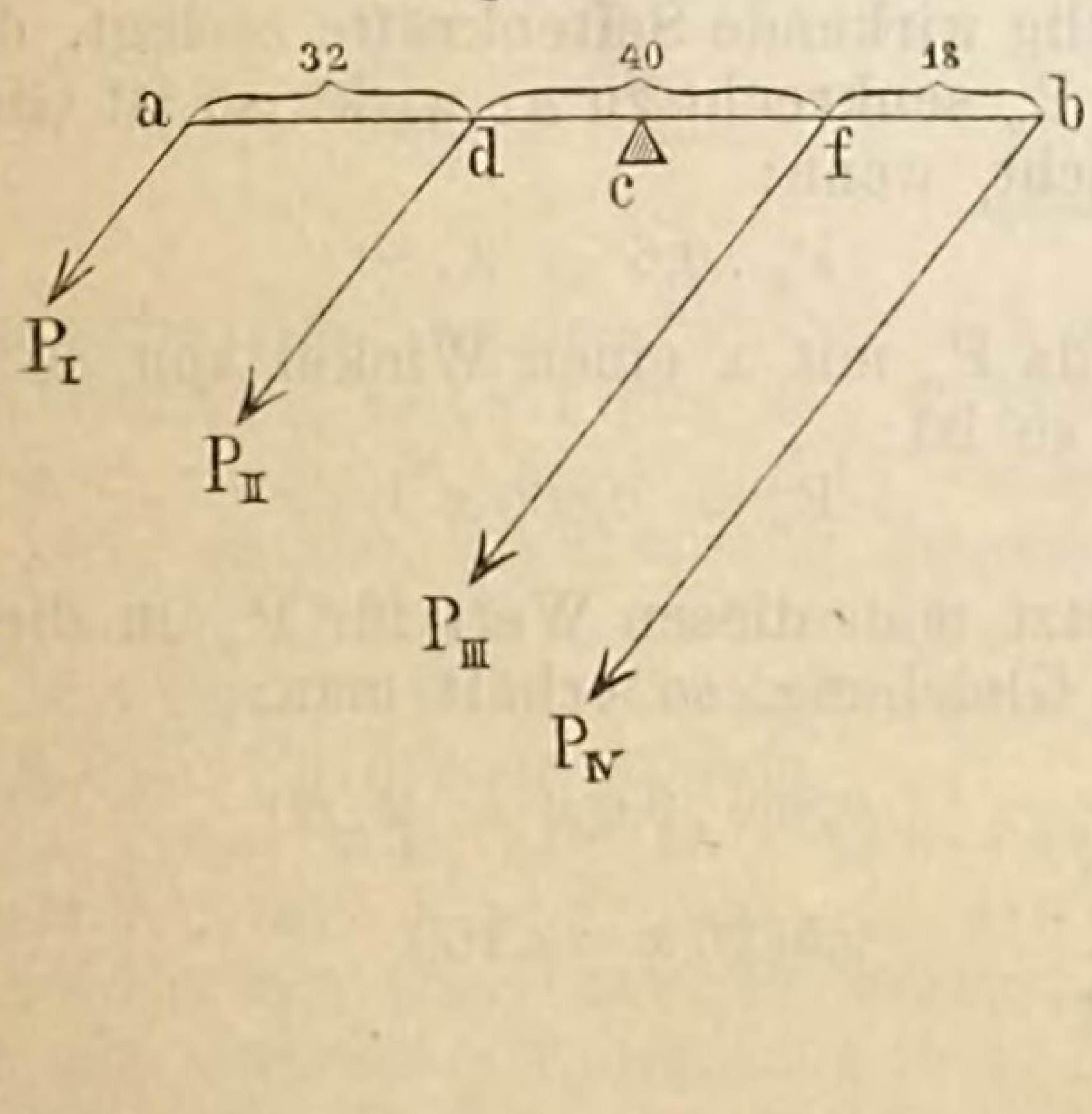
oder:

$$r = -3\frac{8}{19}$$

d. h. die zur Verfügung stehende Kraft von $12^2/_3$ kg muss an einem $3^8/_{19}$ m langen Arm angreifen. Das Minusvorzeichen deutet an, dass das Drehungsbestreben nach links gerichtet ist, und dass somit zur Herstellung des Gleichgewichts die Kraft von $12^2/_3$ kg rechts drehend wirken muss.

Aufgabe 96. Wenn an der Stange ab, siehe Figur 91, in a, d, f und b Kräfte von 30, 35, 40 und 50 kg parallel nach gleicher Richtung wirken, wo muss dann ab unterstützt werden, wenn keine Drehung um den Stützpunkt c erfolgen soll und wenn $\overline{ad} = 32$, $\overline{df} = 40$ und $\overline{fb} = 18$ cm beträgt?

Figur 91.



Auflösung. Bei parallelen Kräften multipliziert man die Kräfte mit den Abständen $\overline{ac}$, $\overline{dc}$, $\overline{fc}$ und $\overline{bc}$, da dieselben den senkrechten Entfernungen proportional sind.

Nennen wir die Entfernung $\overline{dc} = x$, so ist:

$$\overline{ac} = 32 + x$$

$$\overline{fc} = 40 - x$$

$$\overline{bc} = 18 + 40 - x = 58 - x$$

und da nun die Summe der rechts drehenden Momente = der Summe der links drehenden sein muss, so entsteht die Gleichung:

$$\overline{ac} \cdot P_I + \overline{dc} \cdot P_{II} = \overline{fc} \cdot P_{III} + \overline{bc} \cdot P_{IV}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$30(32 + x) + 35x = 40(40 - x) + 50(58 - x)$$

$$960 + 30x + 35x = 1600 - 40x + 2900 - 50x$$

$$30x + 35x + 40x + 50x = 1600 + 2900 - 960$$

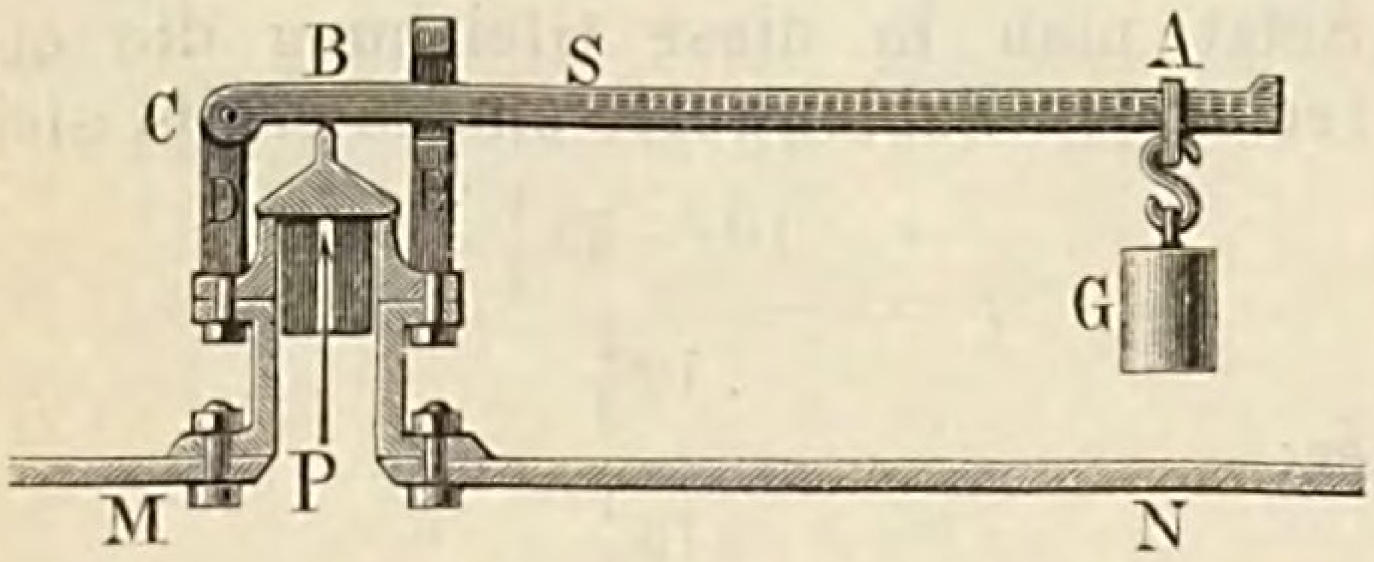
$$155x = 3540$$

$$x = 22{,}84$$

d. h. die Entfernung $\overline{dc}$ beträgt 22,84 cm oder der Stützpunkt c muss in einer Entfernung von $32 + 22{,}84 = 54{,}84$ cm vom Endpunkt a angebracht werden.

Aufgabe 97. Ein Sicherheitsventil verschliesst eine Oeffnung von 2,5 cm Durchmesser und wird durch einen einarmigen Hebel niedergedrückt, der mit 3 kg belastet ist und dessen kurzer Arm 5 cm beträgt. Wie lang muss der längere Arm $\overline{AC}$ genommen werden, wenn der Dampf im Kessel auf 150⁰ erhitzt werden soll?

Figur 92.



Hilfsrechnungen:

1). . . . 2,5 . 2,5 = 6,25

6,25 . 3,14
2500
625
1875
4 : 19,6250 = 4,906

2). . . 4,906 . 4,896
44154
29436
39248
19624
23,887314

Auflösung. Um diese Aufgabe lösen zu können, muss zunächst aus der Wärmelehre bekannt sein, dass bei 150⁰ C. der Dampfdruck auf 1 qcm Kesselwand = 4,869 kg beträgt. Da der Durchmesser der Oeffnung 2,5 cm beträgt, so ist die gedrückte Fläche des Ventils (da die Fläche eines Kreises $= r^2\pi$ oder $\frac{1}{4}\delta^2\pi$ ist):

$$f = \frac{2,5 \,.\, 2,5 \,.\, 3,14}{4}$$

oder:

$$f = 4,906 \text{ qcm}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

und der auf diese Fläche ausgeübte Druck:

$$d = 4,906 \,.\, 4,896$$

oder:

$$d = 23,887$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

oder ca. 24 kg. Dieser Druck wirkt an einem Arm von 5 cm Länge und demnach ist sein statisches Moment 24 . 5, das statische Moment der Kraft von 3 kg ist dagegen $3x$, und es besteht demnach die Gleichung:

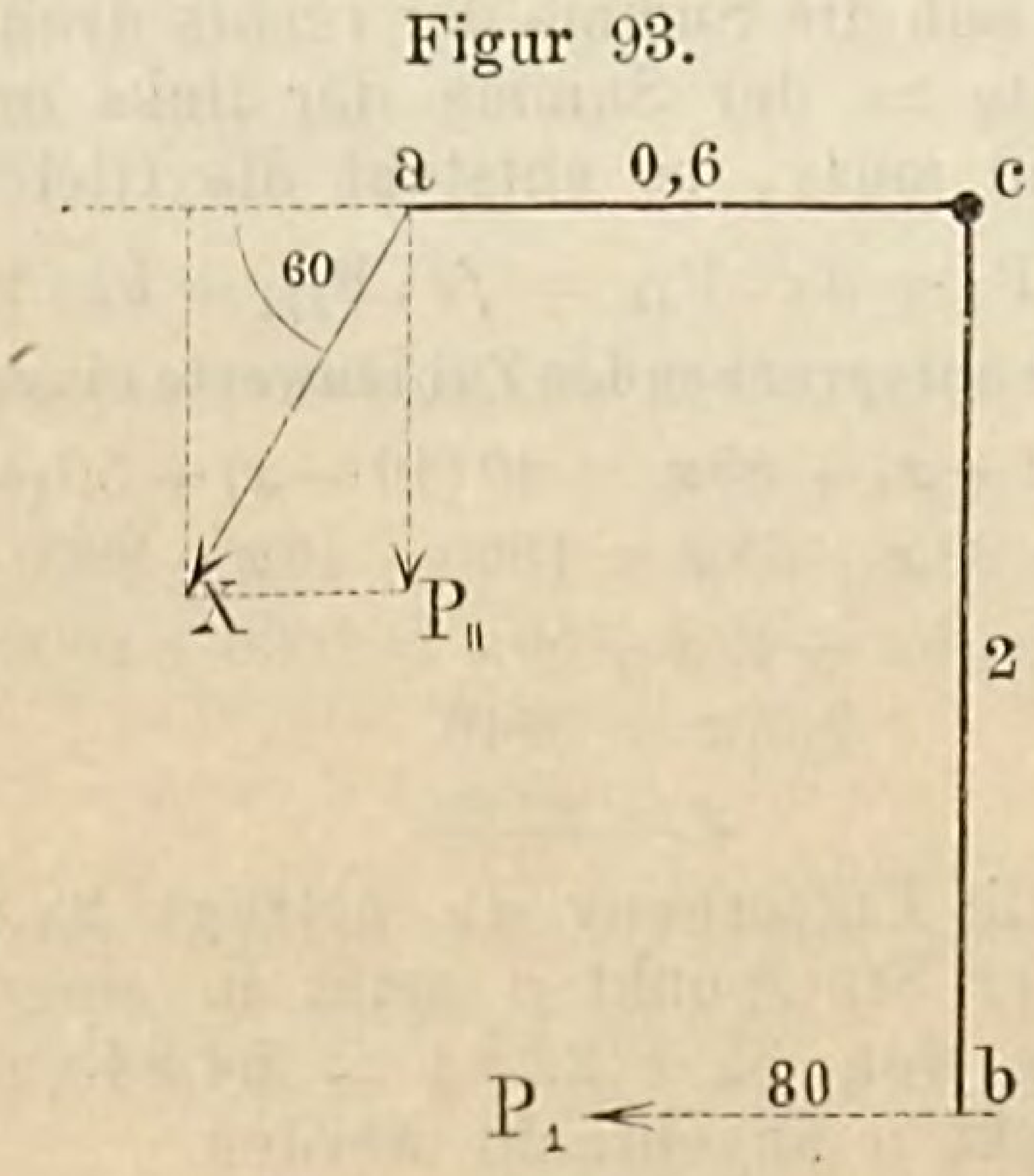
$$3x = 24 \,.\, 5$$

$$x = 8 \,.\, 5$$

oder: $$x = 40 \text{ cm.}$$

Aufgabe 98. An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 60 cm und 2 m betragen, wirkt an dem Ende des 60 cm langen Armes eine Kraft, welche einen Winkel von 60⁰ mit demselben bildet. Wie gross ist dieselbe, wenn ihr durch eine rechtwinklig zu dem 2 m langen Arm wirkende Kraft von 80 kg das Gleichgewicht gehalten wird?

Figur 93.



Auflösung. Denkt man sich die unbekannte Kraft x in zwei zueinander rechtwinklig wirkende Seitenkräfte zerlegt, deren eine P_{II} senkrecht zu $\overline{ac}$ wirkt, so ist Gleichgewicht, wenn:

$$P_{II} \,.\, 0,6 = 2 \,.\, 80$$

ist; da P_{II} mit x einen Winkel von 30⁰ bildet, so ist:

$$P_{II} = 0,866\,x$$ [1])

Setzt man diesen Wert für P_{II} in die vorige Gleichung, so erhält man:

$$0,866 \,.\, 0,6\,x = 2 \,.\, 80$$

oder:

$$0,5196\,x = 160$$

oder:

[1]) Siehe Erkl. 32.

Hilfsrechnung.

160 : 0,5196 =

1600000 : 5196 = 308
15588
41200
41568

$$x = \frac{160}{0,5196}$$

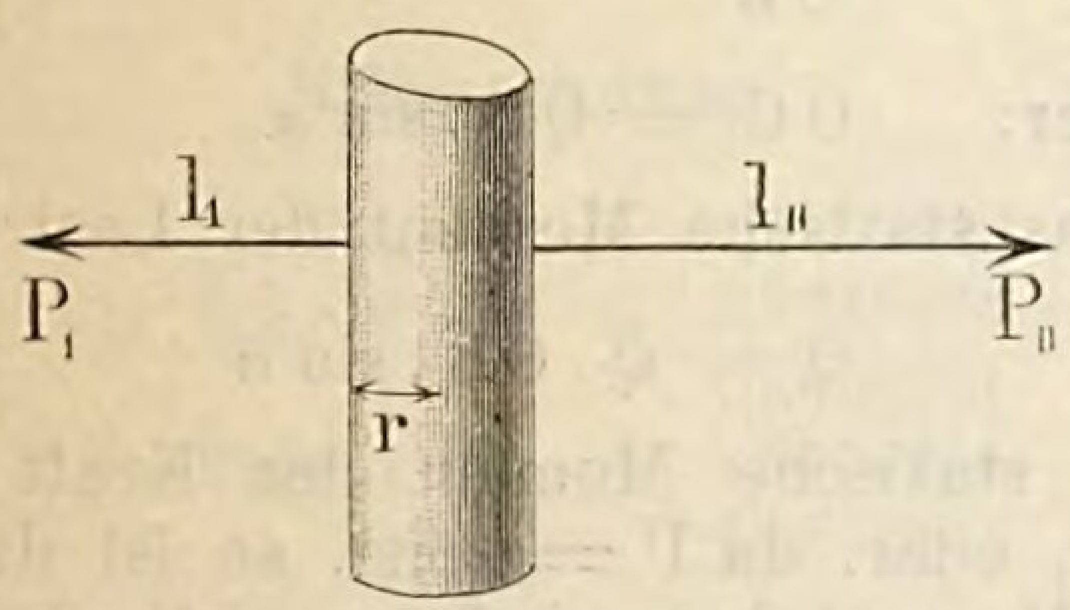
oder:

$$x = \text{ca. } 308 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. die gesuchte Kraft ist 308 kg.

Aufgabe 99. Durch eine um eine senkrechte Achse drehbare Welle vom Halbmesser $r = 18$ cm sei ein Stab wagerecht hindurchgesteckt. An der einen Seite dieses Stabes, in der Entfernung $l_1 = 1^1/_2$ m von der Welle drücke senkrecht gegen ihn ein Mensch mit der Kraft $P_{,} = 16$ kg, an das andere Ende sei ein Pferd gespannt, welches in 2,25 m Entfernung von der Welle mit der Kraft $P_{,,} = 65$ kg arbeitet. Beide Kräfte wirken wagerecht in gleichem Drehungssinn. Um die Welle ist ein Tau gewickelt, welches über eine Rolle geht, und an dessen Ende eine zu hebende Last befestigt ist. Wie gross darf letztere sein?

Figur 94.



Hilfsrechnng.

184,83 : 0,18

oder: 18483 : 18 = 1027
18
48
36
123
126

Auflösung. Die Kraft $P_{,} = 16$ kg wirkt an einem Hebelarm von der Länge:

$$l_{,} + r = 1,50 + 0,18 = 1,68 \text{ m}$$

die Kraft $P_{,,} = 65$ kg an einem Arm von der Länge:

$$l_{,,} + r = 2,25 + 0,18 = 2,43$$

während der Arm der unbekannten Last x gleich dem Halbmesser $r = 0,18$ m ist.

Es besteht demnach die Gleichung:

$$0,18\,x = 1,68 \,.\, 16 + 2,43 \,.\, 65$$

oder:

$$0,18\,x = 26,88 + 157,95$$

oder:

$$0,18\,x = 184,83$$

oder:

$$x = \frac{184,83}{0,18}$$

oder:

$$x = 1027 \text{ kg (s. Hilfsrechn.)}$$

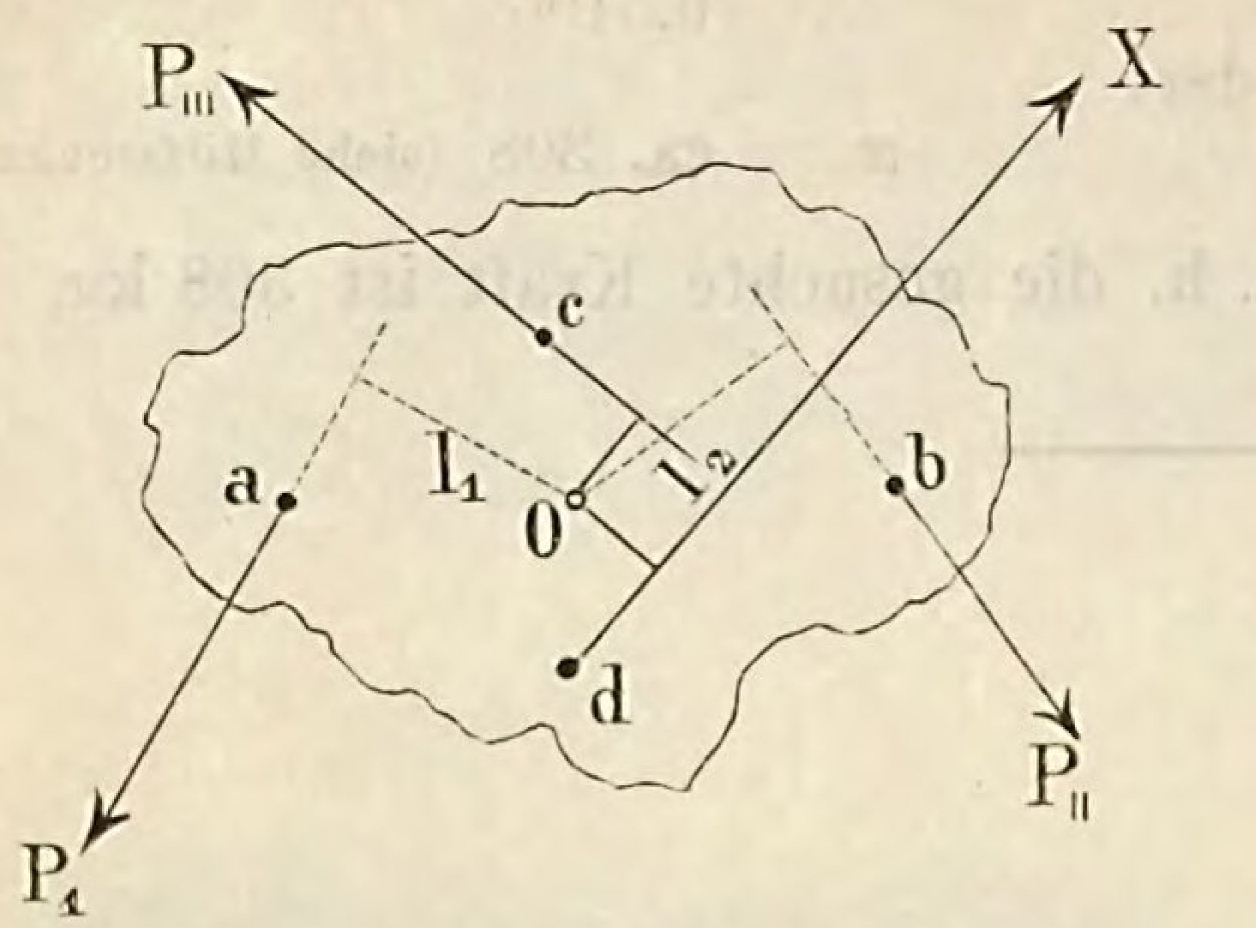
Aufgabe 100. An den Punkten a, b und c eines Körpers, siehe Figur 95, wirken die Kräfte $P_{,} = 30$, $P_{,,} = 40$ und $P_{,,,} = 50$ kg, und zwar in den rechtwinklig gemessenen Entfernungen $l_{,} = 5$, $l_{,,} = 7$ und $l_{,,,} = 1$ m von dem Punkt O, um welchen jene Kräfte den Körper zu drehen suchen.

Wie gross muss die in einem Punkt d wirksame Kraft x sein, um mit den drei andern Kräften Gleichgewicht herzustellen, wenn die senkrechte Entfernung ihrer Richtungslinie vom Drehpunkt = 2 m ist?

Auflösung. Nach dem Satz von den statischen Momenten muss für den Fall des Gleichgewichts die Summe der rechts drehenden Momente = der Summe der links drehenden sein, oder:

$$30 \,.\, 5 + 40 \,.\, 1 + 2\,x = 50 \,.\, 7$$

Figur 95.



hieraus erhält man für:

$$2x = 160$$

oder:

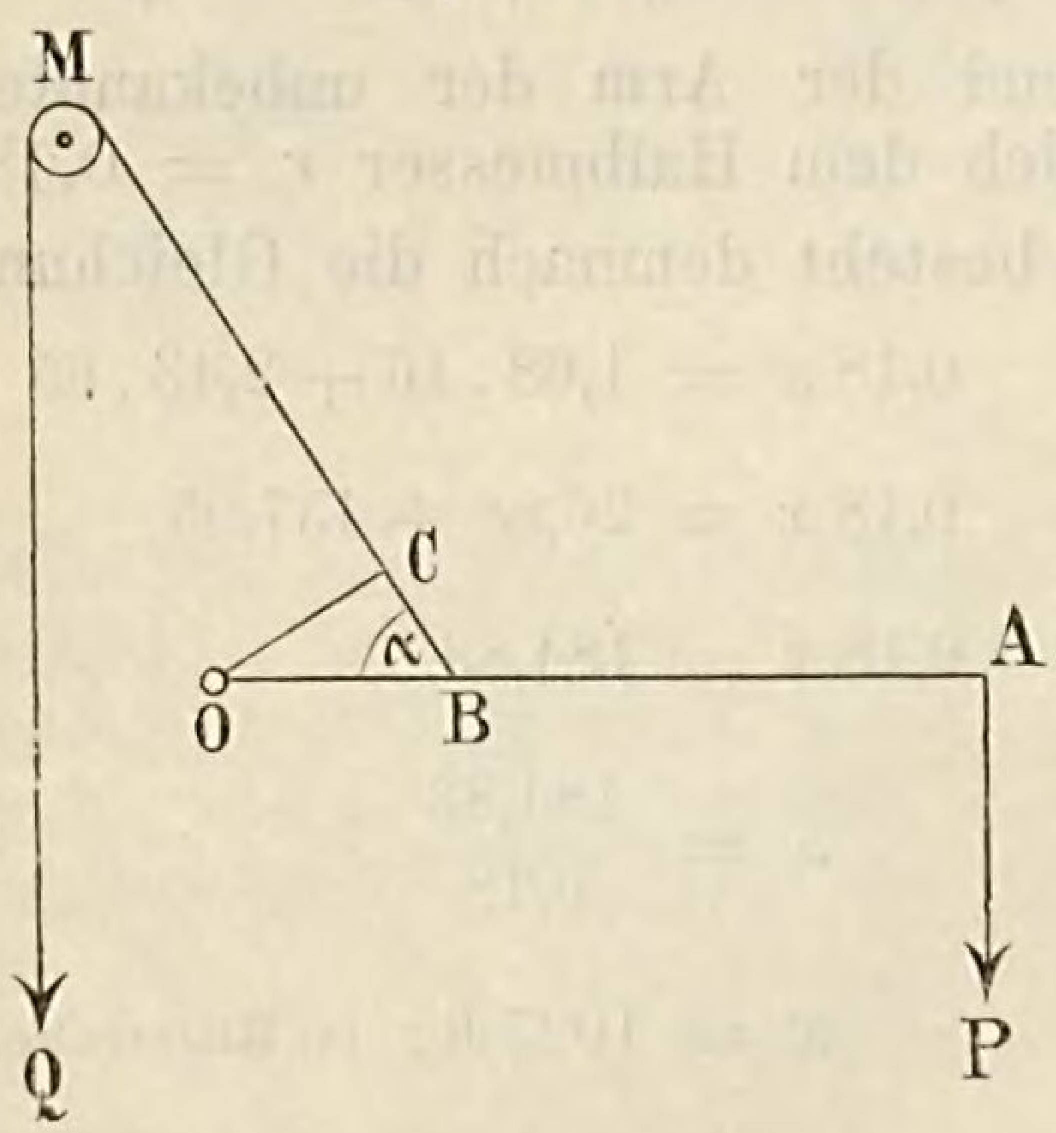
$$x = 80$$

d. h. die gesuchte Kraft beträgt 80 kg.

Aufgabe 101. Im Punkt B einer um O drehbaren Stange $\overline{OA}$ ist eine Schnur befestigt, welche über die Rolle M läuft und an ihrem andern Ende eine Last Q trägt. Mit welcher Kraft P muss A senkrecht gegen die Richtung der Stange gedrückt werden, um die Last Q zu tragen?

$\overline{OA}$ sei 2 m, $Q = 180$ kg, $\alpha = 50^0$ und $\overline{OB} = 45$ cm.

Figur 96.



Hilfsrechnung.

$$\log 40{,}5 = 1{,}6074550$$
$$+ \log \sin 50^0 = 9{,}8842540-10$$
$$\log x = 1{,}4917090$$

mithin:

$$\text{num-log}\, x = 31{,}024$$

Auflösung. Das statische Moment von Q ist $\overline{OC}\,.\,Q$, oder, da $\overline{OC}$ nicht bekannt ist, wohl aber $\overline{OB}$ und α, so ist:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \sin\alpha$$

oder:

$$\overline{OC} = \overline{OB}\,.\,\sin\alpha$$

also das statische Moment der Last:

$$Q = Q\,.\,\overline{OB}\,.\,\sin\alpha$$

Das statische Moment der Kraft P ist $\overline{OA}\,.\,P$, oder, da $P = x$ ist, so ist das statische Moment der unbekannten Kraft $\overline{OA}\,.\,x$.

Für den Fall des Gleichgewichts muss demnach:

$$Q\,.\,\overline{OB}\,.\,\sin\alpha = \overline{OA}\,.\,x$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt ist:

$$180\,.\,0{,}45\,.\,\sin 50^0 = 2x$$

oder:

$$x = 90\,.\,0{,}45\,.\,\sin 50^0$$

oder:

$$x = 40{,}5\,.\,\sin 50^0$$

oder:

$$x = 31{,}024 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

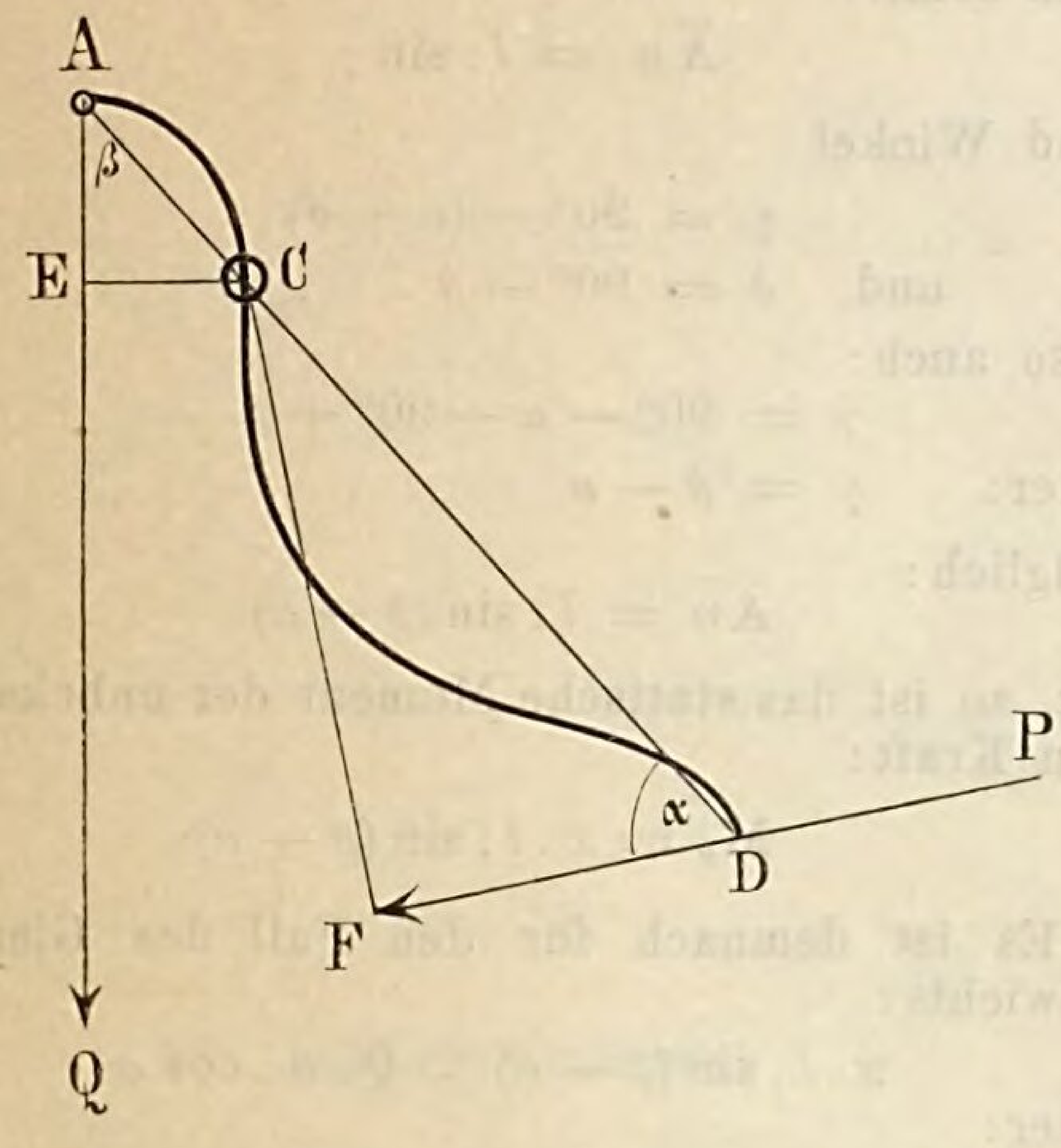
d. h. die gesuchte Kraft beträgt ca. 31 kg.

Aufgabe 102. Wenn an einem beliebig gestalteten Hebel, z. B. an einem Pumpenschwengel ACD, siehe Figur 97, die Richtungen der Kräfte P und Q mit einer durch den Drehpunkt C gelegten geraden Linie ACD die Winkel α und β bilden, mit

welcher Kraft wird dann die Kolbenstange $\overline{AQ}$ gehoben?

Es sei $\overline{CD} = 1{,}2$ m, $\overline{AC} = 20$ cm, $P = 7$ kg, $\alpha = 75^0$, $\beta = 45^0$.

Figur 97.



Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} \log 42 &= 1{,}6232493 \\ +\log \sin 75^0 &= 9{,}9849438-10 \\ \hline & 1{,}6081931 \\ -\log \sin 45^0 &= 9{,}8494850 \\ \hline \log x &= 1{,}7587081 \end{aligned}$$

mithin:

num-log $x = 57{,}373$

Auflösung. Für den Fall des Gleichgewichts ist:

$$\overline{EC} \,.\, Q = \overline{CF} \,.\, P$$

oder, da

$$\overline{EC} = \overline{AC} \,.\, \sin\beta$$

und $$\overline{CF} = \overline{CD} \,.\, \sin\alpha$$

so ist:

$$Q \,.\, \overline{AC} \,.\, \sin\beta = P \,.\, \overline{CD} \,.\, \sin\alpha$$

oder, da $Q = x$ ist:

$$x \,.\, \overline{AC} \,.\, \sin\beta = P \,.\, \overline{CD} \,.\, \sin\alpha$$

oder:

$$x = \frac{P \,.\, \overline{CD} \,.\, \sin\alpha}{\overline{AC} \,.\, \sin\beta}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, ist:

$$x \,.\, 0{,}2 \,.\, \sin 45^0 = 7 \,.\, 1{,}2 \,.\, \sin 75^0$$

$$x = \frac{7 \,.\, 1{,}2 \,.\, \sin 75^0}{0{,}2 \,.\, \sin 45^0}$$

oder:

$$x = \frac{8{,}4 \,.\, \sin 75^0}{0{,}2 \,.\, \sin 45^0}$$

oder:

$$x = \frac{42 \,.\, \sin 75^0}{\sin 45^0}$$

oder:

$$x = 57{,}373 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

Aufgabe 103. Ein gewichtloser Stab $\overline{AB}$, s. Fig. 98, von der Länge $l = 60$ cm liegt in einer Vertikalebene und kann sich um den Punkt A in dieser Ebene drehen. Das andere Ende des Stabes ist an einem gewichtlosen Seil befestigt, das über eine in derselben Vertikalebene gelegene Rolle C geführt ist und von einer Kraft P gespannt wird.

Es ist die Gleichgewichtslage des Stabes zu finden, wenn in der Entfernung $a = 28$ cm vom untern Ende des Stabes das Gewicht $Q = 400$ kg angreift und P und Q nach vertikaler Richtung wirksam gedacht werden.

Es sei Winkel $\alpha = 25^0$, Winkel $\beta = 60^0$.

Auflösung. Die Last ist Q, ihr Arm $\overline{Am}$ und demnach das statische Moment der Last:

$$Q \,.\, \overline{Am}$$

oder, da

$$\frac{\overline{Am}}{a} = \cos\alpha$$

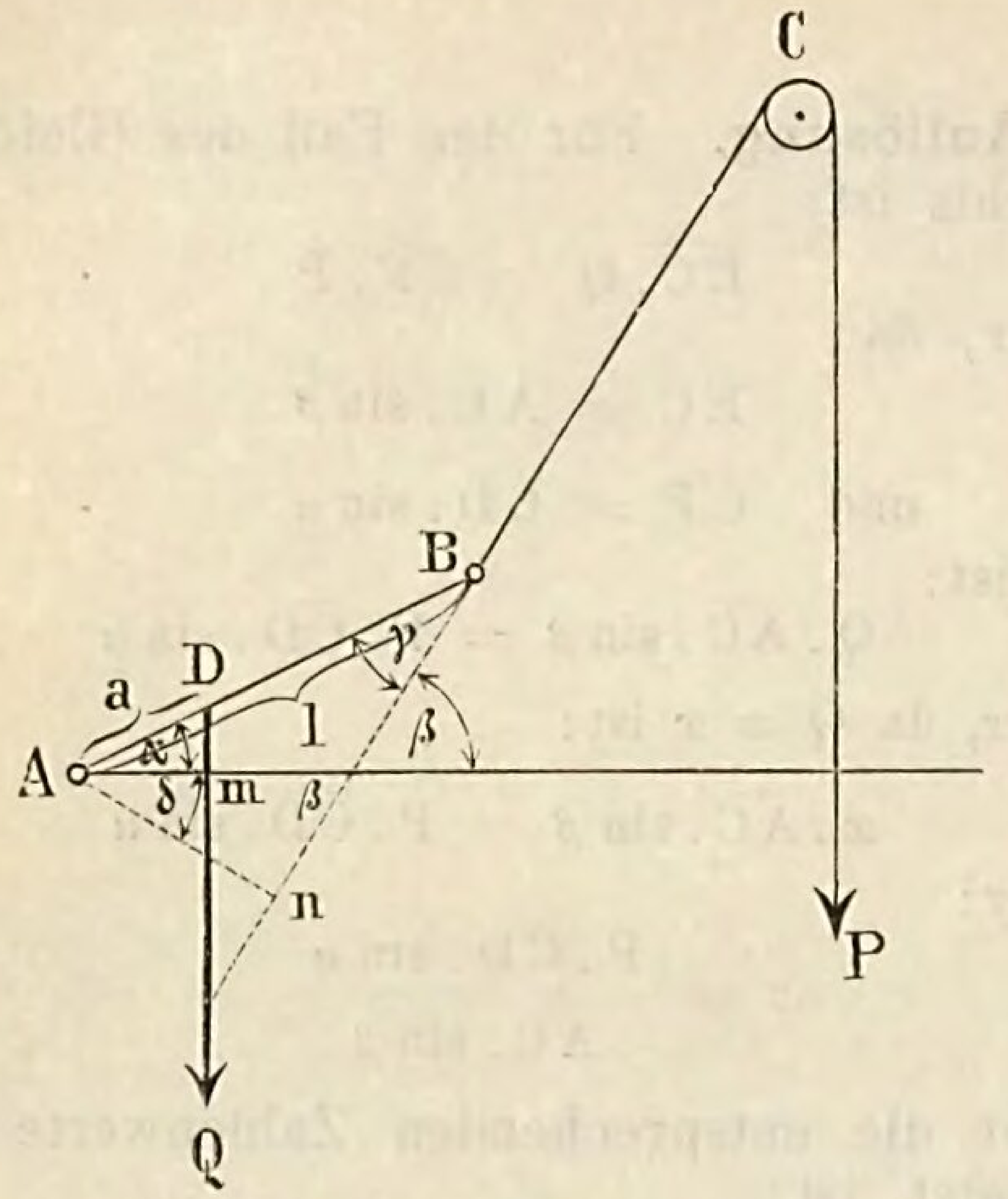
also:

$$\overline{Am} = a \,.\, \cos\alpha$$

so ist das statische Moment von Q:

$$M_1 = Q \,.\, a \,.\, \cos\alpha$$

Figur 98.



Die unbekannte Kraft sei x, ihr Arm $\overline{An}$, folglich ihr statisches Moment:

$$M_{\prime\prime} = x \,.\, \overline{An}$$

oder, da

$$\frac{\overline{An}}{l} = \sin\gamma$$

und somit:

$$\overline{An} = l \,.\, \sin\gamma$$

und Winkel

$$\gamma = 90^0 - (\alpha + \delta)$$

und $\delta = 90^0 - \beta$

also auch:

$$\gamma = 90^0 - \alpha - 90^0 + \beta$$

oder: $\gamma = \beta - \alpha$

folglich:

$$\overline{An} = l \,.\, \sin(\beta - \alpha)$$

ist, so ist das statische Moment der unbekannten Kraft:

$$M_{\prime\prime} = x \,.\, l \,.\, \sin(\beta - \alpha)$$

Es ist demnach für den Fall des Gleichgewichts:

$$x \,.\, l \,.\, \sin(\beta - \alpha) = Q \,.\, a \,.\, \cos\alpha$$

oder:

$$x = \frac{Q \,.\, a \,.\, \cos\alpha}{l \,.\, \sin(\beta - \alpha)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \frac{400 \,.\, 28 \,.\, \cos 25^0}{60 \,.\, \sin(60 - 25)}$$

woraus:

$$x = 295 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. die gesuchte Kraft beträgt 295 kg.

Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2{,}6020600 \\ +\log 28 &= 1{,}4471580 \\ +\log\cos 25^0 &= 9{,}9572757-10 \\ & 4{,}0064937 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 60 &= 1{,}7781513 \\ +\log\sin 35^0 &= 9{,}7585913-10 \\ & 1{,}5366426 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\log 4{,}0064939 \\ &-\log 1{,}5367426 \\ \log x &= 2{,}4697551 \end{aligned}$$

mithin:
num-log $x = 294{,}95$
oder: ca. 295

Aufgabe 104. An den beiden Endpunkten einer 90 cm langen geraden Stange $\overline{ab}$ wirken zwei Kräfte $P_1 = 30$ kg unter einem Winkel von 135° gegen $\overline{ab}$ geneigt im Punkt a, $P_2 = 60$ kg normal gegen $\overline{ab}$ in b.

Wie gross ist die Resultante und wo liegt ihr Angriffspunkt:

a). wenn die Kräfte nach derselben Seite,
b). „ „ „ „ verschiedenen Seiten von $\overline{ab}$ wirken?

Auflösung. Denkt man sich die Richtungslinien der beiden Kräfte P_1 und P_2 bis zum Durchschnittspunkt c verlängert, so hat man zwei, unter einem Winkel von $(135 - 90) = 45^0$ auf einen Punkt wirkende Kräfte, deren Resultante nach dem Satz vom Kräfteparellelogramm:

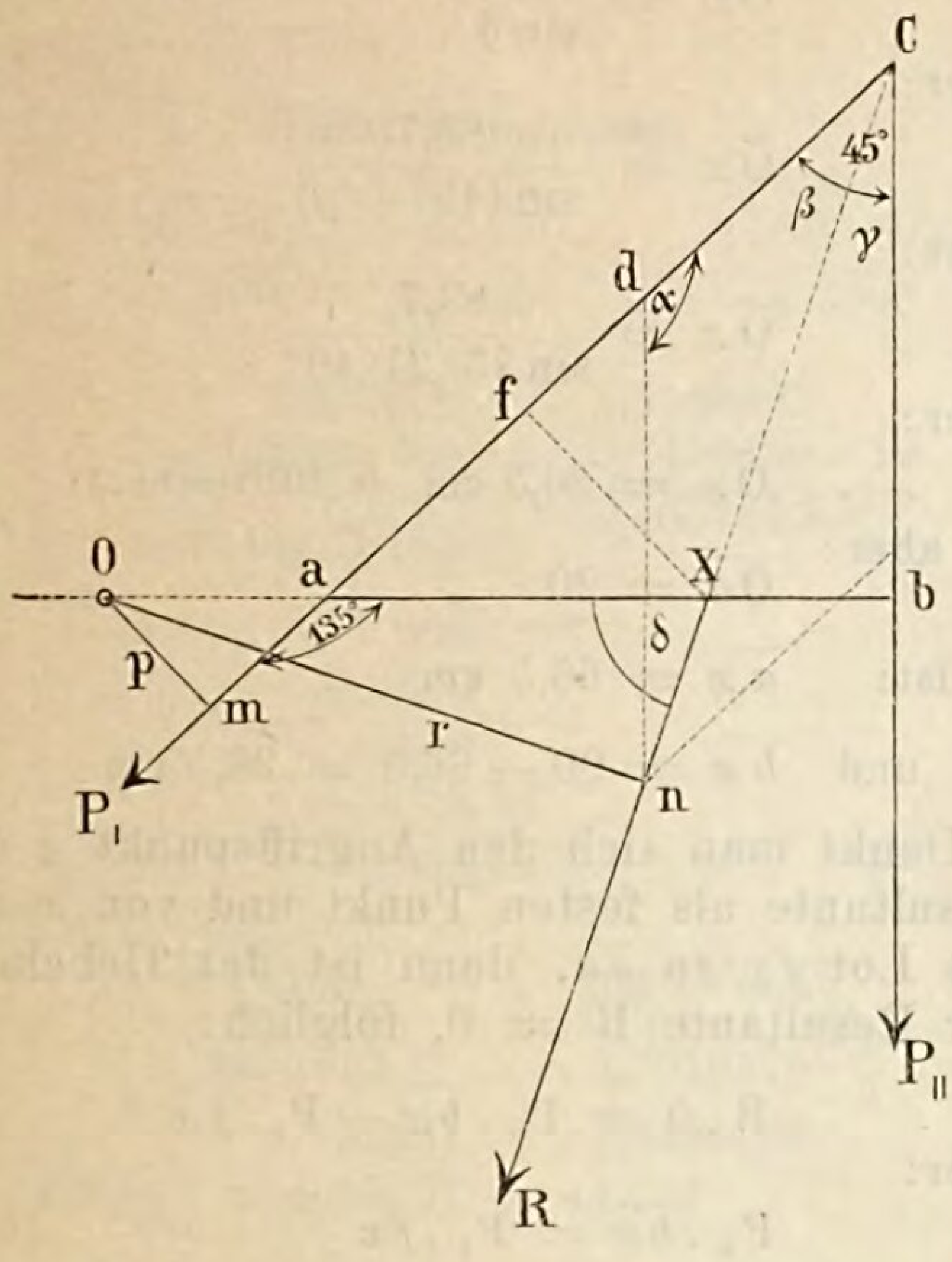
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 \,.\, P_1 \,.\, P_2 \,.\, \cos\alpha}$$

ist, oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt, ist:

$$R = \sqrt{30^2 + 60^2 + 2 \,.\, 30 \,.\, 60 \,.\, \cos 45^0}$$

oder:

Figur 99.



Hilfsrechnungen:

1). . . $30 . 30 = 900$
$60 . 60 = 3600$
$2 . 30 . 60 . \cos 45^0 = 3600 . \cos 45^0$

$\log 3600 = 3,5563025$
$+ \log \cos 45^0 = 9,8494850-10$
$3,4057875$
$\frac{7731}{144}$

mithin ist:
$3600 . \cos 45^0 = 2545,5842$
$+ 900$
$+ 3600$
$7045,5842$

2). . . $\sqrt{7054,58} = \frac{1}{2} \cdot \log 7045,58$
$\log 7045,58 = 3,8479168 \cdot \frac{1}{2}$
$= 1,9239584$

mithin:
$R = 83,938$

3). $\log 60 = 1,7781513$
$+ \log \sin 45^0 = 9,8494850-10$
$1,6276363$
$- \log 83,938 = 1,9239585$
$\log \sin \beta = 9,7036778-10$

mithin:
$\beta = 30^0 21' 40''$

4). $\log 30 = 1,4771213$
$+ \log \sin 45^0 = 9,8494850-10$
$1,3266063$
$- \log 83,938 = 1,9239586$
$\log \sin \gamma = 9,4026477$

mithin:
$\gamma = 14^0 38' 20''$

$$R = \sqrt{7045,5842} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

oder:

A). . . $R = 83,938$ (siehe Hilfsrechn. 2)

Um die Richtung der Resultante zu ermitteln, berücksichtige man, dass in Dreieck cdn:

$$\sin \beta : \sin \alpha = P_2 : R$$

oder:

$$\sin \beta = \frac{P_2 . \sin \alpha}{R}$$

oder:

$$\sin \beta = \frac{60 . \sin '}{83,938}$$

woraus:

B). . . . $\beta = 30^0 21' 40''$ (s. Hilfsrechn. 3)

In gleicher Weise erhält man den Winkel γ, denn es ist:

$$\sin \gamma = \frac{P_1 . \sin \alpha}{R}$$

oder:

$$\sin \gamma = \frac{30 . \sin 45^0}{83,938}$$

woraus:

C). . . . $\gamma = 14^0 38' 20''$ (s. Hilfsrechn. 4)

Um endlich den Angriffspunkt x der Resultante zu ermitteln, nehme man in der Linie $\overline{ab}$ oder in deren Verlängerung einen beliebigen festen Punkt O an, und fälle von diesem Punkt aus die Lote $\overline{Om} = p$ und $\overline{On} = r$ ($\overline{Ob}$ steht bereits senkrecht zu $P_{,,}$), dann muss nach dem Satz von den statischen Momenten:

$$R r = P_1 p + P_{,,} . \overline{Ob}$$

sein. Ist nun $\overline{Oa}$ z. B. 20 cm, dann ist $\overline{Ob} = 90 + 20 = 110$ cm, $\overline{Om} = p$ ist aber $= \overline{Oa} . \sin 45^0$ oder:

$$\overline{Om} = 20 . \sin 45^0$$

oder:

$$\overline{Om} = 14,142 \text{ cm} \quad \text{(s. Hilfsrechn. 5)}$$

Die entsprechenden Zahlenwerte in obige Gleichung gesetzt, gibt:

$$R r = 30 . 14,142 + 60 . 110$$

folglich ist der Hebelarm

$$r = \frac{30 . 14,142 + 60 . 110}{83,938}$$

oder:

d). . . $r = 83,7$ cm (s. Hilfsrechn. 6)

Hieraus lässt sich aber die Strecke $\overline{Ox}$ berechnen, denn:

$$\frac{r}{\overline{Ox}} = \sin \delta$$

oder:

Hilfsrechnungen:

5). $\log 20 = 1{,}3010300$
$+ \log \sin 45^0 = 9{,}8494850-10$
$\log \overline{Om} = 1{,}1505150$

mithin: $\overline{Om} = 14{,}142$

6). . . $14{,}142 \,.\, 30 = 424{,}26$ $\qquad 110 \,.\, 60 = 6600$

$$\begin{array}{r} 424{,}26 \\ +\,6600 \\ \hline 83{,}938 : 7024{,}26 = 83{,}7 \text{ cm} \\ 671504 \\ \hline 309220 \\ 251814 \\ \hline 574060 \end{array}$$

7). $\log 83{,}7 = 1{,}9227255$
$- \log \sin 75^0\, 21'\, 40'' = -9{,}9856680-10$
$\log \overline{Ox} = 1{,}9370575$

mithin: $\overline{Ox} = 86{,}508$

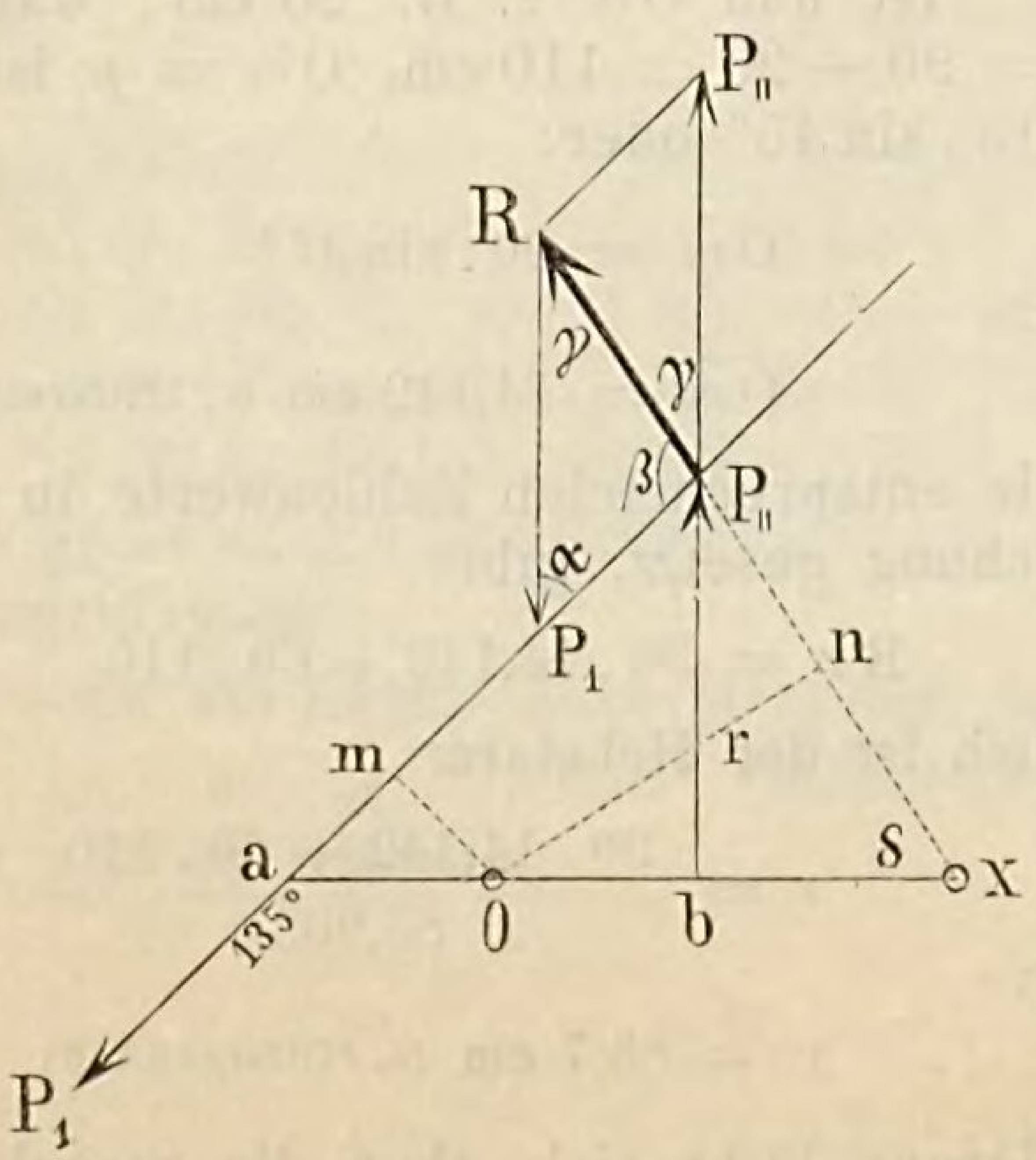
8). $60 \,.\, 23{,}5 = 1410$

$\log 66{,}5 = 1{,}8228216$
$+ \log \sin 45^0 = 9{,}8494850$
$+ \log 30 = 1{,}4771213$
$3{,}1494279$

mithin: num-log $= 1410$

$1410 = 1410$

Figur 100.



$$\overline{Ox} = \frac{r}{\sin \delta}$$

oder:

$$\overline{Ox} = \frac{83{,}7}{\sin(45^0 + \beta)}$$

oder:

$$\overline{Ox} = \frac{83{,}7}{\sin 75^0\, 21'\, 40''}$$

oder:

e). . . $\overline{Ox} = 86{,}5$ cm (s. Hilfsrechn. 7)

da aber: $\overline{Oa} = 20$ „

so ist: $\overline{ax} = 66{,}5$ cm

und $\overline{bx} = 90 - 66{,}5 = 23{,}5$ cm

Denkt man sich den Angriffspunkt x der Resultante als festen Punkt und von x aus das Lot $\overline{fx}$ zu $\overline{ca}$, dann ist der Hebelarm der Resultante $R = 0$, folglich:

$$R \,.\, 0 = P_{\prime\prime} \,.\, \overline{bx} - P_1 \,.\, \overline{fx}$$

oder:

$$P_{\prime\prime} \,.\, \overline{bx} = P_1 \,.\, \overline{fx}$$

$\overline{bx}$ ist aber nach obiger Rechnung 23,5

$\overline{fx} = \overline{ax} \,.\, \sin 45^0$

oder: $\overline{fx} = 66{,}5 \,.\, \sin 45^0$

es muss somit, wenn das Resultat richtig sein soll:

$$60 \,.\, 23{,}5 = 66{,}5 \,.\, \sin 45^0 \,.\, 30$$

sein (siehe Hilfsrechn. 8).

Wirken die Kräfte nach verschiedenen Seiten von $\overline{ab}$, siehe Figur 100, so erhält man durch entsprechende Verlängerung der Richtungslinien der Kräfte P_1 und $P_{\prime\prime}$ ein Parallelogramm, dessen Diagonale die gesuchte Resultante repräsentiert; diese Resultante:

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2 \,.\, P_1 P_{\prime\prime} \,.\, \cos \alpha}$$

da aber $\alpha = 135^0$ und $\cos 135^0 = -\cos 45^0$, so ist:

$$R = \sqrt{30^2 + 60^2 - 2 \,.\, 30 \,.\, 60 \,.\, \cos 45^0}$$

oder:

$$R = \sqrt{900 + 3600 - 2545{,}58}$$

oder:

$$R = \sqrt{1954{,}42}$$

woraus:

a). $R = 44{,}209$ kg (s. Hilfsrechn. 1)

Die Richtung der Resultante ermittelt man durch die Proportion:

$$\sin \beta : \sin \alpha = P_{\prime\prime} : R$$

woraus:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha \,.\, P_{\prime\prime}}{R}$$

oder:

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{30 . 30}{= 900}$ $\frac{60 . 60}{= 3600}$ $\frac{2 . 30 . 60}{= 3600}$

$$\begin{aligned} \log 3600 &= 3{,}5563025 \\ + \log \cos 45^0 &= 9{,}8494850-10 \\ &\overline{\quad 3{,}4057875} \end{aligned}$$

mithin: num-log 2545,58

$$\begin{array}{r} 900 \\ +3600 \\ \hline 4500 \\ -2545{,}58 \\ \hline 1954{,}42 \end{array}$$

$$\sqrt{1954{,}42} = \tfrac{1}{2} \cdot \log 1954{,}42$$

$$\begin{aligned} \log 1954{,}42 &= 3{,}2910179 \cdot \tfrac{1}{2} \\ \log R &= 1{,}6455089 \end{aligned}$$

mithin: num-log R = 44,209

2). . . . $\log \sin 45^0 = 9{,}8494850-10$

$$\begin{aligned} + \log 60 &= 1{,}7781513 \\ &\overline{\quad 1{,}6276363} \\ - \log 44{,}209 &= 1{,}6455089 \\ \log \sin \beta &= \overline{9{,}9821274} \end{aligned}$$

mithin: $\beta = 73^0 40' 30''$

3). . . . $\log \sin 45^0 = 9{,}8494850-10$

$$\begin{aligned} + \log 30 &= 1{,}4771213 \\ &\overline{\quad 1{,}3266063} \\ - \log 44{,}209 &= 1{,}6455089 \\ \log \sin \gamma &= \overline{9{,}6810974} \end{aligned}$$

mithin: $\gamma = 28^0 40' 30''$

4). $\frac{30 . 45}{= 1350}$

$$\begin{aligned} \log 1350 &= 3{,}1303338 \\ + \log \sin 45^0 &= 9{,}8494850-10 \\ &\overline{\quad 2{,}9798188} \end{aligned}$$

mithin ist: $1350 . \sin 45^0 = 954{,}59$

$$\begin{array}{r} +2700 \\ \hline 3654{,}59 \end{array}$$

$\frac{60 . 45}{= 2700}$

$$\begin{array}{l} 3654{,}59 : 44{,}209 = 82{,}666 \\ 353672 \\ \hline \ \ 117870 \\ \ \ 88418 \\ \hline \ \ 294520 \\ \ \ 265254 \\ \hline \ \ \ 292660 \\ \ \ \ 265254 \\ \hline \ \ \ 274060 \end{array}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin 45^0 . 60}{44{,}209} \quad \text{(s. Hilfsrechn. 2)}$$

woraus:

$$\beta = 73^0 40' 30''$$

Da aber β ein stumpfer Winkel sein muss, so kann nur der Nebenwinkel von $73^0 40^0 30''$ Geltung haben und somit ist in diesem Fall:

$$\beta = 180 - 73^0 40' 30''$$

woraus:

b). $\beta = 106^0 19' 30''$

Auf ähnliche Weise erhält man Winkel γ:

$$\sin \gamma : \sin \alpha = P : R$$

oder:

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha . P}{R}$$

oder:

$$\sin \gamma = \frac{\sin 45^0 . 30}{44{,}209}$$

woraus:

c). $\gamma = 28^0 40' 30''$ (s. Hilfsrechn. 3)

Um endlich den Angriffspunkt x der Resultante zu ermitteln, nehme man einen beliebigen Punkt als Drehungspunkt an, vielleicht O mitten zwischen $\overline{ab}$, so dass, da $\overline{ab} = 90$ cm gegeben ist, $\overline{ao} = \overline{ob} = 45$ cm lang ist.

Nach dem Satz der statischen Momente muss:

$$Rr = Pp + Qq$$

oder:

$$Rr = P_{,} . \overline{om} + P_{,,} . \overline{ob}$$

woraus:

$$r = \frac{P_{,} . \overline{om} + P_{,,} . \overline{ob}}{R}$$

oder:

$$r = \frac{30 . \overline{om} + 60 . 45}{44{,}209}$$

$\overline{om}$ ist senkrecht zur Richtung der Kraft P_1 und somit ist:

$$\overline{om} = \overline{Oa} . \sin 45^0$$

oder:

$$\overline{om} = 45 . \sin 45^0$$

Diesen Wert für $\overline{om}$ in die obige Gleichung eingesetzt, gibt:

$$r = \frac{30 . 45 . \sin 45^0 + 60 . 45}{44{,}209}$$

woraus:

d). . . $r = 82^2/_3$ cm (s. Hilfsrechn. 4)

Ferner ist:

$$\frac{r}{\overline{ox}} = \sin \delta$$

folglich:

$$\overline{ox} = \frac{r}{\sin \delta}$$

5). . . . $\log 82{,}666 = 1{,}9173269$
$-\log \sin 61^0\,19'\,30'' = -9{,}9431757-10$

$\log \overline{ox} = 1{,}9741512$

mithin:
$\text{num-log}\ \overline{ox} = 94{,}439$

$\delta = \beta - 45^0$

$\delta = 106^0\,19'\,30'' - 45^0$

$\delta = 61^0\,19'\,30''$

und demnach:

$$\overline{ox} = \frac{82{,}666}{\sin 61^0\,19'\,30''}$$

woraus:

$\overline{ox} = 94{,}439$ cm (s. Hilfsrechn. 5)

$-\overline{ob} = -45$

e). $\overline{bx} = 49{,}439$ cm

Aufgabe 105. Fünf in einer Ebene wirkende parallele Kräfte, sowie ihre Koordinaten auf einem rechtwinkligen Achsensystem sind gegeben, nämlich:

$P_1 = 33$ kg, $x_1 = +25$, $y_1 = +13$
$P_2 = 20$ „ $x_2 = -10$, $y_2 = -15$
$P_3 = -35$ „ $x_3 = +15$, $y_3 = -27$
$P_4 = -72$ „ $x_4 = -31$, $y_4 = +17$
$P_5 = 120$ „ $x_5 = +23$, $y_5 = -19$

Wo liegt der Angriffspunkt (x, y) der Resultierenden und wie gross ist diese?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 40 ist:

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 \ldots + P_n x_n$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, ist:

$$Rx = 33.25 - 20.10 - 35.15 + 72.31 + 120.23$$

oder:

$$Rx = 825 - 200 - 525 + 2232 + 2760$$

oder:

$$Rx = 5817 - 725$$

oder:

$$Rx = 5092$$

Nun ist:

$$R = P_1 + P_2 \ldots + P_n$$

oder:

$$R = 33 + 20 - 35 - 72 + 120$$

oder:

a). $R = 66$

Da:

$$Rx = 5092$$

so ist:

$$x = \frac{5092}{R}$$

oder:

$$x = \frac{5092}{66}$$

oder:

b). $x = 77{,}15$ m.

Ferner ist:

$$Ry = P_1 y_1 + P_2 y_2 \ldots + P_n y_n$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, so ist:

$$Ry = 33.13 - 20.15 + 35.27 - 72.17 - 19.120$$

oder:

$$Ry = 429 - 300 + 945 - 1224 - 2280$$

oder:

$$Ry = 1374 - 3804$$

oder:

$$Ry = -2430$$

Nun ist:

$$R = 66$$

folglich:

c). $y = -\frac{2430}{66} = -36{,}82$ m

Aufgabe 106. Ein festes System von fünf materiellen Punkten, deren Lage durch die folgenden Koordinaten gegeben ist:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0$$
$$x_2 = 1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 3$$
$$x_3 = 2,\ y_3 = 3,\ z_3 = 4$$
$$x_4 = 3,\ y_4 = 4,\ z_4 = 5$$
$$x_5 = 4,\ y_5 = 5,\ z_5 = 6$$

werde durch parallele Kräfte von folgender Grösse und Richtung angegriffen:

$$P_1 = +60 \text{ kg},\ P_2 = +70 \text{ kg},\ P_3 = -90 \text{ kg},$$
$$P_4 = -150 \text{ kg},\ P_5 = +200 \text{ kg}.$$

Es sind die Resultante sowie die Koordinaten des Mittelpunkts der parallelen Kräfte zu berechnen.

Auflösung. Nach der in Antwort auf Frage 40 entwickelten Formel:

$$Rx = P_1 x_2 + P_2 x_2 \ldots + P_n x_n \text{ etc.}$$

ist in dem gegebenen Fall:

$$Rx = 0 + 70 - 180 - 450 + 800$$

oder:

$$Rx = 870 - 630$$

oder:

a). . . $Rx = 240$

$$Ry = 0 + 2 . 70 - 3 . 90 - 4 . 150 + 5 . 200$$

oder:

$$Ry = 140 - 270 - 600 + 1000$$

oder:

$$Ry = 1140 - 870$$

oder:

b). . . $Ry = 270$

$$Rz = 0 + 3 . 70 - 4 . 90 - 5 . 150 + 6 . 200$$

oder:

$$Rz = 210 - 360 - 750 + 1200$$

oder:

$$Rz = 1410 - 1110$$

oder:

c). . . $Rz = 300$

Nun ist:

$$R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

also ist in dem gegebenen Fall:

$$R = 60 + 70 - 90 - 150 + 200$$

oder:

$$R = 330 - 240$$

oder:

d). . . $R = 90$

Diesen Wert in die Gleichungen a)., b). und c). eingesetzt, gibt:

für $x = 240 : 90$

oder:

e). $x = 2^2/_3$ m

für $y = 270 : 90$

oder:

f). $y = 3$ m

für $z = 300 : 90$

oder:

g). $z = 3^1/_3$ m

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 107. An einem einarmigen Hebel, z. B. an der Pumpenstange einer Druckpumpe sei die Entfernung der Kraft vom Drehpunkt 6mal so gross als die Entfernung der Kolbenstange vom Drehpunkt. Wenn nun der Kolben 8 cm Durchmesser hat und der Druck auf denselben pro qcm 5 kg beträgt, welche Stärke muss dann die am Hebel wirkende Kraft bei der Arbeit überschreiten?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 92.

Aufgabe 108. An einem zweiarmigen Hebel von $3^3/_4$ m Länge wirken senkrecht zwei Kräfte $P_,$ und $P_{,,}$ in gleicher Richtung. Wenn $P_, = 33$ und $P_{,,} = 7^1/_2$ kg gross ist, wie gross ist dann der Arm von $P_,$ und $P_{,,}$?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 93.

Aufgabe 109. An einer 115 cm langen Stange dreht ein Mann mit 22 kg Druck, welche Kraft wäre nötig, wenn die Stange nur 78 cm lang wäre?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 94.

Aufgabe 110. An einem einarmigen Hebel wirken in den Entfernungen $p_, = 45$ cm und $p_{,,} = 27$ cm:

a). nach derselben Richtung,

b). „ entgegengesetzten Richtungen zwei Kräfte $P_, = 13^3/_4$ kg und $P_{,,} = 12^1/_2$ kg.

Wo muss eine dritte Kraft von $3^3/_4$ kg angebracht werden, damit Gleichgewicht herrscht?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 95.

Aufgabe 111. Wenn an einer Stange $\overline{ab}$ in fünf gleichweit voneinander entfernten Punkten fünf Kräfte wirken, von denen jede folgende um 8 kg grösser ist als jede vorhergehende, und von denen die kleinste Kraft 12 kg beträgt, wo muss dann die Stange von 1 m Länge unterstützt werden, damit Gleichgewicht herrscht, wenn vorausgesetzt ist, dass je zwei aufeinanderfolgende Angriffspunkte 20 cm voneinander entfernt sind?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der gelösten Aufgabe 96.

Aufgabe 112. Die Länge des einarmigen Hebels eines Sicherheitsventils betrage 40 cm, der Durchmesser des Sicherheitsventils sei 4 cm und seine Befestigungsstelle B 6 cm vom Drehpunkt C entfernt.

Wie gross muss das in A anzubringende Gewicht sein, wenn sich das Ventil bei 5 kg Druck pro qcm öffnen soll?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 92 u. der gelösten Aufgabe 97, nur mit dem Unterschied, dass hier die Kraft, dort deren Hebelarm gesucht wird.

Aufgabe 113. An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 45 und 50 cm betragen, wirkt an dem Ende des 45 cm langen Armes eine Kraft, welche einen Winkel von 48° mit demselben bildet. Wie gross ist diese Kraft, wenn ihr durch eine rechtwinklig zu dem 50 cm langen Arm wirkende Kraft von 27 kg das Gleichgewicht gehalten wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 98.

Aufgabe 114. Durch eine um eine wagerechte Achse drehbare Welle von 13 cm Halbmesser sei ein Stab hindurchgesteckt, so dass derselbe einen gleicharmigen Hebel bildet und jeder Arm 90 cm Länge hat. Es ist um die Welle ein Seil gewunden, an dessen freiem Ende eine Last von 1800 kg befestigt ist. Welche Kraft muss an den beiden Hebelarmen angreifen, wenn Gleichgewicht herrschen soll?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der gelösten Aufgabe 99, wobei zu berücksichtigen ist, dass hier die Kraft P, dort die Last Q die gesuchte Grösse ist?

Aufgabe 115. An den Punkten a, b und c eines Körpers wirken in ein und derselben Ebene resp. die Kräfte $P_{,} = 12$, $P_{,,} = 27$ und $P_{,,,} = 36$ kg und zwar an den resp. Hebelarmen $l_{,} = 34$, $l_{,,} = 23$ und $l_{,,,} = 39$ cm von dem Punkt 0 aus gemessen, um welchen jene Kräfte den Körper zu drehen suchen. Wie gross muss der Hebelarm einer im Punkt d wirksamen Kraft von 40 kg sein, um mit den drei andern Kräften Gleichgewicht herzustellen, wenn:

a). sämtliche Kräfte in gleichem Drehungssinn wirken,

b). die Kräfte $P_{,}$ und $P_{,,,}$ der Kraft $P_{,,}$ entgegengesetzte Drehrichtung haben?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 100.

Aufgabe 116. In dem Punkt B, s. Fig. 96, einer um 0 drehbaren Stange $\overline{0A}$ sei eine Schnur befestigt, welche über eine Rolle M läuft und an ihrem andern Ende eine Last Q trägt.

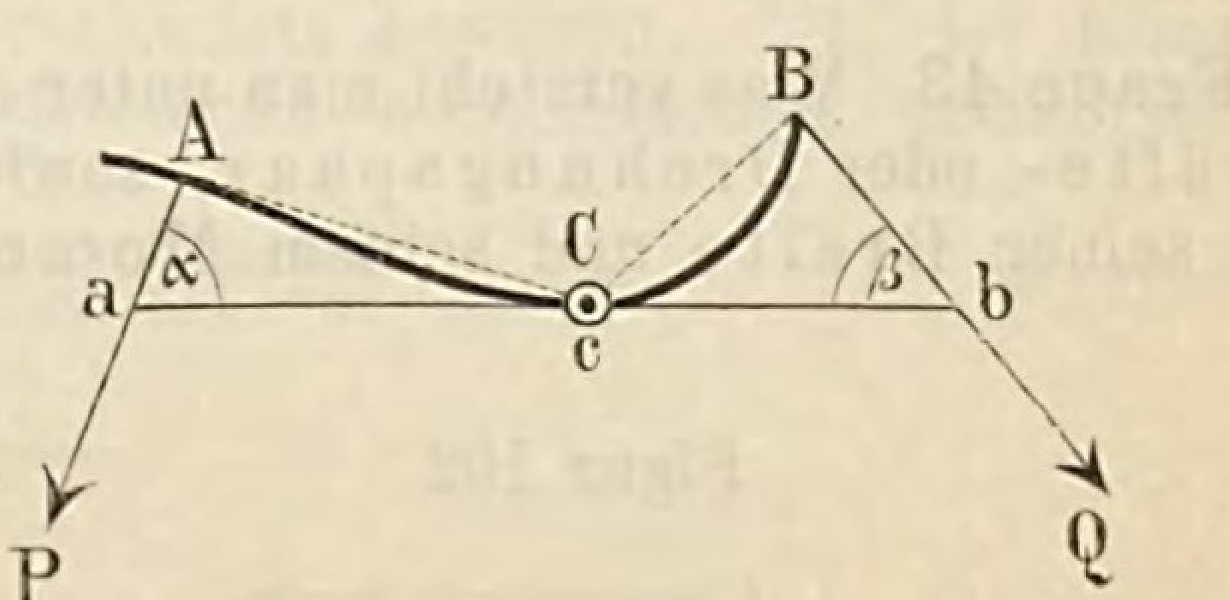
Wenn nun im Punkt A eine Kraft von 50 kg senkrecht abwärts drückt, $\overline{0A} = 1$ m und $\overline{0B} = 27$ cm lang ist und Winkel $\alpha = 65^0$ beträgt, wie gross kann dann für den Fall des Gleichgewichts die Last Q sein?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 101.

Aufgabe 117. Wenn an einem beliebig gestalteten Hebel ACB, siehe Figur 101, die Richtungen der Kräfte P und Q mit einer durch den Drehpunkt C gelegten geraden Linie acb resp. die Winkel α und β bilden, welche Kraft ist dann erforderlich, um einer in B angreifenden Last $Q = 500$ kg das Gleichgewicht zu halten, wenn $\overline{ac} : \overline{bc} = 3:2$ und Winkel $\alpha = 70^0$, $\beta = 47^1/_2{}^0$ beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 93.

Figur 101.



Aufgabe 118. In Figur 98 sei der Stab $\overline{AB} = 1$ m lang, $\overline{AD}$ betrage $^1/_3$ m, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$ und es stehe eine Kraft $P = 72$ kg zur Verfügung. Wie gross darf die in D wirkende Last Q sein?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 103.

Aufgabe 119. An den beiden Endpunkten einer geraden Linie $\overline{ab} = 5$ m wirken die Kräfte $P_{,} = 24$ kg unter einem Winkel von 144^0, $P_{,,} = 18$ kg unter einem Winkel von 126^0 gegen ab geneigt.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 104.

Wie gross ist die Resultante, welches ist ihre Richtung und ihr Angriffspunkt:

a). wenn die Kräfte nach derselben Seite,

b). „ „ „ „ verschiedenen Seiten

von $\overline{ab}$ wirken?

Aufgabe 120. Fünf in einer Ebene wirkende parallele Kräfte, sowie ihre Koordinaten auf einem rechtwinkligen Achsensystem sind gegeben, nämlich:

$P_1 = 18$ kg, $x_1 = 25$, $y_1 = 13$
$P_2 = 20$ „ $x_2 = 39$, $y_2 = 24$
$P_3 = -30$ „ $x_3 = 32$, $y_3 = 41$
$P_4 = 24$ „ $x_4 = 16$, $y_4 = 39$
$P_5 = 18$ „ $x_5 = -13$, $y_5 = -20$

Wo liegt der Angriffspunkt (x, y) der Resultierenden R und wie gross ist diese?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 105.

Aufgabe 121. Ein festes System von vier materiellen Punkten, deren Lage durch die folgenden Koordinaten gegeben ist:

$$x_1 = 6,\quad y_1 = 5,\quad z_1 = 8$$
$$x_2 = 4,\quad y_2 = 3,\quad z_2 = 7$$
$$x_3 = 9,\quad y_3 = 11,\quad z_3 = 2$$
$$x_4 = 3,\quad y_4 = 5,\quad z_4 = 7$$

werde durch parallele Kräfte von folgender Grösse und Richtung angegriffen:

$P_1 = 26$ kg, $P_2 = -22\frac{1}{2}$ kg, $P_3 = 15$ kg, $P_4 = -24$ kg.

Es sind die Resultante, sowie die Koordinaten des Mittelpunkts der parallelen Kräfte zu berechnen.

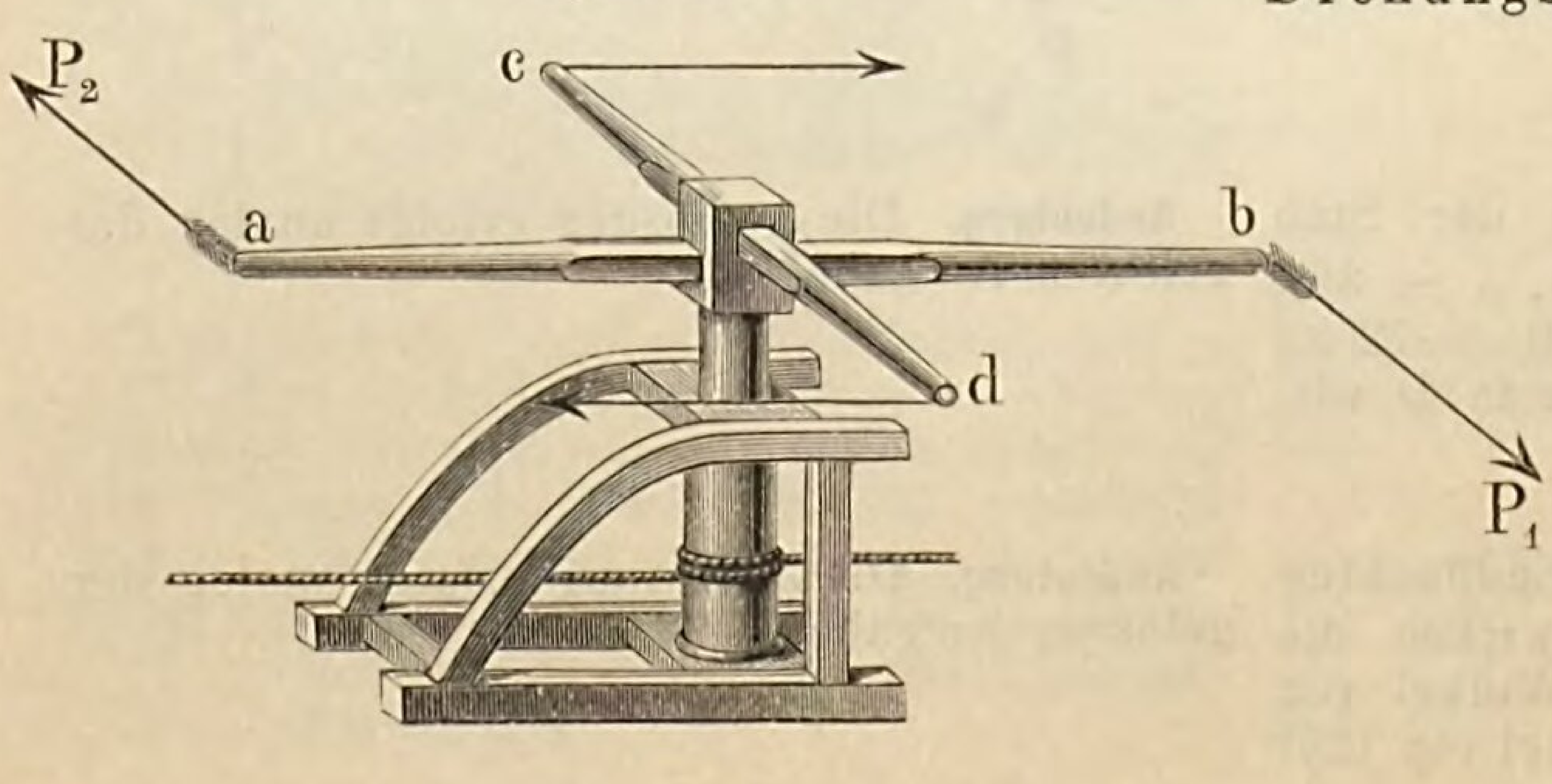
Andeutung. Die Auflösung erfolgt in analoger Weise wie die der gelösten Aufgabe 106.

7). Ueber Kräftepaare.

a. Ueber Kräftepaare und deren Momente, Ebenen und Achsen, sowie über ihr Bewegungsvermögen im allgemeinen.

Frage 43. Was versteht man unter einem Kräfte- oder Drehungspaar, sowie unter seiner Breite und seinem Moment?

Figur 102.



Antwort. Zwei gleich grosse parallele Kräfte, die nach entgegengesetzten Richtungen wirksam und fest miteinander verbunden sind, heissen ein Kräfte- oder Drehungspaar, oder schlechtweg Paar.

Der senkrechte Abstand $\overline{ab}$, siehe Fig. 102, der beiden Kraftlinien heisst der Hebelarm oder die Breite des Paares und jede der beiden Kräfte heisst Seitenkraft oder einfach Kraft des Paares. Das Produkt aus einer dieser gleichen Kräfte und dem Hebelarm heisst das Moment des Kräftepaares. Ist jede der Kräfteparallelen P_1 und $P_2 = 30$ kg

Erkl. 99. Das Moment eines Kräftepaares hat in jedem Punkt der Drehungsebene denselben Wert, oder die Fläche des Parallelogramms, von dem die beiden Kräfte des Paares Gegenseiten sind, bleibt unverändert. Den Wert Null kann dasselbe nur dann haben, wenn entweder die Kräfte verschwinden oder der Arm. Letzterenfalls liegen die beiden entgegengesetzt gerichteten gleichen Kräfte in derselben Kraftlinie und stehen im Gleichgewicht.

Erkl. 100. Solche Paare von Kräften führte Poinsot 1804 neben den Resultanten der Einzelkräfte als neue Elemente in die Statik der Körper ein.

und der Abstand $\overline{ab} = l$ ihrer Richtungen $= 2$ m, so ist $Kl = 2 \cdot 30 = 60$ das statische Moment des Paares.[1])

Zwei Kräftepaare sind gleich, wenn sie gleichen Arm und gleiche Kraft haben.

[1]) Siehe Erkl. 99.

Frage 44. Warum nennt man ein Paar gleich grosser aber entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte ein Drehungspaar oder auch eine Drehkraft?

Erkl. 101. Progressiv (vom lat. progressĭo = Fortschreitung, von gradi = schreiten) heisst fortschreitend.

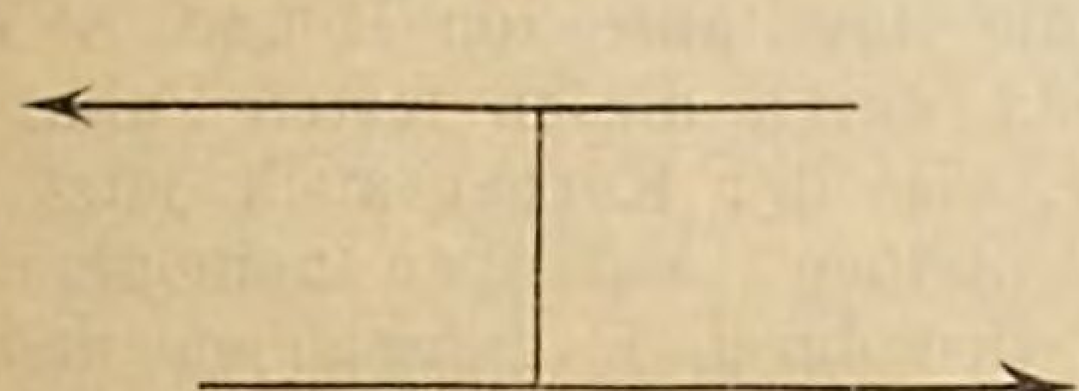
Erkl. 102. Rotieren (vom lat. rotatĭo, von rotāre, im Kreise herumdrehen, von rota, das Rad) heisst: sich im Kreise herumdrehen, sich um seine eigene Achse bewegen.

Antwort. Ein Paar gleich grosser entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte nennt man ein Drehungspaar oder eine Drehkraft, weil sich bei demselben kein Punkt auffinden lässt, welchen man als gemeinsamen Angriffspunkt beider betrachten könnte (siehe Erkl. 79) und da $P = Q$, so ist $R = 0$, d. h. es giebt keine Mittelkraft, welche beide zu ersetzen im stande ist; folglich kann ein Körper unter Einwirkung zweier solcher Kräfte eine fortschreitende oder progressive[1]) Bewegnng nicht annehmen; denn treibt ihn die eine Kraft nach vorwärts, so treibt ihn die andere gleich stark zurück. Vollständig aufheben können sich beide Kräfte aber auch nicht, denn das würde nur der Fall sein, wenn ihre Richtungen in einer geraden Linie lägen (siehe Satz 4 in Antwort auf Frage 11); einige Punkte des Körpers müssen demnach unter ihrer Einwirkung sich nach vorwärts, andere nach rückwärts bewegen, d. h. der Körper muss sich drehen oder er muss rotieren.[2])

[1]) Siehe Erkl. 101.
[2]) Siehe Erkl. 102.

Frage 45. Was für Kräftepaare unterscheidet man nach Art der Drehung?

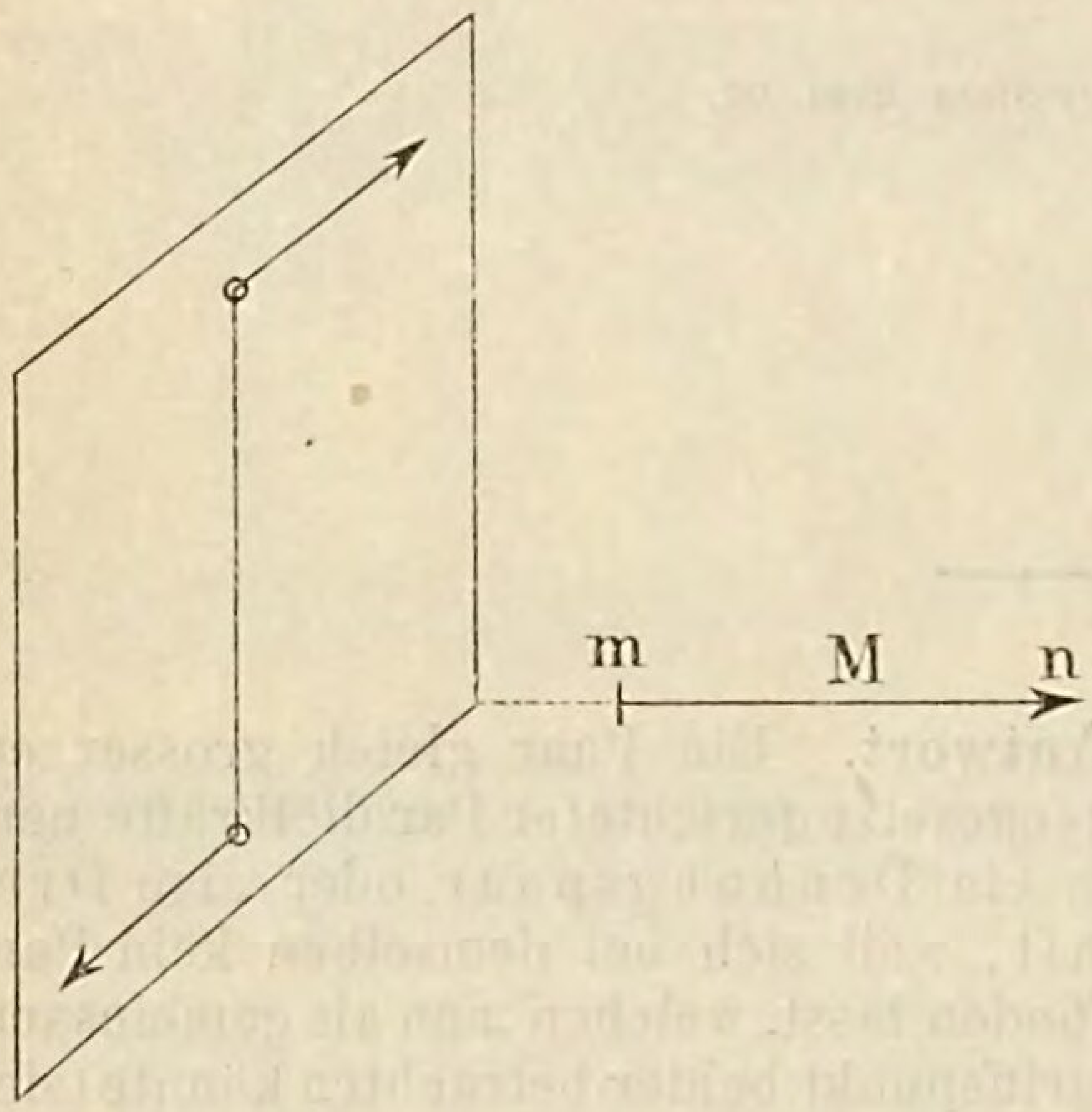
Figur 103.



Antwort. Hat ein Kräftepaar das Bestreben, die Ebene, in der sich dasselbe befindet, in der Weise zu drehen, wie sich der Zeiger einer Uhr bewegt oder wie man einen Bohrer in das Holz dreht, oder wie man die Kaffeemühle umdreht, so nennt man dasselbe rechtsdrehend (siehe Figur 102); bei entgegengesetztem Bestreben heisst das Paar linksdrehend, siehe Figur 103.

Frage 46. Was versteht man unter der Ebene und unter der Achse eines Paares?

Figur 104.

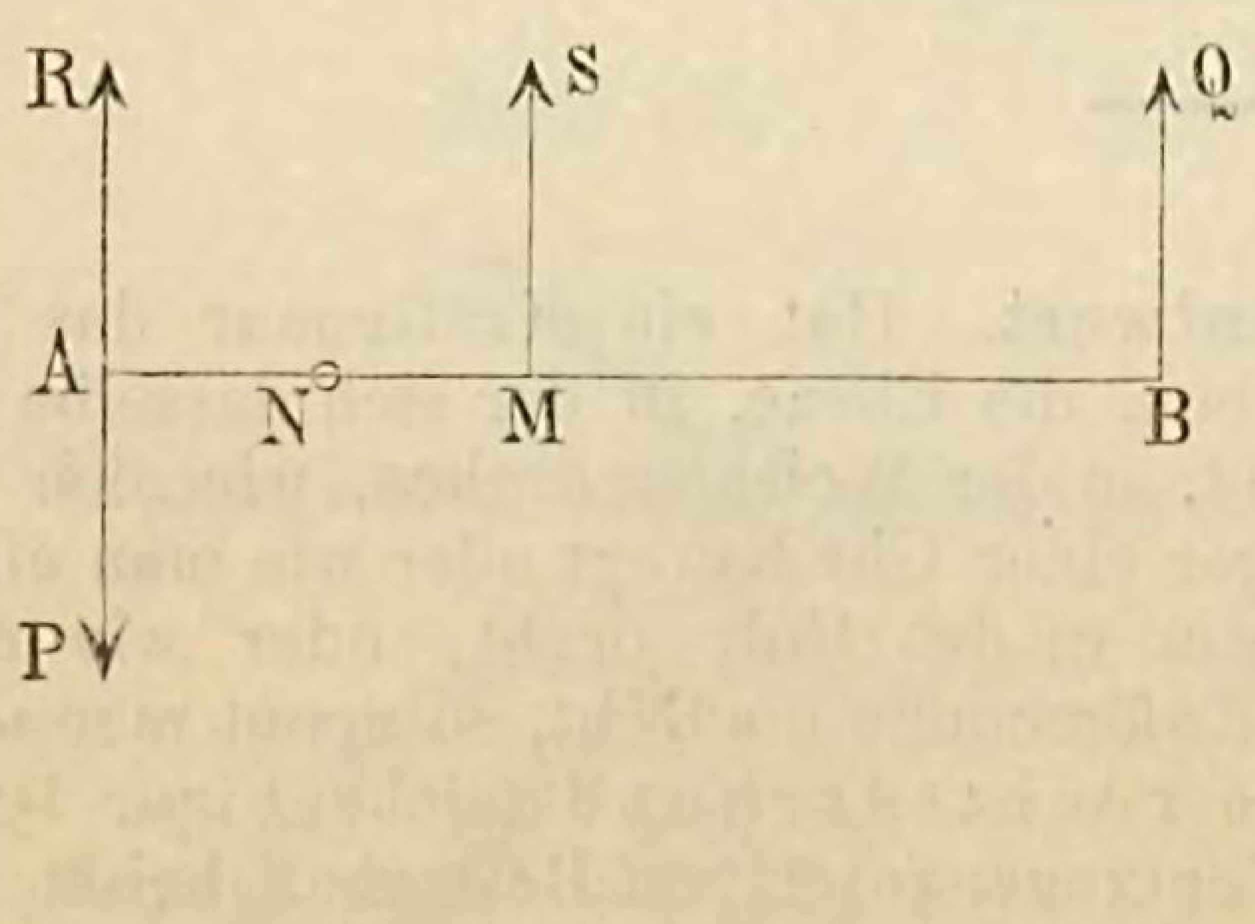


Erkl. 103. Da zwei gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte für sich allein ein Kräftesystem bilden, welches sich nicht weiter vereinfachen lässt, so müssen dieselben als einfache Wirkungselemente aufgefasst und besonders untersucht werden, gleichwie früher die Wirkungsweise einzelner Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt untersucht worden ist.

Antwort. Die Ebene, in welcher die beiden das Paar bildenden Parallelkräfte liegen, heisst die Ebene des Drehungspaares oder die Drehungsebene. Errichtet man auf dieser Ebene, nach der Seite des Raumes, von welcher aus das Paar als ein rechtsdrehendes erscheint, eine Senkrechte $\overline{mn}$, versieht diese nach der angegebenen Seite hin mit einer Pfeilspitze und trägt auf derselben so viele Längeneinheiten ab, als die Momentzahl M des Kräftepaares angibt, so nennt man diese Normale die Achse des Paares und das begrenzte Stück derselben das Achsenmoment. Da durch die Grösse und Richtung der Achse die Wirkung des Kräftepaares völlig bestimmt ist, so dürfen diese Achsen geradeso als geometrische Repräsentanten der Kräftepaare betrachtet werden, wie bisher durch gerade Linien von bestimmter Richtung und Länge (s. Erkl. 11) die einfachen Kräfte dargestellt wurden. Die Achse eines Kräftepaares kann man sich in jedem Punkt seiner Ebene errichtet denken, sie soll aber eine solche Lage haben, dass für eine an der Achse stehende Person die Drehung auf eine bestimmte Weise möglich ist.

Frage 47. Was lässt sich von dem Bewegungsvermögen eines jeden Kräftepaares behaupten?

Figur 105.



Antwort. Ein jedes Kräftepaar ist bestrebt, eine drehende Bewegung zu erzeugen und ist somit nicht im Gleichgewicht.

Beweis. Wäre das Kräftepaar $\overline{PQ}$, siehe Figur 105, im Gleichgewicht, so müsste der Körper, auf welchen dasselbe einwirkt, in Ruhe bleiben. Denkt man sich nun zwischen A und B einen festen Punkt N und fügt rechts und links von demselben die Kräfte R und S bei, von denen R in A und S in M angreift, so würde, wenn $\overline{NM} = \overline{NA}$ und $R = S = P = Q$ und R und S parallel Q ist, die Resultante von R und S in N angreifend durch diesen festen Punkt aufgehoben, also der Körper auch jetzt noch in Ruhe bleiben, was aber unmöglich ist, denn P wird durch R aufgehoben und die übrigbleibenden Kräfte S und Q haben eine, zwischen beiden in ihrer Mitte liegende Resultante $T = S + Q$, welche eine Drehung des Körpers um N hervorbringen muss.

Erkl. 104. Den in nebenstehender Antwort aufgestellten Satz über das Gleichgewicht von Kräftepaaren kann man an folgenden Beispielen erläutern:

1). Ein Kreisel, siehe Figur 106, der durch Abziehen einer Schnur oder durch Peitschenhiebe in Bewegung gesetzt wird, erhält seine Rotation durch ein Kräftepaar. Es wirke z. B. im Punkt A tangential an der horizontalen Scheibe die wagerechte Kraft P, man kann dann in Punkt B, welcher A diametral gegenüberliegt, parallel mit $\overline{AP}$ zwei neue Kräfte $\overline{BQ}$ und $\overline{BQ_1}$ anbringen, deren jede $= \frac{1}{2}P$ ist und welche unter sich entgegengesetzt gerichtet sind. Am Kreisel wird dadurch nichts geändert, weil die neuen Kräfte sich gegenseitig aufheben.

Denkt man sich die gegebene Kraft P in zwei gleiche Teile zerlegt, so lässt sich die eine Hälfte von P mit Q zu einer Resultante R zusammensetzen, welche [nach Erklärung 77 Satz 1] in der Mitte C von $\overline{AB}$, also in der Achse des Kreisels angreift und deren Grösse:

$$R = \frac{1}{2}P + Q = P \text{ ist.}$$

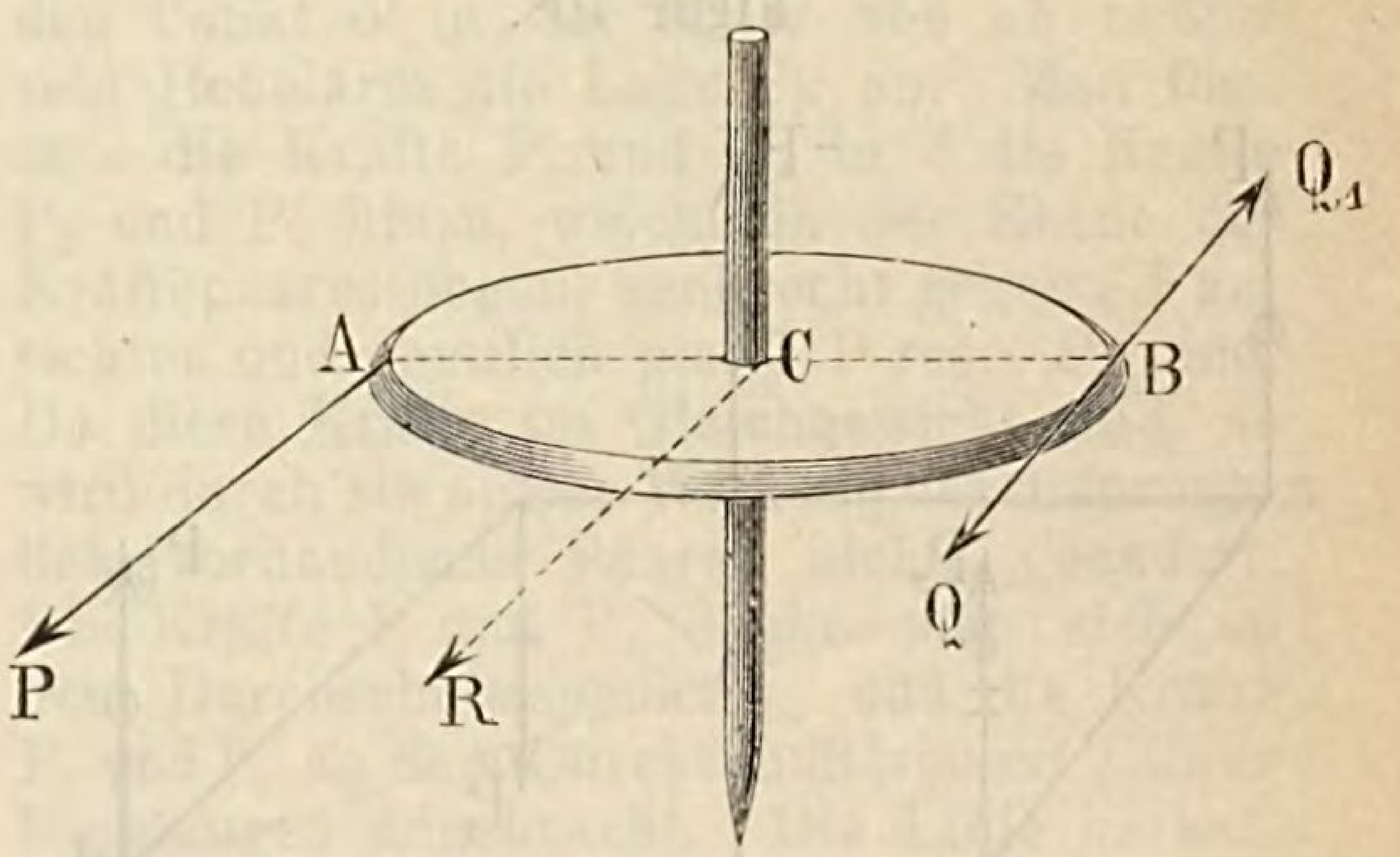
Ausser dieser Mittelkraft R wirkt dann noch auf den Kreisel das Kräftepaar, bestehend aus $\frac{1}{2}P$ und Q_1. Die Kraft R würde allein eine fortschreitende Bewegung des Kreisels veranlassen. Lässt man nun den Kreisel in zwei Zapfen laufen, so wird die Kraft R aufgehoben und der Kreisel beschreibt nur eine rotierende Bewegung, deren Ursache das allein wirksame Kräftepaar ist.

2). Ganz ähnlich ist der Fall, wenn bei einem Kahn, siehe Figur 107, jedes Ruder A und B mit einer Kraft P parallel zu der Längsachse des Kahns und in gleicher Richtung gegen das Wasser wirkt. Es setzen sich alsdann die beiden Kräfte P und P zu einer Resultante $R = 2P$ zusammen, die in der Mitte C von $\overline{AB}$ angreifend, den Kahn vorwärts treibt. Wirkt aber nur ein Ruder A allein, so denke man sich, zur Beurteilung der Bewegung in C zwei neue, gleich grosse aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte $P_{,}$ und $P_{,,}$ angebracht, die sich gegenseitig aufheben und daher auf die Bewegung des Kahns keinen Einfluss ausüben. Es unterliegt alsdann der Kahn der Wirkung einer Kraft $P_{,}$, welche ihn vorwärts treibt, und der Wirkung eines Kräftepaars $P_{,}$ und $P_{,,}$, welches seine Spitze nach der Seite dreht.

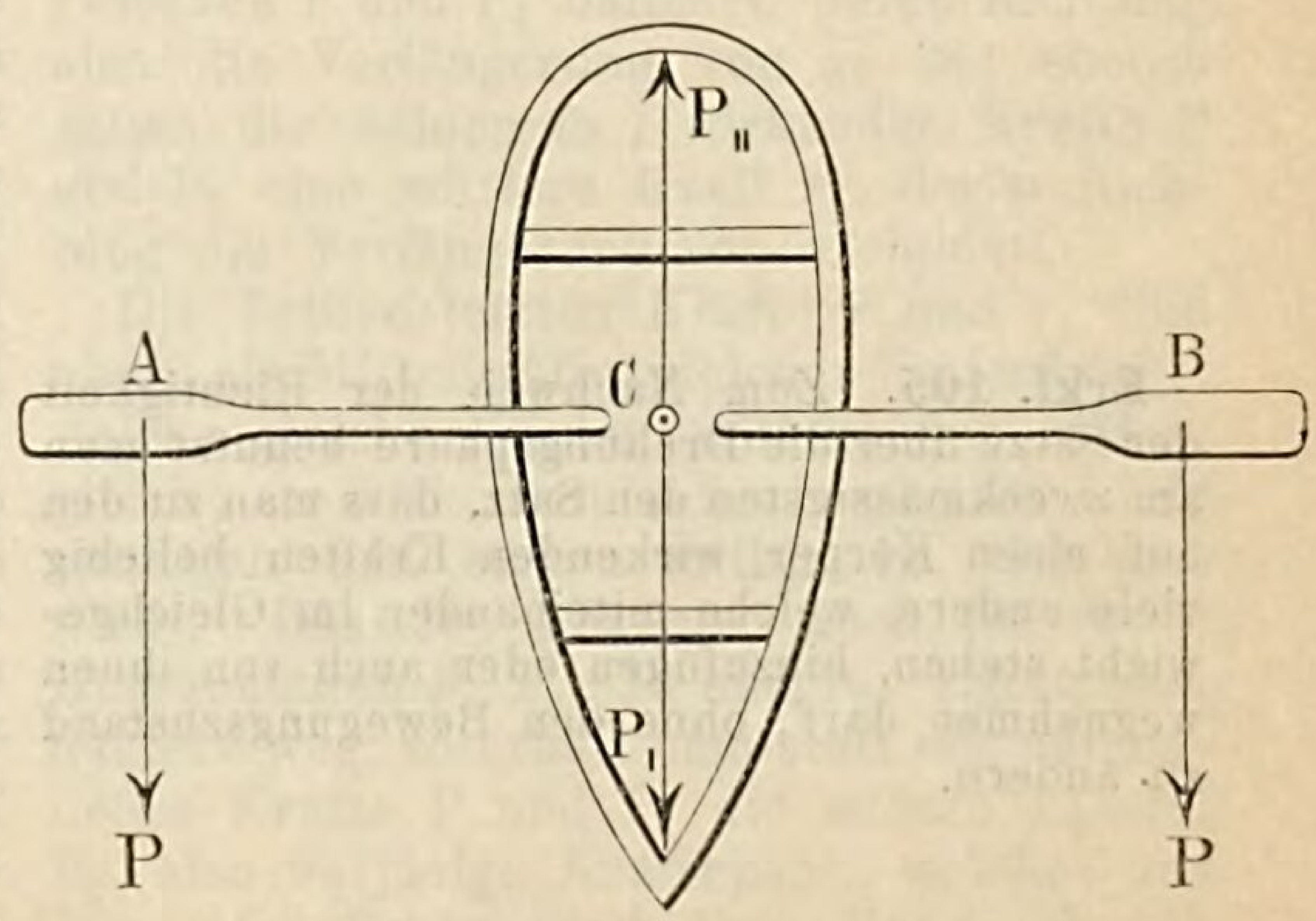
Folglich kann P mit Q nicht im Gleichgewicht sein.

Da ein Kräftepaar nicht im Gleichgewicht, aber auch ohne Resultante ist, so gibt es neben der Zurückführung der Kräfte auf eine Resultante und dem Gleichgewicht der Kräfte noch eine dritte Möglichkeit: die Zurückführung auf ein Kräftepaar.

Figur 106.



Figur 107.



b. Ueber die Veränderungen, welche man an Kräftepaaren vornehmen kann, ohne dass die Wirkung derselben geändert wird.

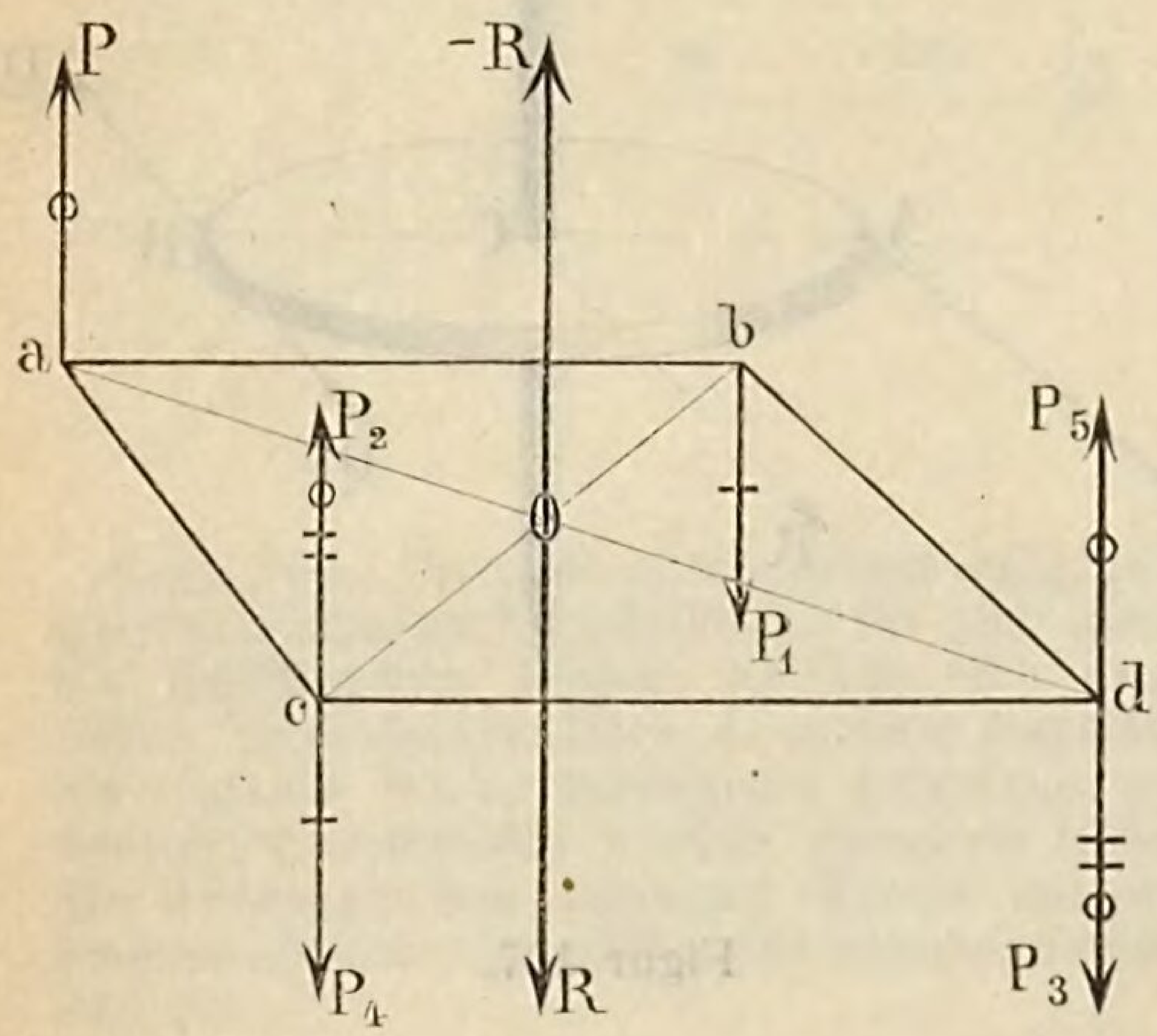
Frage 48. Welche Veränderungen kann man in Bezug auf die absolute Lage eines Kräftepaares vornehmen, ohne dass die Wirkung desselben geändert wird?

Antwort. Jedes Kräftepaar kann man, ohne dass die Wirkung desselben geändert wird, auf beliebige Weise parallel mit sich selbst fortrücken, und zwar sowohl in der Ebene des Kräftepaars als auch aus ihr heraus, vorausgesetzt, dass sich die neuen Angriffspunkte an demselben starren Körper befinden.

Beweis. Es sei $\overline{ab}$ der Hebelarm, P und P_1 seien die Kräfte eines in der Fläche des Papieres liegenden Kräftepaars, s. Fig. 108. Indem man dasselbe parallel mit sich selbst fortschiebt, gehe sein Hebelarm in $\overline{cd}$ über, welche Linie parallel und gleich $\overline{ab}$ ist, und in der Fläche des Papiers oder auch ausserhalb desselben liegen kann, aber mit $\overline{ab}$ in starrer Verbindung stehen muss. Man füge jetzt in c die beiden Kräfte P_2 und P_4, in d die beiden Kräfte P_3 und P_5 hinzu, welche sämtlich mit P resp. P_1 gleiche Intensität haben und mit denselben parallel laufen. Da diese 4 Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen, so wird durch sie in dem Bewegungszustand des Körpers nichts geändert. $abcd$ ist aber ein Parallelogramm, dessen Diagonalen $\overline{ad}$ und $\overline{bc}$ einander in 0 halbieren. Statt P_1 und P_4 kann man daher eine in 0 wirkende gleichgerichtete mittlere Kraft $+R = P_1 + P_4$ setzen und ebenso lassen sich die Kräfte P und P_5 zu einer in demselben Punkt 0 angreifenden Mittelkraft $-R = -(P + P_5)$ zusammensetzen.

Die Kräfte $+R$ und $-R$ stehen aber im Gleichgewicht, denn sie sind einander gleich und wirken in demselben Angriffspunkt 0 in entgegengesetzter Richtung (siehe Satz 4 in Antwort auf Frage 11). Es bleiben dann nur die Kräfte P_2 und P_3 übrig, welche demnach dasselbe wirken müssen, wie die ursprünglich vorhandenen Kräfte P und P_1. P_2 und P_3 bilden aber dasjenige Drehungspaar, welches man durch parallele Verschiebung des ursprünglich vorhandenen P und P_1 erhalten hat; das erstere wirkt genau dasselbe wie das letztere: es wird also durch die parallele Verschiebung des gegebenen Drehungspaares in seiner Wirkung nichts geändert.

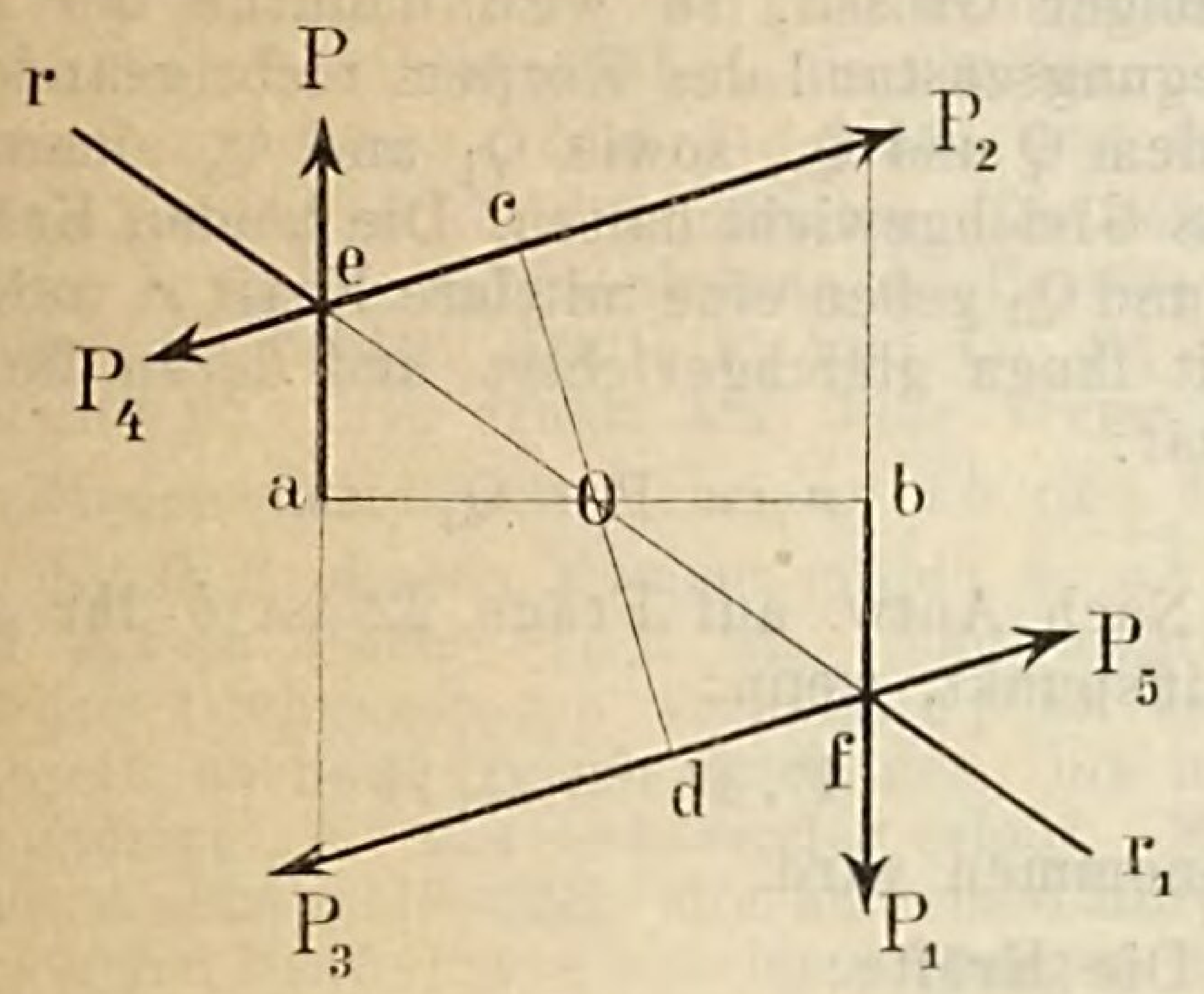
Figur 108.



Erkl. 105. Zum Nachweis der Richtigkeit der Sätze über die Drehungspaare benutzt man am zweckmässigsten den Satz, dass man zu den auf einen Körper wirkenden Kräften beliebig viele andere, welche miteinander im Gleichgewicht stehen, hinzufügen oder auch von ihnen wegnehmen darf, ohne den Bewegungszustand zu ändern.

Frage 49. Welche Veränderungen kann man in Bezug auf die Lage eines Kräftepaares zu seiner Achse vornehmen, ohne dass die Wirkung desselben geändert wird?

Figur 109.



Erkl. 106. Nach Antwort auf Frage 48 kann man jedes Kräftepaar parallel mit sich selbst fortschieben und nach Antwort auf Frage 49 kann man jedes Kräftepaar in seiner Ebene um den Mittelpunkt seines Hebelarms um einen beliebigen Winkel drehen: Man kann folglich ein Kräftepaar in seiner Ebene in jede beliebige Lage bringen. Man kann es aber auch in eine mit seiner ursprünglichen Ebene parallele Ebene verlegen und ihm in dieser wieder jede beliebige Lage geben. Man kann ihm also jede Lage geben, in welcher seine Achse ihre frühere Richtung beibehält, vorausgesetzt, dass die Punkte, in denen die Kräfte in ihren neuen Lagen wirken, mit den früheren Angriffspunkten, überhaupt mit dem ganzen Körper in starrer Verbindung stehen. Auch muss das Kräftepaar in allen Lagen, welche man ihm gibt, den Körper, auf den es wirkt, in demselben Sinn zu drehen suchen.

Antwort. Jedes Kräftepaar kann man, ohne dass die Wirkung desselben geändert wird, um den Mittelpunkt seines Hebelarms oder um seine Achse in seiner Ebene um einen beliebigen Winkel drehen, vorausgesetzt, dass die neuen Angriffspunkte sich an demselben starren Körper befinden.

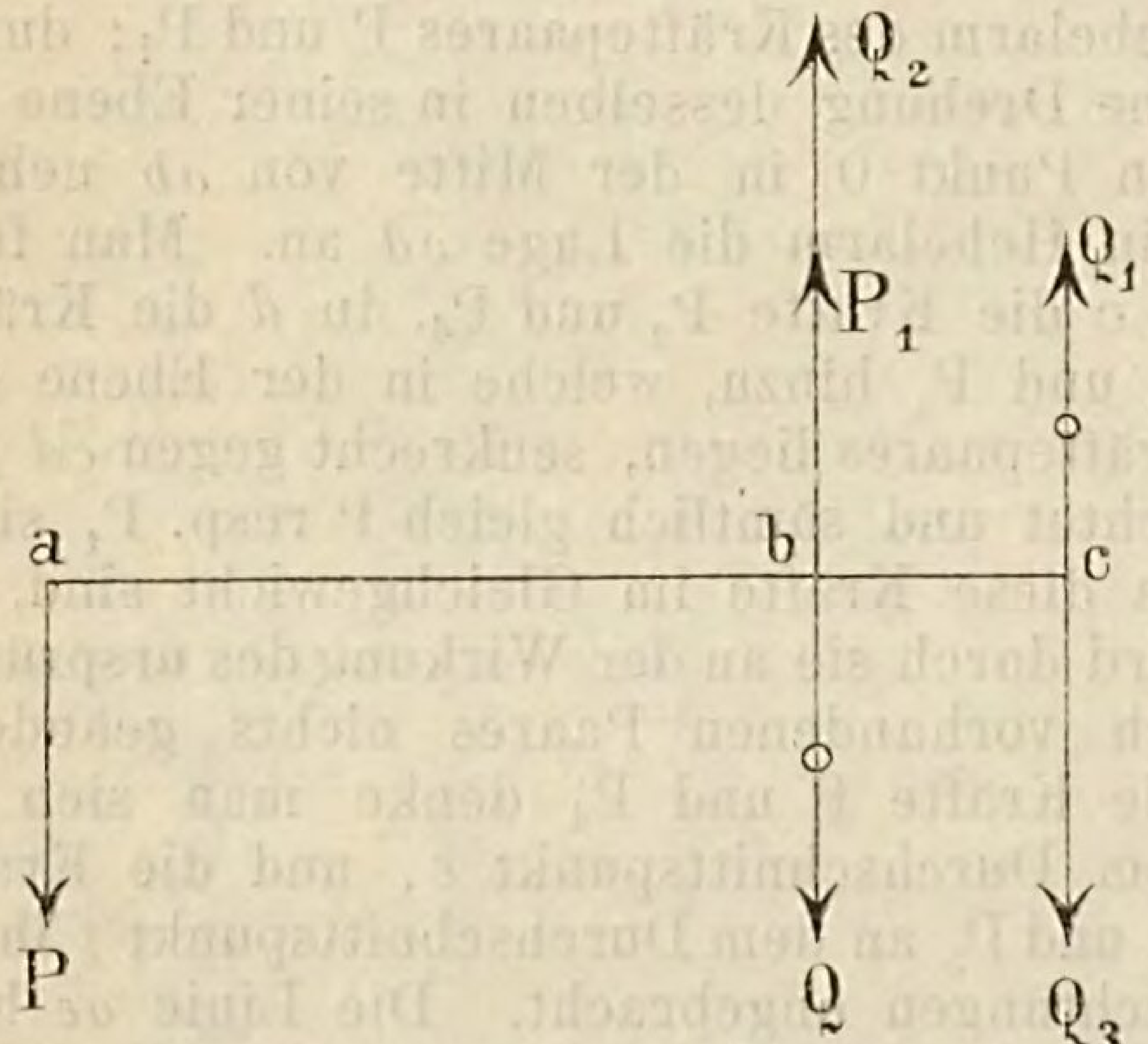
Beweis. Es sei, siehe Fig. 109, $\overline{ab}$ der Hebelarm des Kräftepaares P und P_1; durch eine Drehung desselben in seiner Ebene um den Punkt 0 in der Mitte von $\overline{ab}$ nehme sein Hebelarm die Lage $\overline{cd}$ an. Man füge in c die Kräfte P_2 und P_4, in d die Kräfte P_3 und P_5 hinzu, welche in der Ebene des Kräftepaares liegen, senkrecht gegen $\overline{cd}$ gerichtet und sämtlich gleich P resp. P_1 sind. Da diese Kräfte im Gleichgewicht sind, so wird durch sie an der Wirkung des ursprünglich vorhandenen Paares nichts geändert. Die Kräfte P und P_4 denke man sich an dem Durchschnittspunkt e, und die Kräfte P_1 und P_5 an dem Durchschnittspunkt f ihrer Richtungen angebracht. Die Linie $\overline{oe}$ halbiert die Winkel aoc und aec; die Linie $\overline{of}$ desgleichen die Winkel bod und bfd; $\overline{oe}$ und $\overline{of}$ liegen daher in einer geraden Linie. Die beiden in e wirkenden Kräfte P und P_4 geben eine Resultante r, welche den Winkel zwischen P und P_4 halbiert, deren Richtung also die Verlängerung von $\overline{oe}$ ist; ebenso geben die beiden in f wirkenden Kräfte P und P_5 eine mittlere Kraft r_1, deren Richtung die Verlängerung von $\overline{of}$ bildet.

Die beiden letzten Kräfte r und r_1 sind aber, als Mittelkräfte gleicher Seitenkräfte, welche gleiche Winkel miteinander bilden, gleich; sie wirken einander in gerader Linie entgegen und stehen mithin im Gleichgewicht. Dasselbe gilt also auch für deren Komponenten P, P_1, P_4 und P_5. Lässt man letztere weg, so erhält man statt der anfänglichen Kräfte P und P_1 die andern P_2 und P_3, also dasjenige Kräftepaar, welches aus dem anfänglichen durch die in Rede stehende Drehung entstanden ist.

Frage 50. Welche Veränderungen lassen sich mit der Länge des Hebelarms resp. mit den Kräften eines Kräftepaares vornehmen, ohne dass dessen Wirkung geändert wird?

Antwort. Man kann die Kräfte eines Drehungspaares, bei entsprechender Verlängerung seines Hebelarms durch solche von beliebiger Grösse ersetzen, ohne seine Wirkung zu ändern.

Figur 110.



Erkl. 107. Soll ein Kräftepaar durch ein anderes mit der Armlänge 1 ersetzt werden, so sind an diesem Kräfte anzubringen, welche gleich den Momenten des ursprünglichen Paares sind. Ein Kräftepaar mit der Armlänge 1 heisst ein reduziertes Kräftepaar.

Erkl. 108. Mit Hilfe der in Antw. der Fragen 48, 49 und 50 entwickelten Sätze ist es möglich, sämtliche auf einen starren Körper wirkende Kräftepaare durch ein einziges zu ersetzen. Zunächst gebe man allen den Hebelarmen die Länge 1, so dass ihre Momente durch die an ihnen wirkenden Kräfte dargestellt werden. Diejenigen, welche in parallelen Ebenen wirken, kann man darauf in einer und derselben Ebene so zusammenlegen, dass sie einen und denselben Hebelarm erhalten; sie vereinigen sich zu einem Drehungspaar, dessen Moment man findet, wenn

Beweis. Es sei in Figur 110 $\overline{ab}$ der Hebelarm des Paares P und P_1. Man verlängere $\overline{ab}$ um $\overline{bc}$ und lasse in b senkrecht zu $\overline{bc}$ die beiden Kräfte Q und Q_2 und in c ebenfalls senkrecht auf $\overline{bc}$ die beiden Kräfte Q_1 und Q_3 nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Sind Q, Q_1, Q_2 und Q_3 untereinander gleich, übrigens aber von beliebiger Grösse, so wird dadurch der Bewegungszustand des Körpers nicht geändert, indem Q und Q_2, sowie Q_1 und Q_3 einander das Gleichgewicht halten. Die beiden Kräfte P und Q_3 geben eine mittlere Kraft r, welche mit ihnen gleichgerichtet und deren Intensität:

$$r = P + Q_3 \text{ ist.}$$

Nach Antw. auf Frage 22 ist b ihr Angriffspunkt, wenn:

$$P \cdot \overline{ab} = Q_3 \cdot \overline{bc}$$

genommen wird.

Die Kräfte:

$$r = P + Q_3 \text{ und } P_1 + Q_2$$

fallen aber weg, da:

$$r = P_1 + Q_2 = P + Q_3 \text{ ist.}$$

Es bleiben somit nur noch die Kräfte Q und Q_1 übrig, welche dasselbe wirken müssen, wie die anfänglich vorhandenen P und P_1, d. h. nur unter der oben erwähnten Voraussetzung, dass:

$$P \cdot \overline{ab} = Q_3 \cdot \overline{bc}$$

Q und Q_1 bilden ein Kräftepaar, welches nach Antwort auf Frage 48 und 49 in jede beliebige Lage gebracht werden kann.

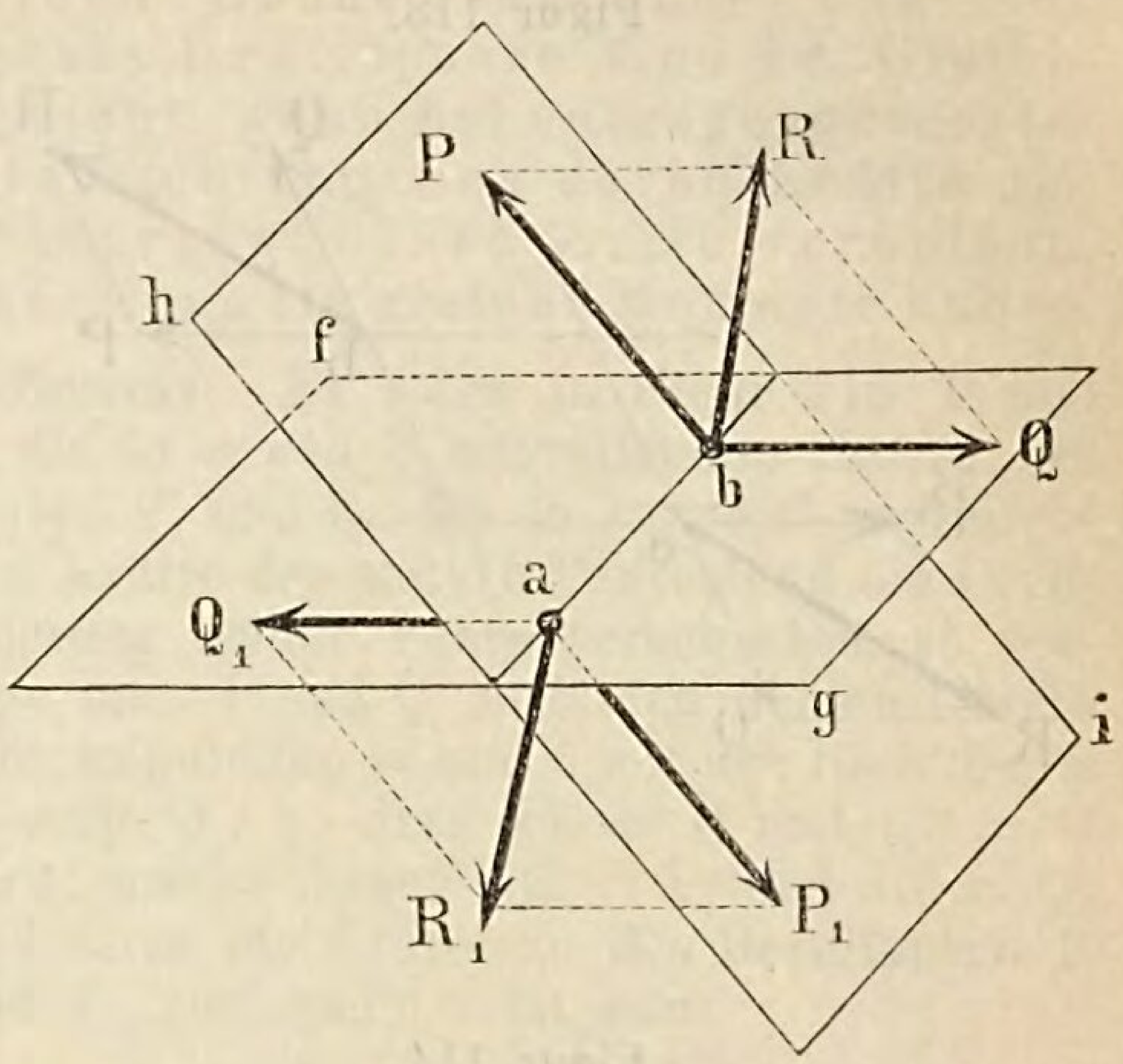
Da nach Antw. auf Frage 43 das Produkt aus Kraft mal Arm das statische Moment des Kräftepaares genannt wird, so ergibt sich folgender allgemeine Satz:

Jedes auf einen starren Körper wirkende Kräftepaar kann durch ein anderes auf denselben Körper wirkendes ersetzt werden, dessen Moment dem des ersten gleich und dessen Achse mit der des ersten gleichgerichtet ist.

man die Momente der Einzelpaare addiert oder subtrahiert, je nachdem sie nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten Seiten zu drehen suchen. Bezeichnet man die rechts drehenden Paare mit +, die links drehenden mit —, so ist das resultierende Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Paare.

Liegen zwei Paare in nicht parallelen Ebenen $\overline{fg}$ und $\overline{hi}$ (in Figur 111), so lege man sie an der Durchschnittslinie der beiden Ebenen so zusammen, dass sie einen und denselben Hebelarm $\overline{ab} = 1$ erhalten. Die beiden Kräfte P und Q geben alsdann die Resultante R und die beiden Kräfte P_1 und Q_1 die Resultante R_1; man erhält auf diese Weise ein Drehungspaar, dessen Hebelarm $\overline{ab}$ und dessen Kraft R, dessen Moment mithin $= \overline{ab} . R$ und dessen Ebene abR ist. Sind mehrere solcher Drehungspaare vorhanden, so kann man sie nach und nach vereinigen, bis man ein einziges, sie alle ersetzendes erhält. Man kann mithin schliesslich alle auf einen Körper wirkenden Kräftepaare zu einem einzigen sich vereinigt denken.

Figur 111.



c. Ueber die Bedingungen des Gleichgewichts von Kräftepaaren, die in ein und derselben Ebene wirken.

Frage 51. Welche Fälle kann man hinsichtlich der Grösse und gegenseitigen Lage zweier Kräftepaare in derselben Ebene unterscheiden?

Antwort. Hinsichtlich der Grösse und gegenseitigen Lage zweier Kräftepaare in derselben Ebene kann man folgende Fälle unterscheiden:

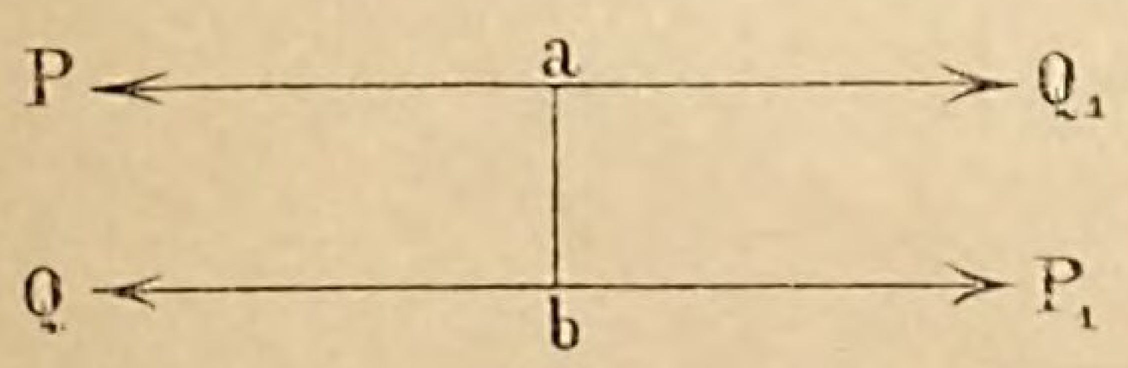
1). die Kräftepaare sind g l e i c h gross, oder:

2). „ „ „ u n g l e i c h gross.

Im ersten Falle können die Kraftrichtungen der Paare ineinander fallen, in jedem der beiden Fälle können sich ferner die Kräftepaare schneiden oder parallel liegen.

Frage 52. Wenn sind zwei g l e i c h g r o s s e Kräftepaare derselben Ebene im Gleichgewicht?

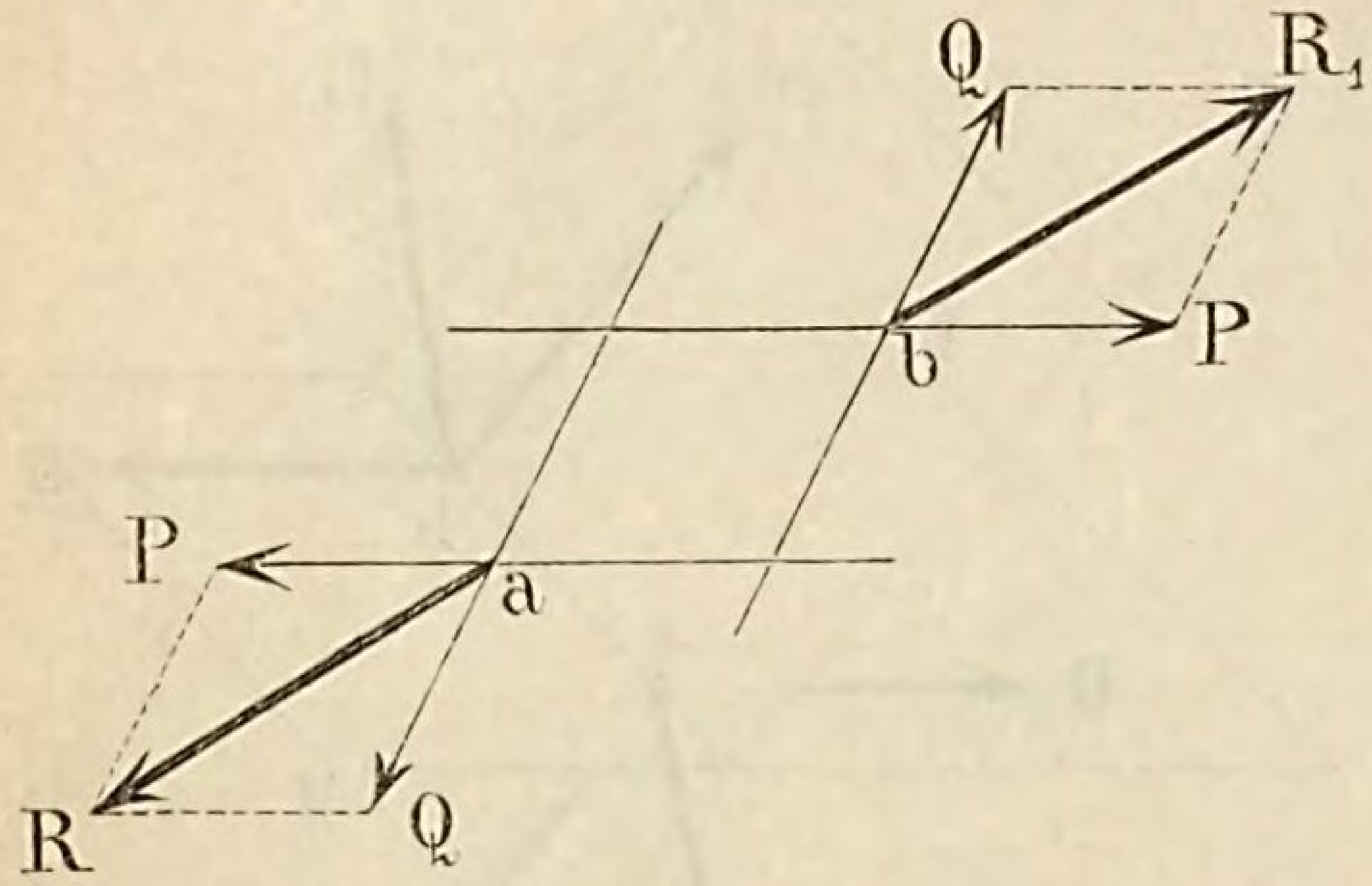
Figur 112.



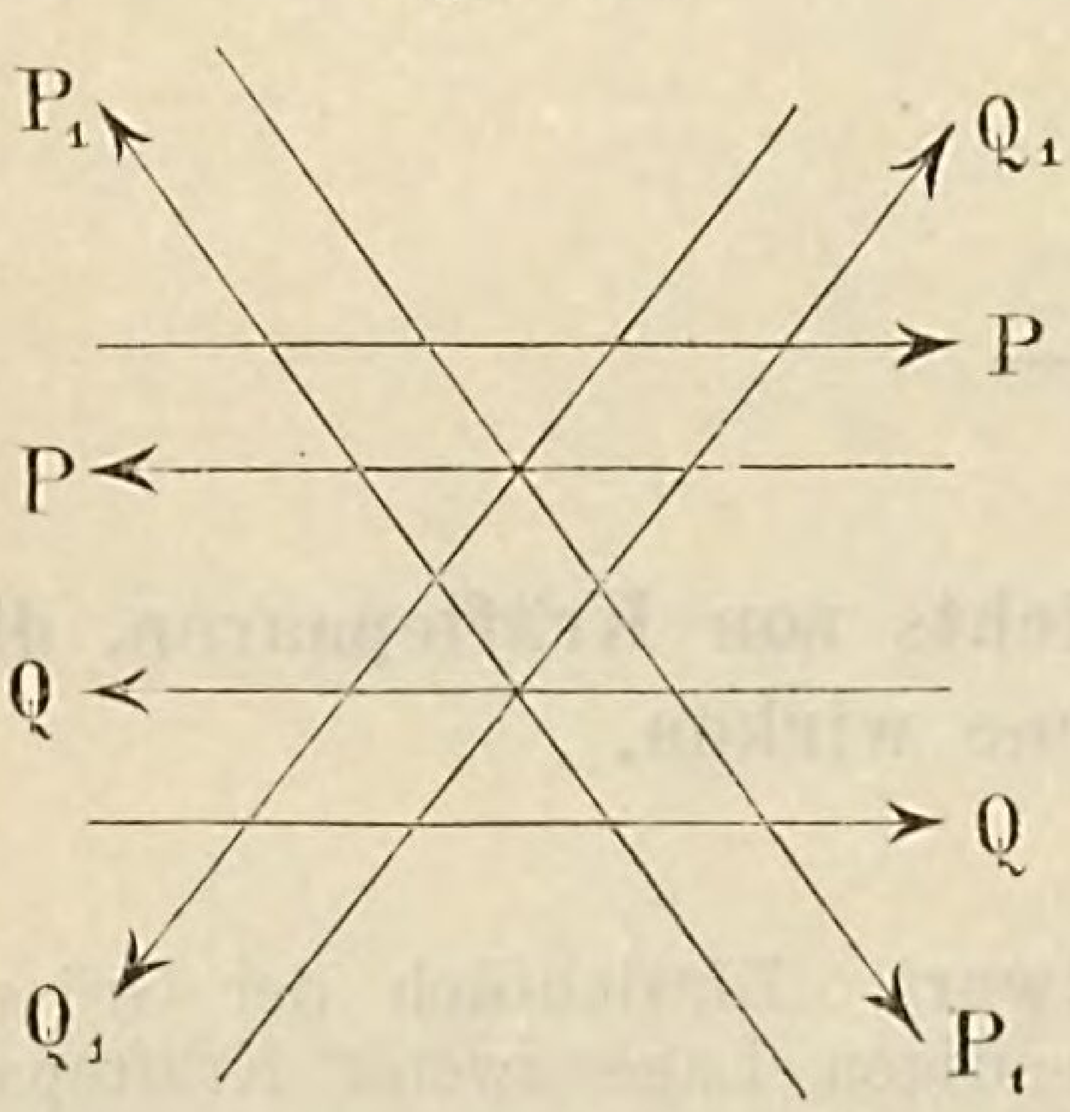
Antwort. Z w e i g l e i c h g r o s s e K r ä f t e p a a r e, d i e e n t g e g e n g e s e t z t e s D r e h u n g s b e s t r e b e n h a b e n u n d i n e i n e r E b e n e l i e g e n, h a l t e n s i c h d a s G l e i c h g e w i c h t.

Beweis a. Fallen die Kraftrichtungen der Paare ineinander, so wirken an jedem Angriffspunkt $\overline{ab}$ des gemeinsamen Hebelarmes, siehe Figur 112, zwei gleich grosse Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen.

Figur 113.



Figur 114.



Die Wirkung derselben ist (nach Satz 4 in Antwort auf Frage 11) gleich Null, daher auch die Wirkung der gegebenen Paare P, P_1 und QQ_1 gleich Null.

Beweis b. Schneiden sich die Kräftepaare, so entsteht bei entsprechender Verlängerung der Kraftlinien als Durchschnittsfigur ein Rhombus, da nach der Voraussetzung die Kräftepaare gleich gross sind, also auch gleiche Breite (oder gleichen Arm) haben. Für die beiden Kräfte, in *a* wirksam gedacht, bestimme man die Resultante R. Diese liegt der Richtung nach in der Diagonale des Rhombus, siehe Figur 113. Für die Kräfte in *b* bestimme man ebenfalls die Resultante R_1; letztere ist gleich R, aber dieser ersten Mittelkraft gerade entgegengesetzt gerichtet. Es heben sich demnach (Satz 4, Frage 11) diese beiden Resultanten auf, weshalb auch die Wirkung der gegebenen Paare = 0 sein muss.

Beweis c. Liegen die Paare PP und QQ parallel, so bilde man sich zwei Paare P_1P_1 und Q_1Q_1, welche den gegebenen gleich sind, entgegengesetztes Drehungsbestreben haben und sich schneiden, siehe Figur 114. Dieselben sind nach Beweis b. unter sich im Gleichgewicht und werden zu den gegebenen Paaren in eine dieselben schneidende Lage gebracht, den ursprünglichen Zustand nicht ändern. Nach Beweis b). ist das Kräftepaar PP mit Q_1Q_1 im Gleichgewicht, ebenso QQ mit P_1P_1, daher müssen auch PP und QQ einander aufheben, da P_1P_1 und Q_1Q_1 für sich im Gleichgewicht sind.[1])

Aus obigem Gesetz folgt, dass die Lage zweier Kräftepaare in einer Ebene ohne Einfluss auf die Wirkung derselben ist, und dass man somit jedes Paar in seiner Ebene beliebig verschieben kann.

Erkl. 109. Ein Grundsatz der Statik lautet: Wenn zwischen mehreren auf einen Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht stattfindet, und eine Anzahl derselben für sich im Gleichgewicht ist, so herrscht auch zwischen den übrigen, für sich genommen, Gleichgewicht.

Folgerungen: 1). Zwei Systeme von Kräften (Q und S), deren jedes mit einem dritten P im Gleichgewicht ist, sind von gleicher Wirkung, und umgekehrt:

2). Sind zwei Systeme (P und S) gleichwirkend, so ist mit jedem dritten System (Q) mit welchem das eine (P) das Gleichgewicht hält, auch das andere (S) im Gleichgewicht, d. h. gleichwirkende Systeme können in Bezug auf das Gleichgewicht für einander gesetzt werden.

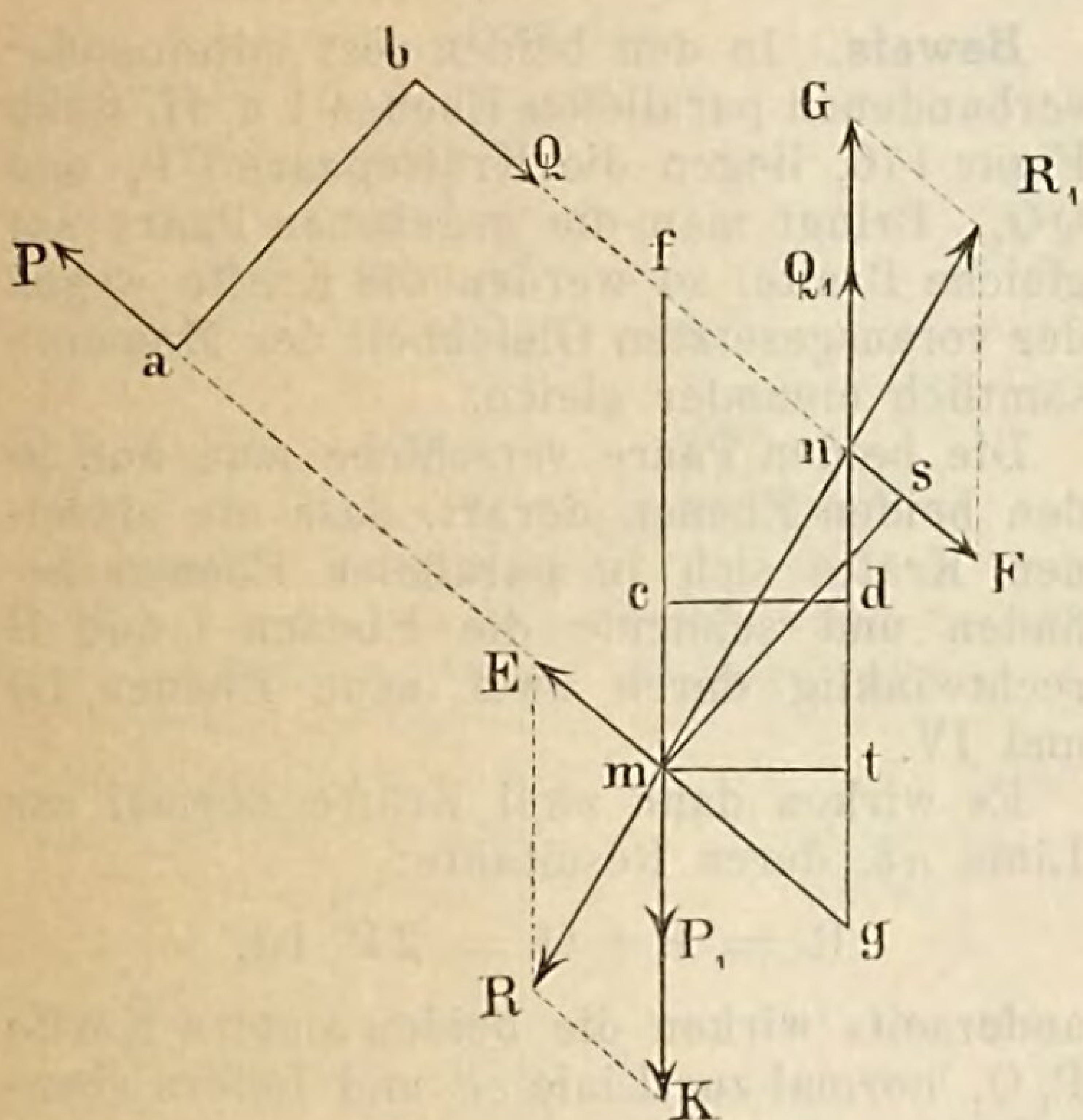
3). Zwei Systeme (Q und S), deren jedes einem dritten (P) gleichwirkend ist, sind es auch unter sich.

[1]) Siehe Erkl. 109.

Frage 53. Unter welchen Bedingungen sind zwei Kräftepaare derselben Ebene, deren Arme u n g l e i c h g r o s s sind, im Gleichgewicht?

Antwort. Z w e i i n e i n e r u n d d e r s e l b e n E b e n e w i r k e n d e u n g l e i c h g r o s s e K r ä f t e p a a r e s i n d i m G l e i c h g e w i c h t, w e n n b e i e n t g e g e n g e s e t z t e r D r e h r i c h t u n g s i c h d e r e n K r ä f t e u m g e k e h r t w i e i h r e A r m e v e r h a l t e n, o d e r w e n n s i e g l e i c h e M o m e n t e h a b e n.

Figur 115.



Beweis. Es seien in Figur 115 P und Q die in a und b angreifenden Kräfte des einen, P_1 und Q_1 die in c und d angreifenden Kräfte des andern Paares und die Drehrichtung beider Paare verschieden, so verlege man P und Q nach den beiden Durchschnittspunkten m und n mit den Richtungen P_1 resp. Q_1, so dass $\overline{mE} = P$ und $\overline{nF} = Q$ wird; mache ferner $\overline{mK} = P_1$ und $\overline{nG} = Q_1$ und setze die Kräfte zu den Resultanten R und R_1 zusammen. Ist nun:

$$P \,.\, \overline{ab} = P_1 \,.\, \overline{cd}$$

so liegen $\overline{Rm}$ und $\overline{R_1 n}$ in einer Geraden, sind einander gleich und heben sich auf.

Dass $\overline{Rm}$ parallel $\overline{R_1 n}$ ist, folgt aus der Kongruenz der Parallelogramme $\overline{GF}$ und $\overline{EK}$.

Zieht man nun $\overline{mn}$, verlängert $\overline{mK}$ bis zum Durchschnitt f mit $\overline{bF}$ und $\overline{nG}$ bis zum Durchschnitt g mit $\overline{Pm}$, so ist $\overline{fg}$ ein Parallelogramm, daher $\measuredangle f = \measuredangle g$ und wenn $\overline{ms}$ senkrecht $\overline{nF}$ und $\overline{mt}$ senkrecht $\overline{dg}$ gezogen wird, dann ist:

$$\triangle mfs \sim \triangle mtg$$

folglich:

$$\overline{mf} : \overline{ms} = \overline{mg} : \overline{mt}$$

oder:

$$\overline{mf} : \overline{ab} = \overline{mg} : \overline{cd}$$

da aber infolge der Voraussetzung:

$$P_1 : \overline{ab} = P : \overline{cd}$$

so folgt:

$$\overline{mf} : P_1 = \overline{mg} : P$$

oder:

$$\overline{mf} : \overline{fn} = \overline{mK} : \overline{RK}$$

Da nun:

$$\measuredangle f = \measuredangle K$$

so ist:

$$\triangle mfn \sim \triangle RmK$$

daher:

$$\measuredangle RmK = \measuredangle fmn$$

demnach ist $RmnR_1$ eine Gerade, weil fmk eine Gerade ist.

Da endlich nR_1 parallel mR_1, so liegt auch nR in der Geraden Rmn.

Die beiden gleichen Resultanten R und R_1, zu welchen sich die gegebenen Kräfte zusammensetzen lassen, heben sich also gegenseitig auf, folglich stehen auch die gegebenen Drehungspaare im Gleichgewicht.

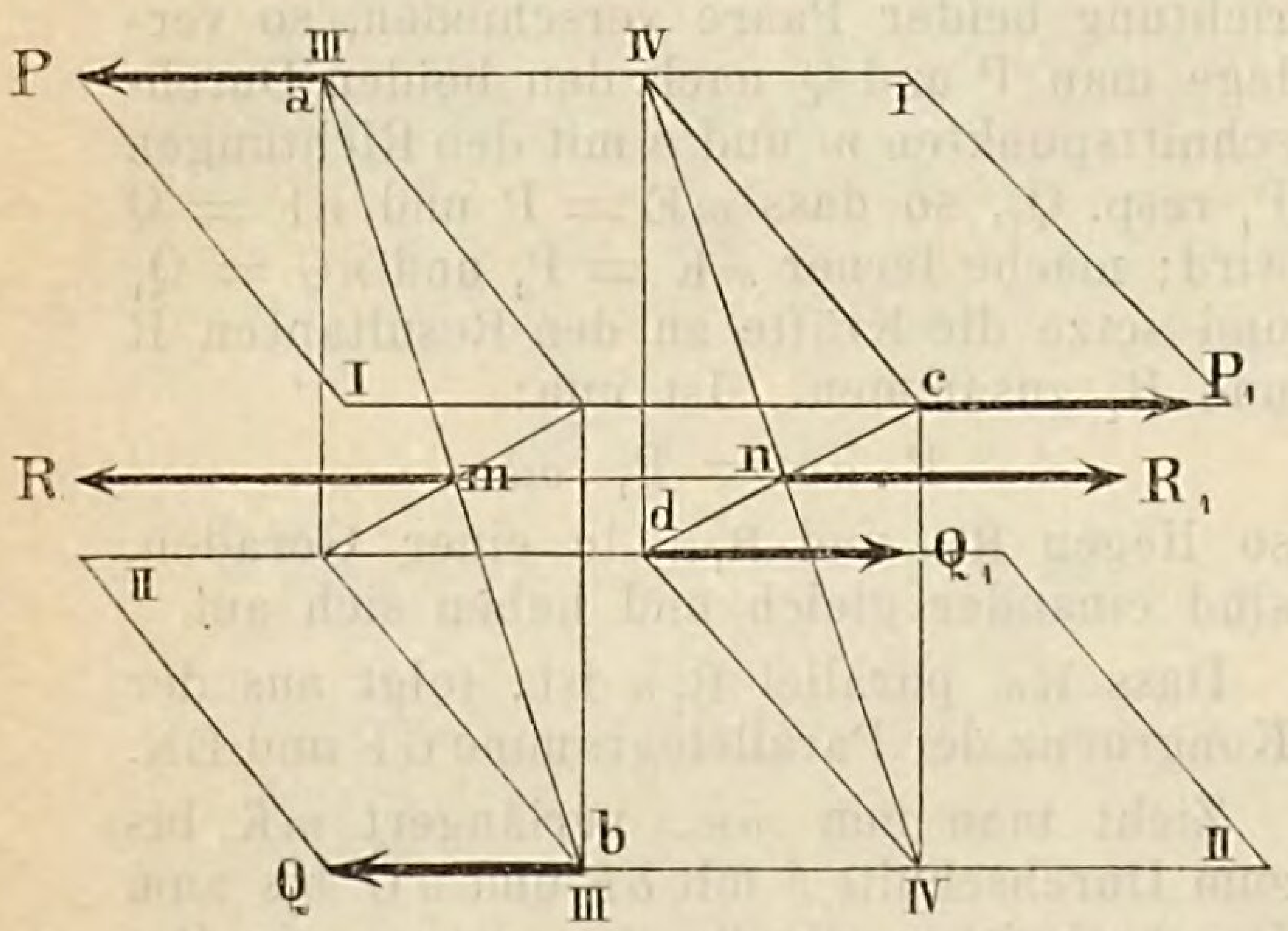
Erkl. 110. Wären die Richtungslinien sämtlicher vier gegebenen Kräfte parallel gewesen, so würde man je zwei gleich gerichtete durch ihre Mittelkraft ersetzen und als Drehpunkt für das statische Moment der einen Mittelkraft irgend einen Punkt in der Richtungslinie der andern wählen können. Da auch für die Mittelkraft von zwei gleichgerichteten Kräften das Gesetz der statischen Momente gilt, so würde das im übrigen mit dem vorigen übereinstimmende Beweisverfahren ergeben, dass auch in diesem Falle die beiden Mittelkräfte, folglich auch die beiden Kräftepaare einander im Gleichgewicht halten.

d. Ueber Kräftepaare in parallelen Ebenen.

Frage 54. Unter welchen Umständen halten sich Kräftepaare in parallelen Ebenen das Gleichgewicht?

Antwort. Haben Kräftepaare in parallelen Ebenen entgegengesetztes Drehungsbestreben aber gleiche Momente, so halten sie sich das Gleichgewicht.

Figur 116.



Beweis. In den beiden fest miteinander verbundenen parallelen Ebenen I u. II, siehe Figur 116, liegen die Kräftepaare PP_1 und QQ_1. Bringt man die gegebenen Paare auf gleiche Breite, so werden die Kräfte wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Momente sämtlich einander gleich.

Die beiden Paare verschiebe man nun in den beiden Ebenen derart, dass die einzelnen Kräfte sich in parallelen Ebenen befinden und schneide die Ebenen I und II rechtwinklig durch zwei neue Ebenen III und IV.

Es wirken dann zwei Kräfte normal zur Linie $\overline{ab}$, deren Resultante:

$$R = P + Q = 2P \text{ ist,}$$

anderseits wirken die beiden andern Kräfte $P_1 Q_1$ normal zur Linie $\overline{cd}$ und liefern ebenfalls:

$$R_1 = P_1 + Q_1 = 2P_1$$

als Mittelkraft.

Beide Resultanten wirken nach entgegengesetzten Richtungen in der durch m und n mit den Kräften parallel gehenden Linie, heben sich also auf, weshalb auch die ursprünglich gegebenen Kräftepaare im Gleichgewicht sein müssen, da die beiden Kräfte R und R_1 anstatt der Kräftepaare gesetzt werden dürfen.

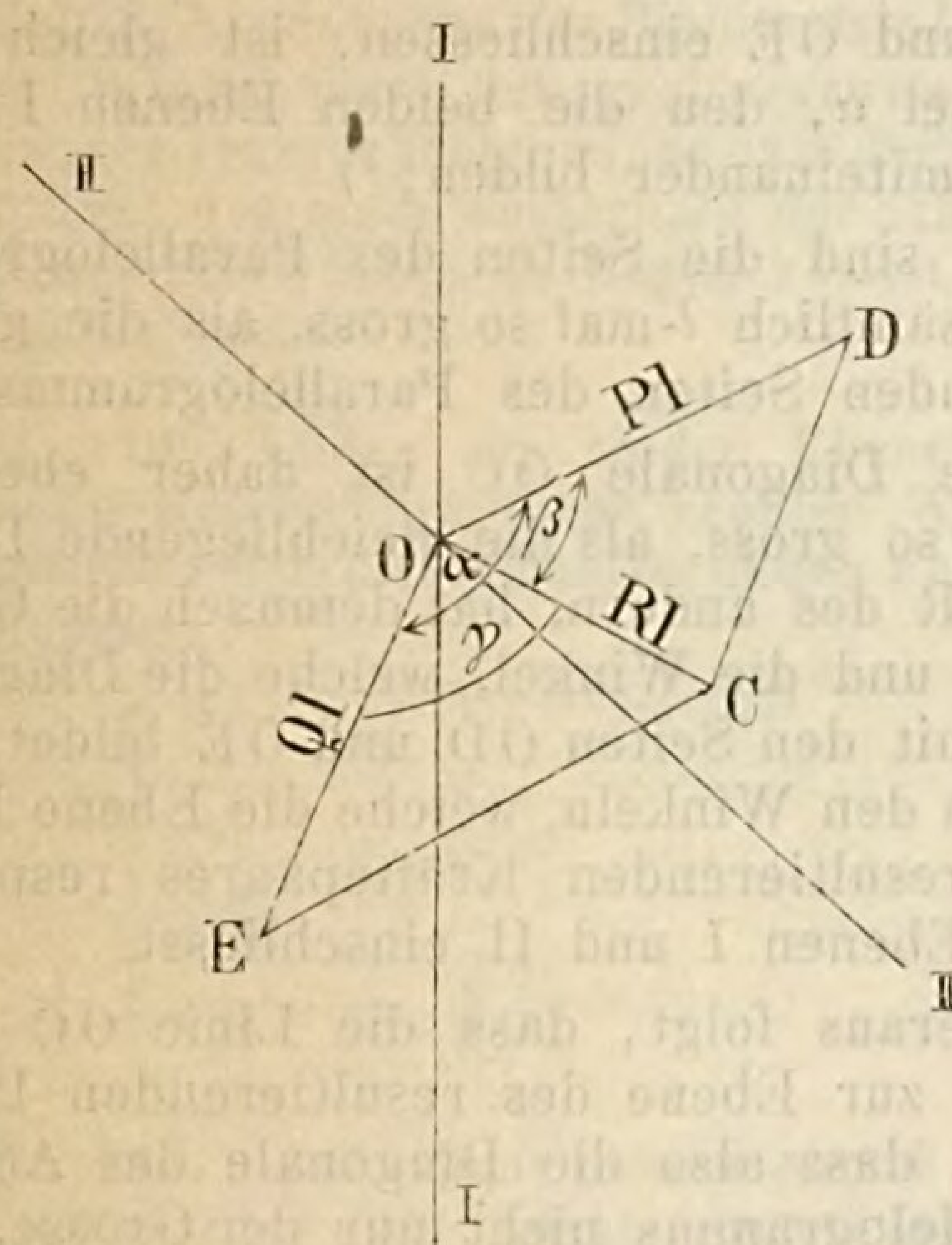
Erkl. 111. Da nach diesem Gesetz die Entfernung der beiden fest verbundenen Ebenen I und II auf die Wirkung der darin liegenden Kräftepaare keinen Einfluss hat, so folgt daraus, dass man jedes Kräftepaar mit seiner Ebene parallel verschieben darf und daher verschiedene Kräftepaare, die in fest mit einander verbundenen parallelen Ebenen liegen, in derselben Weise zu einem resultierenden Kräftepaar vereinigen kann, als ob die Kräftepaare in derselben Ebene vorhanden gewesen wären. Aus der Verbindung dieses Satzes mit dem vorher schon bewiesenen ergibt sich nunmehr der Satz:

Es lassen sich beliebig viele Kräftepaare, die in derselben Ebene, oder in damit fest verbundenen parallelen Ebenen liegen, jederzeit zu einem resultierenden Kräftepaar vereinigen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare ist. Umgekehrt lässt sich auch jedes beliebige Kräftepaar in eine beliebige Anzahl von Kräftepaaren zerlegen, die mit den gegebenen in derselben Ebene oder in fest verbundenen parallelen Ebenen liegen.

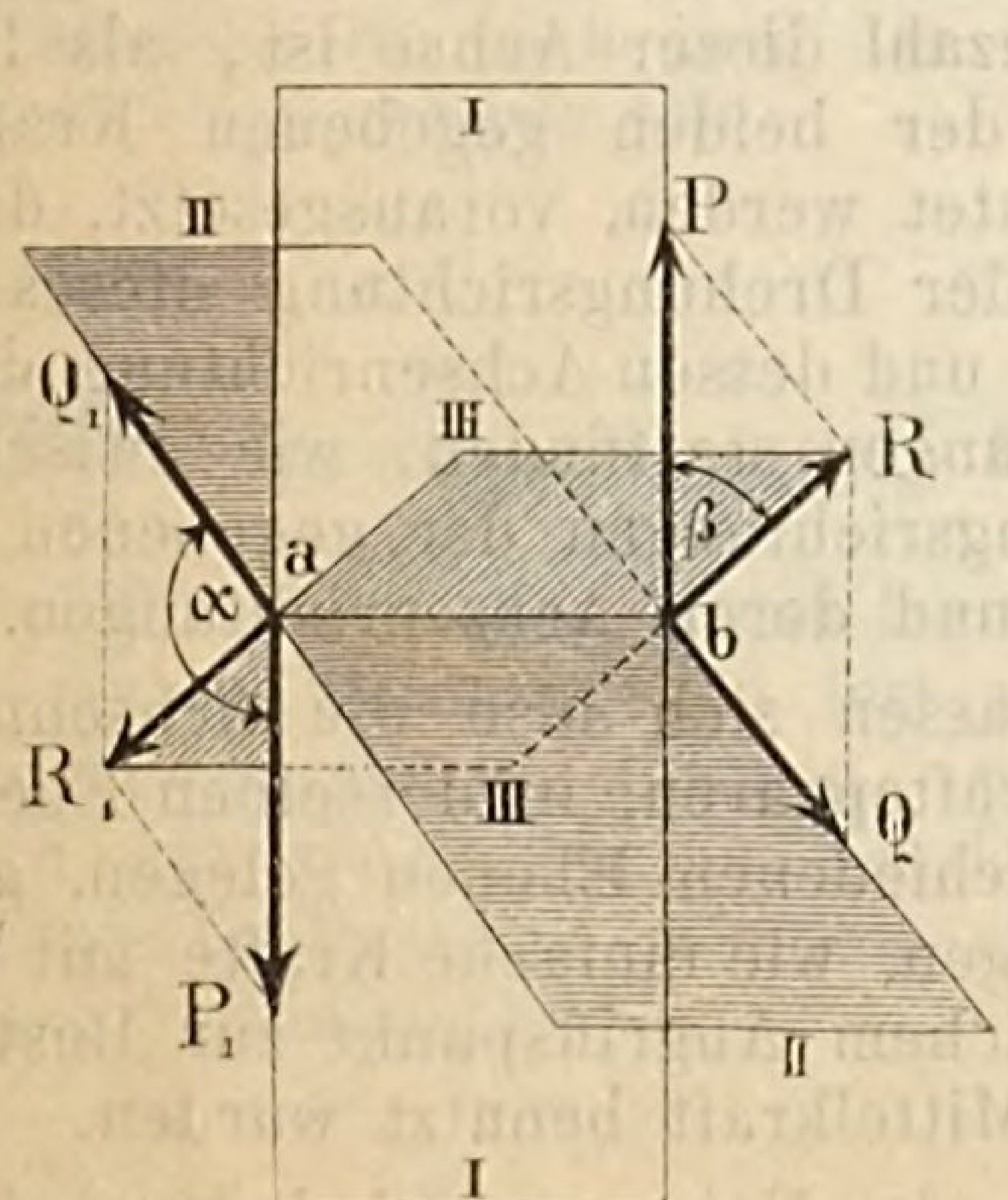
e. Ueber zwei Kräftepaare in nicht parallelen Ebenen.

Frage 55. Welche Veränderungen lassen sich mit zwei Kräftepaaren, die in nicht parallelen Ebenen liegen (oder die verschiedene Achsenrichtung haben) vornehmen, ohne dass die Wirkung derselben geändert wird?

Figur 117.



Figur 118.



Antwort. Zwei Kräftepaare in nicht parallelen Ebenen lassen sich durch ein Kräftepaar ersetzen, dessen Kräfte nach Grösse und Richtung dargestellt werden durch die Diagonalen der beiden Parallelogramme, deren Seiten von den nach einem gemeinschaftlichen Arm verlegten Kräften der gegebenen Paare gebildet werden.

Beweis. Es seien in zwei fest miteinander verbundenen, sich schneidenden Ebenen I I und II II, siehe Fig. 117 u. 118, irgend zwei Kräftepaare gegeben.

Dieselben können nun immer so verschoben werden, dass die Arme beider Paare in die Durchschnittslinie der Ebenen fallen und an irgend einem beliebig gewählten Stück $ab = l$ dieser Linie als gemeinschaftlichem Hebelarm wirken, nachdem man dieselben auf die gleiche Breite l gebracht hat, denn innerhalb einer Drehungsebene kann (nach früher bewiesenen Sätzen) jedes Kräftepaar beliebig verschoben und durch ein anderes Kräftepaar von gleichem Moment und gleicher Drehungsrichtung ersetzt werden.

Die an dem Endpunkt a wirkenden beiden Kräfte P_1 und Q_1 können alsdann nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft R_1 vereinigt werden, und ebenso die am andern Endpunkt b wirkenden beiden Kräfte P und Q zur Mittelkraft R.

Da die betreffenden beiden Kräfteparallelogramme sich nur durch die entgegengesetzten Richtungen der gleichliegenden Seiten von einander unterscheiden, so haben die beiden Mittelkräfte R und R_1 gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung, bilden also ein Kräftepaar, dessen Moment:

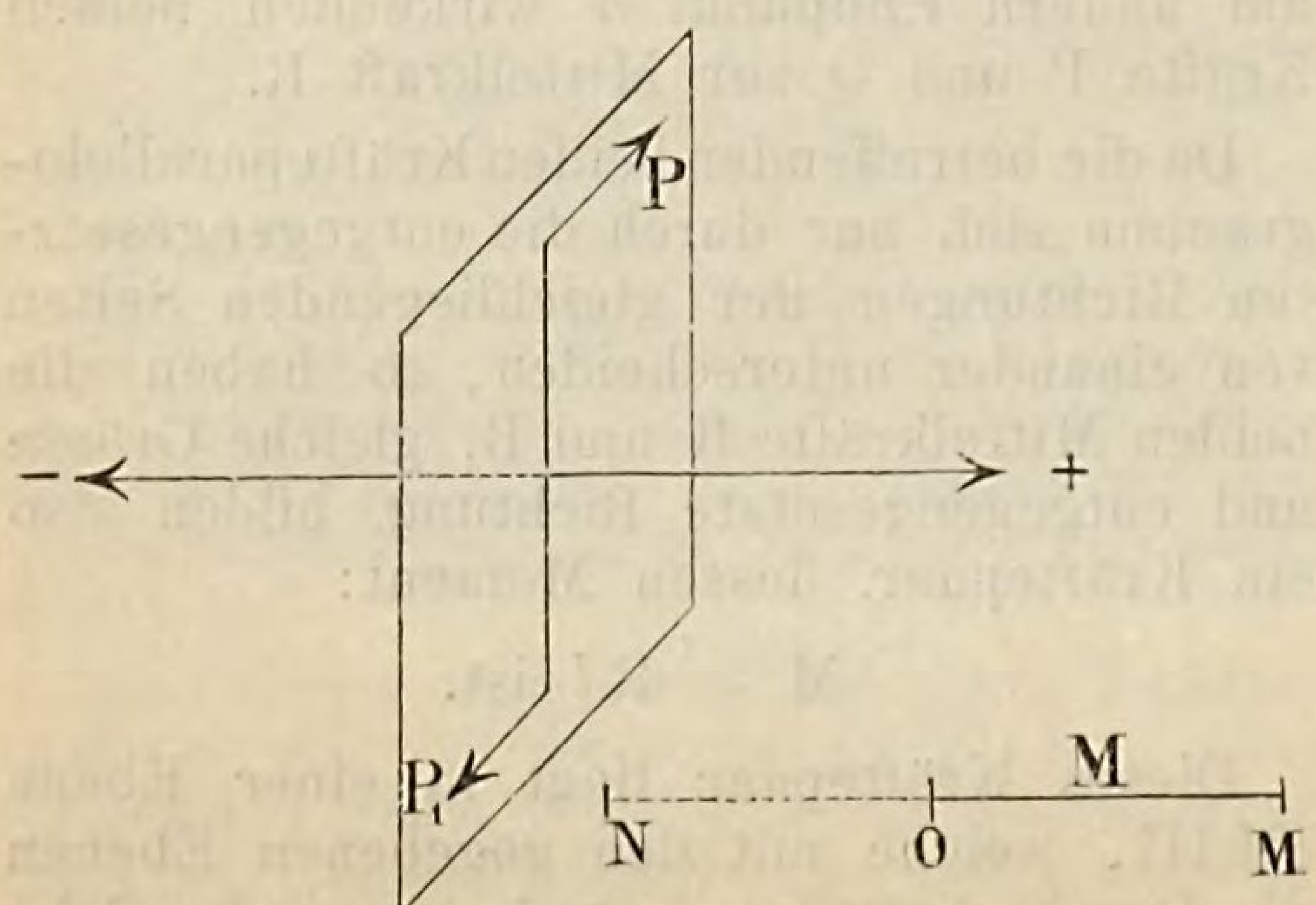
$$M = R\,l \text{ ist.}$$

Dieses Kräftepaar liegt in einer Ebene III III, welche mit den gegebenen Ebenen die Durchschnittlinie gemein hat und welche mit den Ebenen I I und II II dieselben Winkel bildet, welche die beiden Kräfte P und Q mit R einschliessen. Es soll nachgewiesen werden, dass die Diagonale $\overline{OC}$ des aus den Achsen (siehe Antw. auf Frage 46) $\overline{OD}$ und $\overline{OE}$ der beiden gegebenen Kräftepaare an willkürlich gewählter Stelle gebildeten Parallelogramms ED diejenigen Eigenschaf-

Erkl. 112. Wenn die Konstruktion des Achsenparallelogramms zu einem richtigen Resultat führen soll, so ist erforderlich bei dem Abtragen der Achsen konsequent nach einer und derselben Methode zu verfahren, um dadurch gewisse Zweideutigkeiten zu vermeiden, welche sonst überall da sich einstellen, wo von der Richtung einer geraden Linie und von der Richtung einer Drehbewegung die Rede ist. In der Normalen einer Ebene gibt es — wie überhaupt in jeder geraden Linie — zwei entgegengesetzte Richtungen, und muss daher ein für allemale festgestellt werden, nach welcher von beiden Seiten hin die Achse eines gegebenen Kräftepaares allemal abgetragen werden soll.

Die Drehungsebene jedes Kräftepaares teilt den unendlichen Raum in zwei Hälften, welche — zwar an sich unterschiedslos — doch insofern unterschieden werden können, als die Beziehungen der Drehungsrichtung des Kräftepaares zu diesen beiden Raumhälften verschieden sind. Diejenige Raumhälfte soll in Bezug auf das Kräftepaar als die „positive“ bezeichnet werden, von deren Punkten aus betrachtet die demselben entsprechende Drehbewegung als eine von links nach rechts gerichtete erscheinen würde, d. h. übereinstimmend mit der Drehungsrichtung der Zeiger einer gewöhnlichen Uhr, wie sie einem von der Vorderseite aus gegen das Zifferblatt sehenden Beobachter erscheint, die andere als die negative. Dem entsprechend soll als die positive Richtung der Normalen jener Drehungsebene diejenige bezeichnet werden, welche aus der negativen in die positive Raumhälfte hineinführt.

Figur 119.



Wenn von irgend einem Punkt O aus die Achse eines gegebenen Kräftepaares abgetragen werden soll, so ist es an sich gleichgiltig, nach welcher von beiden Seiten hin — ob in der Richtung von O nach M oder von O nach N — die Länge M = dem Moment des Kräftepaares abgetragen wird (Fig. 119); da es indessen, wo mehrere Kräftepaare gleichzeitig ten besitzt, welche der Achse des resultierenden Kräftepaares zukommen.

Die Linie $\overline{OD}$ ist die Achse des Kräftepaares PP_1, steht also senkrecht zur Ebene II und hat die Länge $P.l$; die Linie $\overline{OE}$ stellt auf gleiche Weise [1]) die Achse des Kräftepaares QQ_1 dar, steht also senkrecht zur Ebene IIII und hat die Länge $Q.l$.

Die beiden Parallelogramme PQ und DE sind einander ähnlich; denn:

1). der Winkel α, den die beiden Achsen $\overline{OD}$ und $\overline{OE}$ einschliessen, ist gleich dem Winkel α, den die beiden Ebenen II und IIII miteinander bilden; [2])

2). sind die Seiten des Parallelogramms DE sämtlich l-mal so gross, als die gleichliegenden Seiten des Parallelogramms PQ.

Die Diagonale $\overline{OC}$ ist daher ebenfalls lmal so gross, als die gleichliegende Diagonale R des andern, hat demnach die Grösse $R.l$, und die Winkel, welche die Diagonale $\overline{OC}$ mit den Seiten $\overline{OD}$ und $\overline{OE}$ bildet, sind gleich den Winkeln, welche die Ebene IIIIII des resultierenden Kräftepaares resp. mit den Ebenen I und II einschliesst.

Hieraus folgt, dass die Linie $\overline{OC}$ senkrecht zur Ebene des resultierenden Paares steht, dass also die Diagonale des Achsenparallelogramms nicht nur der Grösse, sondern auch der Richtung nach die Achse des resultierenden Paares darstellt.

Es kann nun irgend ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zu dieser Achse $\overline{OC}$ steht, und dessen Momentzahl gleich der Längenzahl dieser Achse ist, als Resultierende der beiden gegebenen Kräftepaare betrachtet werden, vorausgesetzt, dass zwischen der Drehungsrichtung dieses Kräftepaares und dessen Achsenrichtung dieselben Beziehungen stattfinden, wie zwischen den Drehungsrichtungen der gegebenen Kräftepaare und deren Achsenrichtungen.

Es lassen sich also die Achsenmomente von Kräftepaaren, in derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen gelegen, geradeso vereinigen, wie einfache Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt zur Bestimmung ihrer Mittelkraft benutzt wurden.

Ist α der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen, so ergibt sich (nach der früher erörterten Formel):

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2P.Q.\cos\alpha)}$$

[1]) Siehe Erkl. 112.
[2]) Siehe Erkl. 113.

vorkommen, erforderlich ist, alle diese Kräftepaare in übereinstimmender Weise zu behandeln, so empfiehlt es sich, von vornherein für eine dieser beiden Methoden sich zu entscheiden; gewöhnlich wählt man die positiven Richtungen der Lote als Richtungen der Achsen. In Fig. 119 ist demnach das Stück OM = M die geometrische Darstellung der Achse des Kräftepaares PP_1. Die Achse eines entgegengesetzt drehenden Kräftepaares derselben Ebene würde in der Richtung von O nach N hinabzutragen sein.

Erkl. 113. Ein Satz aus der Planimetrie lautet: Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, so dass der Scheitelpunkt des einen ausserhalb der Schenkel des andern Winkels zu liegen kommt, sind einander gleich.

Erkl. 114. Bilden die beiden Ebenen der gegebenen Kräftepaare einen rechten Winkel, so reduzieren sich die nebenstehenden Formeln auf folgende:

$$3)\ldots\quad \begin{cases} Rr = \sqrt{(Pp)^2 + (Qq)^2} \\ \cos\beta = \dfrac{Pp}{Rr} \\ \text{und} \\ \cos\gamma = \dfrac{Qq}{Rr} \end{cases}$$

Erkl. 115. Aus dem nebenstehend erörterten Satz über die Zusammensetzung von Kräftepaaren folgt die Umkehrung, dass sich jedes Kräftepaar in zwei andere zerlegen lässt, deren Ebenen sich mit der von Rr in derselben Linie schneiden und die unter sich den Winkel α bilden. Soll aber eine derartige Aufgabe bestimmt sein, so müssen ausser dem gegebenen Kräftepaar Rr noch zwei der Grössen β, γ, Pp und Qq gegeben sein.

wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit der Länge des Hebelarms l multipliziert:

$$Rl = \sqrt{(Pl)^2 + (Ql)^2 + 2Pl \cdot Ql \cdot \cos\alpha}$$

oder bezeichnet man die den gegebenen Kräften P und Q ursprünglich zugehörigen Hebelarme mit p resp. q, sowie den Hebelarm der Resultante mit r, so ist:

$$1)\ldots\quad Rr = \sqrt{(Pp)^2 + (Qq)^2 + 2Pp \cdot Qq \cdot \cos\alpha}$$

Bezeichnet man die Winkel, welche das Achsenmoment Rr mit den Achsenmomenten Pp und Qq bildet mit β resp. γ (s. Fig. 117), so ist (nach dem Satz, die Kräfte verhalten sich wie die Sinus der Winkel, welche je zwei Kräfte miteinander bilden):

$$2)\ldots\quad Pp : Qq : Rr = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\alpha$$

woraus sich die Lage des resultierenden Achsenmoments oder die zu diesem Achsenmoment senkrechte Paarebene bestimmt. — Gleichgewicht findet hierbei nicht statt.

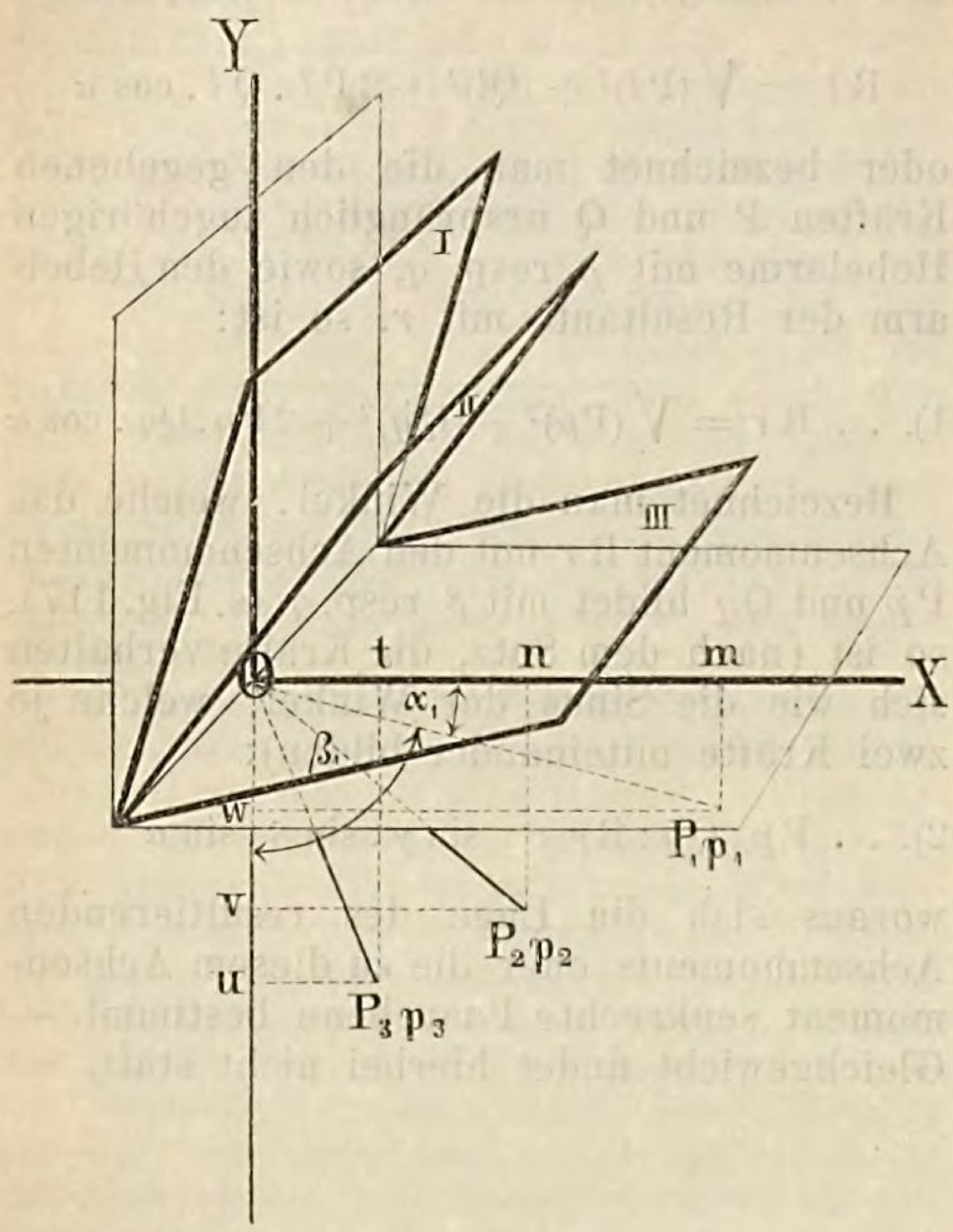
e. Ueber mehr als zwei Kräftepaare in nicht parallelen Ebenen.

Frage 56. In welcher Weise lassen sich beliebig viele Kräftepaare in fest verbundenen nicht parallelen Ebenen, welche sämtlich ein und dieselbe Durchschnittslinie haben, zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen?

Antwort. Sollen beliebig viel Kräftepaare in fest verbundenen Ebenen I, II und III, welche sämtlich durch dieselbe Linie ab gehen, vereinigt werden, so denke man sich in einem Punkt O dieser Linie sämtliche Achsenmomente konstruiert, lege in der Ebene derselben durch O ein rechtwinkliges Koordinatensystem und bestimme die Lage der Achsenmomente durch die Winkel α und β, welche diese mit den Koordinatenachsen bilden.

Zerlegt man nun die Achsenmomente der

Figur 120.



gegebenen Kräfte P_1p_1, P_2p_2, P_3p_3 ..., siehe Figur 120, die mit den Achsen die Winkel $\alpha_1\ \beta_1$, $\alpha_2\ \beta_2$, $\alpha_3\ \beta_3$ bilden, nach Richtung der Achsen, so erhält man, da:

$$O\,m = P_1p_1 \,.\, \cos\alpha_1$$
$$O\,n = P_2p_2 \,.\, \cos\alpha_2$$
$$O\,t = P_3p_3 \,.\, \cos\alpha_3$$

in Richtung der X-Achse die Komponenten:

$$P_1p_1 \,.\, \cos\alpha_1 + P_2p_2 \,.\, \cos\alpha_2 + P_3p_3 \,.\, \cos\alpha_3$$

deren Summe mit Mx bezeichnet werden soll.

In gleicher Weise ist, da:

$$O\,w = P_1p_1 \,.\, \cos\beta_1$$
$$O\,v = P_2p_2 \,.\, \cos\beta_2$$
$$O\,u = P_3p_3 \,.\, \cos\beta_3$$

ist, die Summe der Komponenten in Richtung der Y-Achse =

$$P_1p_1 \,.\, \cos\beta_1 + P_2p_2 \,.\, \cos\beta_2 + P_3p_3 \,.\, \cos\beta_3$$

deren Summe mit My bezeichnet werden soll.

Hieraus ergibt sich das Moment des resultierenden Kräftepaares oder das resultierende Achsenmoment:

$$\text{I.} \quad . \quad . \quad . \quad Rr = \sqrt{(Mx)^2 + (My)^2}$$

Nennt man die Winkel, welche Rr mit den Koordinatenachsen bildet, λ und μ, so ist:

$$\text{II.} \quad . \quad . \quad \begin{cases} Rr \,.\, \cos\lambda = Mx \\ \text{und} \\ Rr \,.\, \cos\mu = My \end{cases}$$

Erkl. 116. Für den Zustand des Gleichgewichts ist

$$Rr = 0$$

oder:

$$\left.\begin{matrix} Mx \\ My \end{matrix}\right\} \text{ gleichzeitig } = 0,$$

worin Mx das Drehungsbestreben um die X-Achse und My das um die Y-Achse bezeichnet.

Frage 57. In welcher Weise lassen sich drei Kräftepaare, welche in drei zueinander senkrecht liegenden Ebenen wirken, zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen?

Antwort. In derselben Weise, wie in der Antwort auf die vorige Frage 56 die auf zwei zueinander senkrechte Ebenen reduzierten Kräftepaare zu einem einzigen vereinigt wurden, in derselben Weise erhalten wir aus drei Kräftepaaren, welche in drei Ebenen liegen, von denen jede zu den beiden andern normal ist, das Moment des resultierenden Kräftepaares.

Heissen die Momente der drei gegebenen Kräftepaare Uu, Vv, Ww, so erhalten wir in diesem Falle, analog der Gleichung I). in Antw. auf Frage 56 für:

$$\text{I.} \; . \; . \; . \; Rr = \sqrt{(Uu)^2 + (Vv)^2 + (Ww)^2}$$

indem die drei Achsenmomente die Kanten eines Parallelepipedons bilden, dessen Dia-

gonale der Richtung und Grösse nach das resultierende Achsenmoment Rr liefert.

Bezeichnet man die Winkel, welche diese Diagonale mit den Kanten bildet, mit ϱ, σ und τ, so bestimmt sich die Lage derselben und damit auch die Lage der resultierenden Kräftepaarebene durch die Gleichungen:

$$\text{II.} \quad \ldots \quad \begin{cases} Rr \cdot \cos\varrho = Uu \\ Rr \cdot \cos\sigma = Vv \\ Rr \cdot \cos\tau = Ww \end{cases}$$

Erkl. 117. Umgekehrt lässt sich hiernach auch jedes Kräftepaar vom Moment Rr in drei Kräftepaare zerlegen, deren Ebenen eine solche Lage haben, dass jede derselben auf den beiden andern rechtwinklig steht.

Frage 58. In welcher Weise lassen sich beliebig viele in den verschiedensten Ebenen gelegene Kräftepaare vereinigen?

Antwort. Sollen beliebig viele, in den verschiedensten Ebenen gelegenen Kräftepaare vereinigt werden, so können auch in diesem Fall alle diejenigen Sätze und Regeln angewandt werden, welche beim Kräfte-Parallelepipedon für die Bestimmung der Resultante von mehr als zwei beliebig gegebenen einfachen Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt entwickelt wurden.

Man denke sich zunächst die Paarebenen mit sich parallel verschoben, bis sie sämtlich durch denselben Punkt 0 gehen, konstruiere in 0 die Achsenmomente, lege durch 0 ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem, zerlege jedes Achsenmoment nach Richtung der Koordinatenachsen und vereinige die so erhaltenen Komponenten in den Achsen durch algebraische Addition.

Wenn also mit M_1, $M_2 \ldots M_n$ die Momente der gegebenen Kräftepaare, mit λ_1, μ_1, $\nu_1 \ldots \lambda_n$, μ_n, ν_n die Winkel bezeichnet werden, welche deren Achsenrichtungen mit den drei Koordinatenachsen einschliessen, so erhält man, analog der Entwickelung in Antwort auf Frage 56 in Richtung der X-, Y- und Z-Achse die resp. Komponentensummen:

$$Mx = M_1 \cdot \cos\lambda_1 + M_2 \cdot \cos\lambda_2 + \ldots M_n \cdot \cos\lambda_n$$
$$My = M_1 \cdot \cos\mu_1 + M_2 \cdot \cos\mu_2 + \ldots M_n \cdot \cos\mu_n$$
$$Mz = M_1 \cdot \cos\nu_1 + M_2 \cdot \cos\nu_2 + \ldots M_n \cdot \cos\nu_n$$

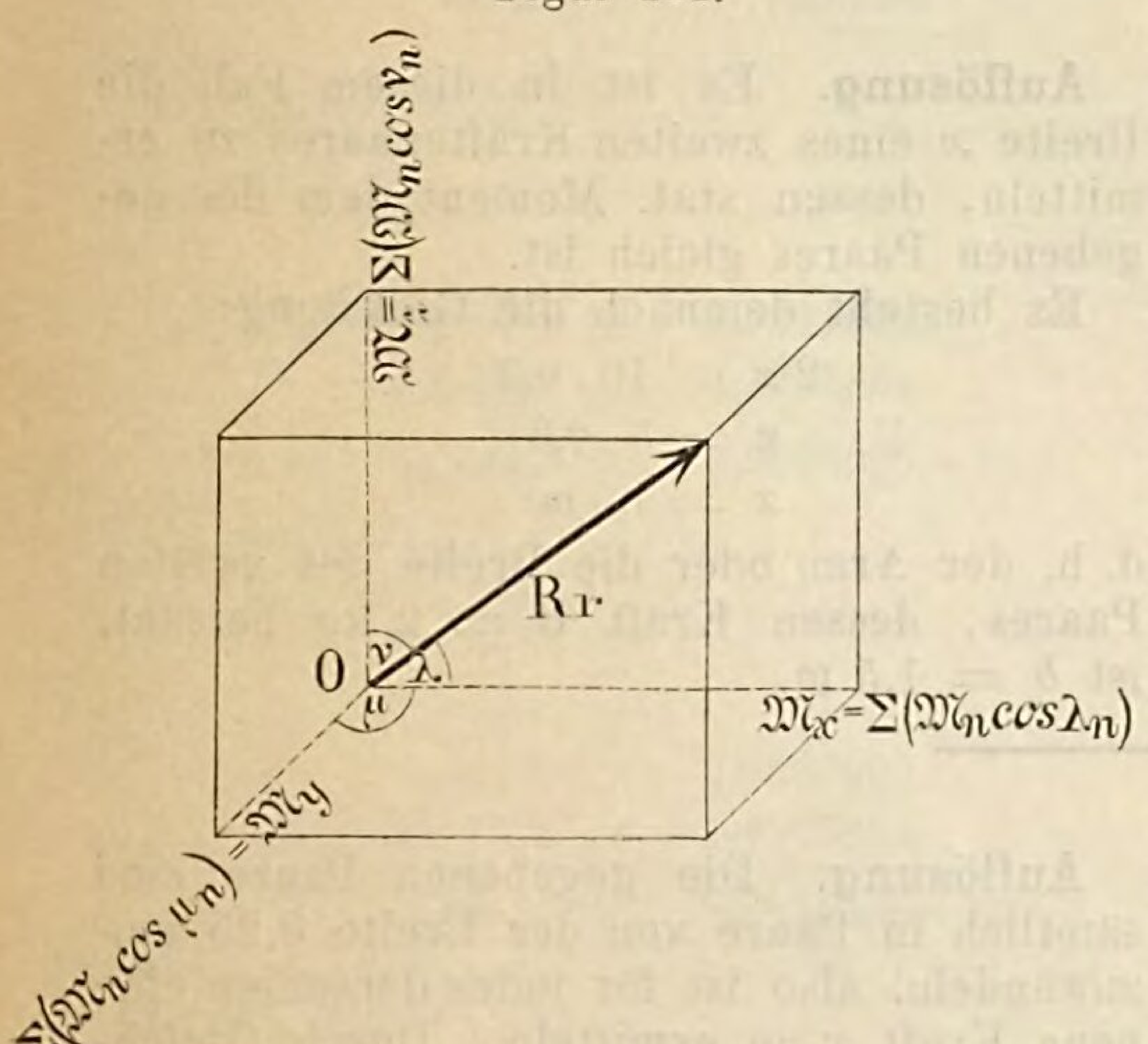
Dann ist (mit Bezug auf Figur 121) das Achsenmoment des resultierenden Kräftepaares:

$$1). \quad \ldots \quad Rr = \sqrt{(Mx)^2 + (My)^2 + (Mz)^2}$$

Die Lage desselben bestimmt sich durch die Winkel λ, μ, ν, welche es mit den drei Koordinatenachsen bildet, und wir erhalten analog den obigen Ausdrücken:

$$2). \quad \ldots \quad \begin{cases} Rr \cdot \cos\lambda = Mx \\ Rr \cdot \cos\mu = My \\ Rr \cdot \cos\nu = Mz \end{cases}$$

Figur 121.



Erkl. 118. Waren die Kräftepaare unter sich im Gleichgewicht, dann ist

$$Rr = 0$$

oder:

$$\left.\begin{matrix} Mx \\ My \\ Mz \end{matrix}\right\} \text{gleichzeitig} = 0$$

Hierbei bezeichnet Mx das Drehungsbestreben um die X-Achse oder in der YZ-Ebene, My dasselbe für die Y-Achse oder in der XZ-Ebene und Mz bezieht sich auf die Z-Achse oder auf die XY-Ebene.

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 122. Gegeben ist ein Kräftepaar $P = P_1 = 19$ kg und sein Arm $p = 56$ cm, sowie zwei parallele Gerade derselben Ebene, deren senkrechter Abstand 40 cm beträgt.

Welches sind die Kräfte, die in letzteren wirkend und zu einem Paar vereinigt, dem gegebenen Paar das Gleichgewicht halten?

Auflösung. Das Moment des gegebenen Paares ist 56 . 19, das des gesuchten Paares ist $40 . x$. Es besteht demnach für den Fall des Gleichgewichts die Gleichung:

$$40\,x = 56 . 19$$

oder:

$$x = \frac{56 . 19}{40}$$

oder:

$$x = 26{,}6 \text{ kg}$$

d. h. es ist die Kraft des Paares von der Breite von 40 cm = 26,6 kg und dieses Paar hält dem gegebenen das Gleichgewicht, wenn sein Drehungsbestreben dem des gegebenen Paares entgegengesetzt ist.

Aufgabe 123. Das Kräftepaar $A = A^1 = 10$ kg, mit dem Arm $a = 0{,}3$ m soll durch ein anderes ersetzt werden, dessen Kraft $B = 2$ kg beträgt.

Auflösung. Es ist in diesem Fall die Breite x eines zweiten Kräftepaares zu ermitteln, dessen stat. Moment dem des gegebenen Paares gleich ist.

Es besteht demnach die Gleichung:

$$2\,x = 10 . 0{,}3$$
$$x = 5 . 0{,}3$$
$$x = 1{,}5 \text{ m}$$

d. h. der Arm oder die Breite des zweiten Paares, dessen Kraft $B = 2$ kg beträgt, ist $b = 1{,}5$ m.

Aufgabe 124. Die Paare $A\,a = 18\,\text{kg} . 0{,}22$, $B\,b = 25 . 0{,}3$ und $C\,c = 29 . 0{,}15$ derselben Ebene sollen sämtlich in Paare vom Arm $p = 0{,}25$ m verwandelt und dann zusammengesetzt werden.

Auflösung. Die gegebenen Paare sind sämtlich in Paare von der Breite 0,25 umzuwandeln, also ist für jedes derselben eine neue Kraft x zu ermitteln. Durch Gleichsetzung der stat. Momente entstehen die drei Gleichungen:

$$18 . 0{,}22 = x_1 . 0{,}25$$
$$25 . 0{,}30 = x_2 . 0{,}25$$
$$29 . 0{,}15 = x_3 . 0{,}25$$

woraus man für:

$$x_1 = \frac{18 . 0{,}22}{0{,}25} \quad \text{oder:} \quad x_1 = 15{,}84 \text{ kg}$$

$$x_2 = \frac{25 . 0{,}30}{0{,}25} \quad \text{oder:} \quad x_2 = 30{,}00 \text{ kg}$$

$$x_3 = \frac{29 . 0{,}15}{0{,}25} \quad \text{oder:} \quad x_3 = 17{,}40 \text{ kg}$$

erhält. Die Summe dieser drei Einzelkräfte:

$$R = 15{,}84 + 30{,}00 + 17{,}40$$

oder:

$$R = 63{,}24 \text{ kg}$$

gibt die Kraft des neuen Paares von der Breite $r = 0{,}25$ m.

Aufgabe 125. Es sind zwei Kräftepaare gegeben, deren Ebenen einen rechten Winkel bilden. $P = 15$ kg, $p = 0{,}7$ m; $Q = 20$ kg, $q = 0{,}4$ m. Dieselben sollen durch ein einziges Kräftepaar ersetzt werden; welches ist die Grösse und Richtung desselben?

Hilfsrechnungen:

1). . . $\sqrt{174{,}75} = \frac{1}{2} \cdot \log 174{,}25$

$\log 174{,}25 = 2{,}2411728 \cdot \frac{1}{2}$

$\log Rr = 1{,}1205864$

mithin:

num-log $Rr = 13{,}2$

2). $\log 10{,}5 = 1{,}0211893$

$-\log 13{,}2 = -1{,}1205864$

$\log \cos \beta = 9{,}9006029-10$

mithin:

$\beta = 52^0\,41'\,50''$

3). $\log 8 = 0{,}9030900$

$-\log 13{,}2 = -1{,}1205864$

$\log \cos \gamma = 9{,}7825036-10$

mithin:

$\gamma = 37^0\,18'\,10''$

Auflösung. Nach der in der Erkl. 114 gegebenen Formel ist:

$$Rr = \sqrt{(Pp)^2 + (Qq)^2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, so ist:

$$Rr = \sqrt{10{,}5^2 + 8^2}$$

(denn $15 \,.\, 0{,}7 = 10{,}5$ und $20 \,.\, 0{,}4 = 8$)

oder:

$$Rr = \sqrt{110{,}25 + 64}$$

oder.

$$Rr = \sqrt{174{,}25}$$

oder:

$$Rr = 13{,}2 \quad \text{(s. Hilfsrechn. 1)}$$

Steht nun beispielsweise eine Kraft von 25 kg zur Verfügung, so ist der Arm des resultierenden Kräftepaares:

$$r = \frac{13{,}2}{25}$$

oder:

$$r = 0{,}528 \text{ m}$$

zu nehmen, oder ist andernfalls etwa der Arm z. B. 0,85 m gegeben, so muss an demselben jederseits eine Kraft:

$$R = \frac{13{,}2}{0{,}85} = 15{,}53 \text{ kg}$$

angreifen.

Bezeichnet man die Winkel, welche die Ebene des resultierenden Paares mit den gegebenen Ebenen bildet, mit β resp. γ, so ist (nach der in Erkl. 114 gegebenen Formel):

$$\cos \beta = \frac{Pp}{Rr}$$

oder:

$$\cos \beta = \frac{10{,}5}{13{,}2}$$

woraus:

$$\beta = 52^0\,41'\,50'' \quad \text{(s. Hilfsrechn. 2)}$$

Desgleichen ist:

$$\cos \gamma = \frac{Qq}{Rr}$$

oder:

$$\cos \gamma = \frac{8}{13{,}2}$$

woraus man für:

$$\gamma = 37^0\,18'\,10'' \quad \text{(s. Hilfsrechn. 3)}$$

erhält, wodurch die Richtung der Ebene des resultierenden Paares bestimmt ist.

Aufgabe 126. Zwei Kräftepaare $P = 85$ kg, $p = {}^2/_3$ m und $Q = 36$ kg, $q = {}^1/_2$ m, deren Ebenen einen Winkel von $62^0\,40'$ miteinander bilden, sollen durch ein einziges Paar ersetzt werden. Welches ist die Grösse und Richtung desselben?

Auflösung. Das Moment des ersten Paares:

$$Pp = 85 \cdot \frac{2}{3}$$

oder:

$$Pp = 56\frac{2}{3}$$

Hilfsrechnungen:

1). . . . $56\frac{2}{3}\cdot 56\frac{2}{3} = \frac{170\,.\,170}{3\,.\,3} = \frac{170\,.\,170}{} = 28900 : 9 = 3211\frac{1}{9};$

$\frac{18\,.\,18}{} = 324;\quad \frac{2\,.\,170\,.\,18}{3} = 2040$

2). $\log 2040 = 3{,}3096302$
$+\log\cos 62^0\,40' = 9{,}6619702-10$
$\log 2040\,.\,\cos 62^0 40' = 2{,}9716004$
mithin: $2040\,.\cos 62^0 40' = 936{,}70$

3211,1
324
936,7

$\sqrt{4471{,}8} = \frac{1}{2}\cdot\log 4471{,}8$

3). . . . $\log 4471{,}8 = 3{,}6504824\cdot\frac{1}{2}$
$\log Rr = 1{,}8252412$
mithin: num-log $Rr = 66{,}87$

4). $\log 18 = 1{,}2552725$
$+\log\sin 62^0 40' = 9{,}9485842$
$1{,}2038567$
$-\log 66{,}87 = -1{,}8252412$
$\log\sin\beta = 9{,}3786155-10$
mithin: $\beta = 13^0\,50'$

5). $\log 56{,}67 = 1{,}7533532$
$+\log\sin 62^0\,40' = 9{,}9485842$
$1{,}7019374$
$-\log 66{,}87 = 1{,}8252412$
$\log\sin\gamma = 9{,}8766962$
mithin: $\gamma = 48^0\,50'$

das Moment des zweiten Paares:

$$Qq = 36\cdot\frac{1}{2}$$

oder:

$$Qq = 18$$

Nach Formel 1). in Antw. auf Frage 55 ist das Moment des resultierenden Paares:

$$Rr = \sqrt{(56\tfrac{2}{3})^2 + 18^2 + 2\,.\,56\tfrac{2}{3}\cdot 18\,.\cos 62^0 40'}$$

oder:

$$Rr = \sqrt{3211\tfrac{1}{9} + 324 + 2040\,.\cos 62^0\,40'}$$ (s. Hilfsrechn. 1)

oder:

$$Rr = \sqrt{4471{,}8}$$ (s. Hilfsrechn. 2)

oder:

$$Rr = 66{,}87$$ (s. Hilfsrechn. 3)

Nach Formel 2). in Antw. auf Frage 55 ist, wenn man mit β resp. γ die Winkel bezeichnet, welche die Ebene des resultierenden Paares mit den gegebenen Paarebenen bildet:

$$\sin\beta = \frac{Qq\,.\sin\alpha}{Rr}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$\sin\beta = \frac{18\,.\sin 62^0 40'}{66{,}87}$$

oder:

$$\beta = 13^0 50'$$ (s. Hilfsrechn. 4)

In gleicher Weise erhält man für:

$$\sin\gamma = \frac{Pp\,.\sin\alpha}{Rr}$$

oder:

$$\sin\gamma = \frac{56\frac{2}{3}\cdot\sin 62^0 40'}{66{,}87}$$

oder:

$$\gamma = 48^0 50'$$ (s. Hilfsrechn. 5)

NB. Da nach Antwort auf Frage 56—58 bei der Zusammensetzung von beliebigen Kräftepaaren in den verschiedensten Ebenen dasselbe Verfahren anzuwenden ist, wie bei der Zusammensetzung beliebiger, auf einen Punkt wirkender einfacher Kräfte, so bedürfen diese Fälle keiner weiteren Illustration durch Aufgaben.

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 127. Es soll ein Kräftepaar:

$$P = 75 \text{ kg und } p = 120 \text{ cm}$$

ersetzt werden durch ein solches von der Breite von 80 cm; wie gross ist die Kraft des letzteren?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt in analoger Weise wie die der gelösten Aufgabe 122.

Aufgabe 128. Ein Kräftepaar, dessen Kraft P = 340 kg und dessen Arm = 90 cm, soll durch ein anderes ersetzt werden, dessen Kraft Q = 290 kg beträgt. Wie gross muss der Arm desselben genommen werden?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt in analoger Weise wie die der gelösten Aufgabe 123.

Aufgabe 129. Vier Paare von der Grösse

$P_I = 14$ kg $\quad p_I = 0{,}8$ m

$P_{II} = 5$ „ $\quad p_{II} = 1{,}1$ „

$P_{III} = 8$ „ $\quad p_{III} = 0{,}8$ „

$P_{IV} = 12$ „ $\quad p_{IV} = 0{,}6$ „

und in derselben Ebene liegend, sollen sämtlich in Paare von dem Arm $p = 0{,}95$ verwandelt und dann zu einem resultierenden Paar vereinigt werden. Wie gross ist die Kraft des resultierenden Paares?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt in analoger Weise wie die der gelösten Aufgabe 124.

Aufgabe 130. Zwei Kräftepaare, deren Ebenen sich unter einem rechten Winkel schneiden, sollen zu einem resultierenden Paar vereinigt werden. Welches ist die Grösse und Richtung desselben, wenn P = 12, $p = 0{,}7$ und Q = 60, $q = 0{,}2$ ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt in analoger Weise wie die der gelösten Aufgabe 125.

Aufgabe 131. Zwei Kräftepaare, P = 56 kg, $p = 1{,}3$ m und Q = 44 kg, $q = 0{,}9$ m, deren Ebenen einen Winkel von 47° bilden, sollen durch ein einziges Paar ersetzt werden. Welches ist die Grösse und Richtung desselben?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt in analoger Weise wie die der gelösten Aufgabe 126.

8). Ueber die Vereinigung von Kräften, welche an beliebig vielen, fest miteinander verbundenen Punkten nach den verschiedensten Richtungen wirksam sind.

a. Ueber die Vereinigung von Kräften, die nach beliebigen Richtungen in einer Ebene wirken.

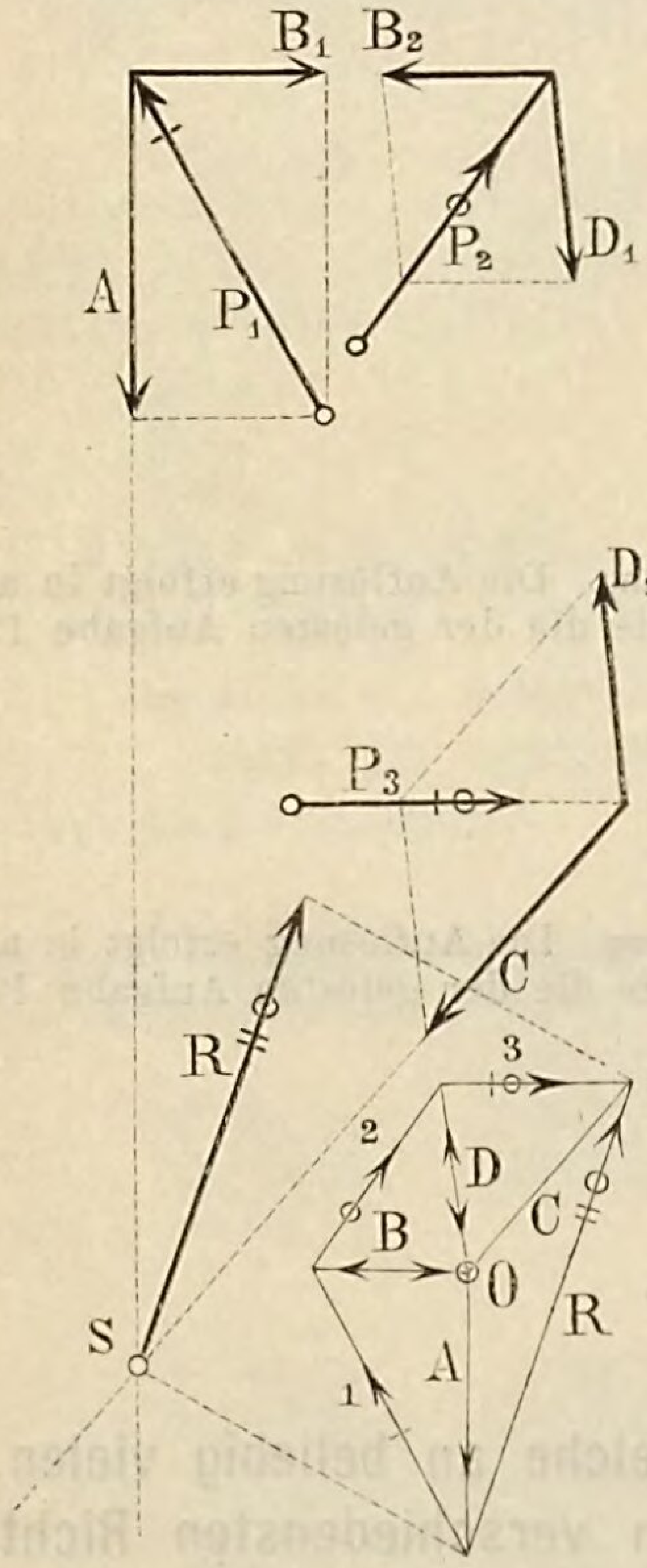
Frage 59. Wie kann man im allgemeinen verfahren, um mehrere Kräfte einer Ebene zu einer Resultante zu vereinigen?

Erkl. 119. Die Untersuchung über den Gleichgewichtszustand von Körpern, auf welche mehrere verschieden gerichtete Kräfte in verschiedenen Punkten angreifen, wird durch die Berechnung der statischen Momente, sowie durch die Kräftepaare wesentlich vereinfacht.

Antwort. Sind mehrere Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten vorhanden, so vereinige man zunächst zwei miteinander in der Weise, wie es bereits in dem Abschnitt „Ueber die statischen Momente“ gezeigt wurde; die so erhaltene Resultante verbinde man mit der dritten gegebenen Kraft zu einer neuen Resultante und fahre so fort, bis man schliesslich zu einer Resultante oder zu einem Kräftepaar gelangt.

Frage 60. Wie kann man drei oder mehr Kräfte durch Konstruktion zu einer Resultante vereinigen?

Figur 122.



Antwort. Sollen drei oder mehr Kräfte durch Konstruktion zu einer Resultante R zusammengesetzt werden, so geschieht dies am einfachsten durch Bildung eines sogen. Kräftepolygons.

Sollen z. B. die drei Kräfte P_1, P_2, P_3 in Figur 122 zu einer Resultante vereinigt werden, so zerlege man dieselben durch Konstruktion entsprechender Parallelogramme, deren eine Diagonale gleich der gegebenen Kraft sein muss, in je zwei Komponenten, derart, dass die Komponente $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$ wird.

Man wähle nun einen willkürlichen Punkt 0, den Pol und lege an denselben statt der Kraft P_1 ihre beiden Komponenten A und B_1, anstatt der Kraft P_2 ihre Komponenten B_2 und D_1, und anstatt der Kraft P_3 ihre Komponenten D_2 und C.

Da nun B_1 mit B_2 und D_1 mit D_2 im Gleichgewicht ist, so werden die drei gegebenen Kräfte durch zwei, nämlich durch A und C ersetzt, deren Schnittpunkt S ein Punkt der Resultante R ist.

Die Kraftlinien A, B, D, C bilden ein Polygon (Vieleck), das Seilpolygon, so genannt, weil ein biegsames Seil unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3 und der Kräfte A und C im Gleichgewicht ist, wenn es die Form jenes Polygons angenommen hat.

Gleichwie die Seiten 1, 2, 3 des Polygons den gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3 entsprechen, so entspricht die vierte Seite der Resultante R, welche parallel mit sich nach dem Schnittpunkt S gerückt werden kann.

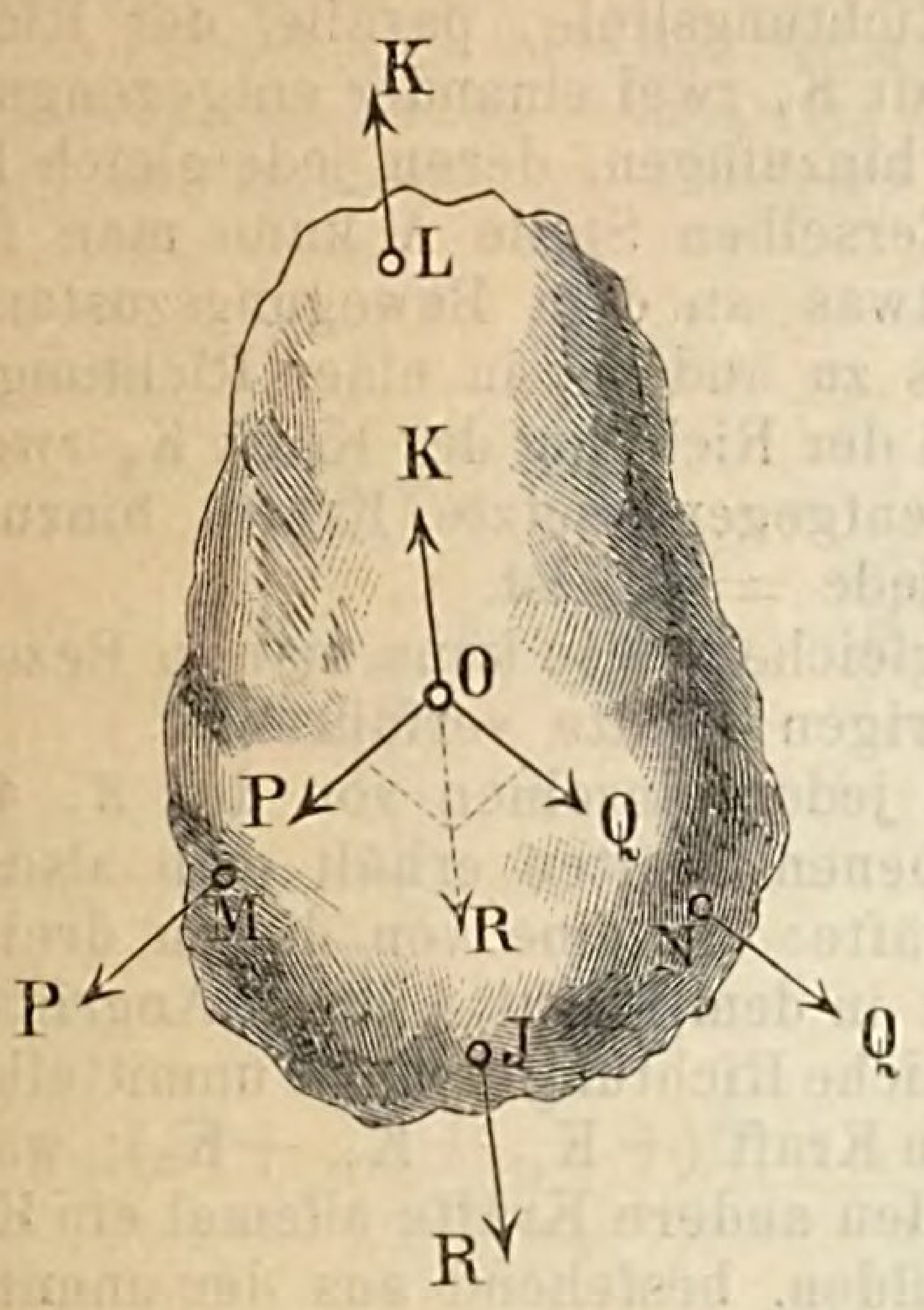
Auf diese Weise lassen sich beliebige Kräfte am starren Körper, welche in derselben Ebene liegen, durch zwei Kräfte A und C ersetzen, und falls diese sich schneiden, durch eine einzige.

Im Gleichgewicht kann das ebene Kräftesystem nur dann sein, wenn die ersetzenden Kräfte A und C entgegengesetzt gleich sind und in derselben Kraftlinie wirken.

Frage 61. Was kann man in Bezug auf die Richtungslinien und Grössen mehrerer an verschiedenen Punkten eines Körpers wirkenden Kräfte aussagen, wenn sich dieselben das Gleichgewicht halten?

Antwort. Wenn drei Kräfte einen Körper im Gleichgewicht halten, so schneiden ihre Richtungslinien einander in einem Punkt und ihre Grössen verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Figur 123.



Erkl. 120. Eine Störung des Gleichgewichtszustandes tritt auch dann nicht ein, wenn die beiden Kräfte P und Q durch ihre Resultante R ersetzt werden, siehe Fig. 123, und wenn als Angriffspunkt dieser letzteren statt des Punktes O irgend ein anderer in ihrer Richtungslinie liegender Punkt J gewählt wird. Die in den Punkten M und N wirkenden Kräfte P und Q haben daher genau dieselbe Wirkung, wie die in dem Punkt J wirkende Kraft R. Es kann somit von der Mittelkraft zweier Kräfte auch dann noch die Rede sein, wenn die Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten wirken.

Wie nun die beiden, an gemeinschaftlichem Angriffspunkt O wirkenden Kräfte P und Q ersetzt werden können durch die resp. in den Punkten M und N wirkenden Kräfte P und Q, so können auch umgekehrt diese letzteren ersetzt werden durch die ersteren und es ergibt sich also auch auf diesem Weg die schon bei den statischen Momenten erörterte Regel über die Vereinigung von zwei beliebig gerichteten Kräften einer Ebene:

Man verlege die Angriffspunkte der zwei an verschiedenen Punkten wirkenden gegebenen Kräfte an den Durchschnittspunkt ihrer Richtungslinien und wende alsdann die für die Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt geltenden Regeln an.

Die Richtigkeit dieses „Satzes von den drei Kräften“, welcher mehrfach zur Lösung von Aufgaben benutzt wird, ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Nach Satz 5 und Erkl. 14 in Antwort auf Frage 11 kann man für drei, an gemeinschaftlichem Angriffspunkt einander das Gleichgewicht haltende Kräfte K, P, Q statt des gemeinschaftlichen Angriffspunktes O, siehe Figur 123, auch die in ihren Richtungslinien liegenden und zu demselben System gehörigen Punkte L, M, N als Angriffspunkte wählen, ohne dass in der Wirkung der Kräfte etwas geändert wird.

Die Anwendung des in Erkl. 64 erörterten Satzes, „dass sich drei, einander das Gleichgewicht haltende Kräfte verhalten wie die Sinuszahlen der gegenüberliegenden Winkel“ auf die nun nicht mehr an gemeinschaftlichem Angriffspunkt wirkenden drei Kräfte führt zu dem oben angeführten Satz von den drei Kräften.[1])

[1]) Siehe Erkl. 120.

Frage 62. Wie kann man beliebig viele in einer Ebene an verschiedenen Punkten wirkende Kräfte zu einer Mittelkraft in einem beliebigen Angriffspunkt und zu einem Kräftepaar zusammensetzen?

Antwort. Es seien die an den Angriffspunkten P_1, $P_2 \ldots P_n$ auf ein System unveränderlich verbundener materieller Punkte wirkenden Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ gegeben.

Ohne in der Wirkung dieser Kräfte etwas zu ändern, kann man an irgend einem be-

liebig gewählten Punkt A des Systems in einer Richtungslinie, parallel der Richtung der Kraft K_1 zwei einander entgegengesetzte Kräfte hinzufügen, deren jede gleich K_1 ist.

An derselben Stelle A kann man ferner, ohne etwas an dem Bewegungszustand des Körpers zu ändern, in einer Richtungslinie, parallel der Richtung der Kraft K_2 zwei einander entgegengesetzte Kräfte hinzufügen, deren jede $= K_2$ ist.

Auf gleiche Weise kann man in Bezug auf alle übrigen Kräfte verfahren.

Statt jeder einzelnen von den 3, 4 oder n gegebenen Kräften erhält man alsdann je drei Kräfte: die eine von diesen drei Kräften hat in dem Punkt A ihren Angriffspunkt und gleiche Richtung mit der unmittelbar gegebenen Kraft ($+K_1$, $+K_2$, $+K_n$); während die beiden andern Kräfte allemal ein Kräftepaar bilden, bestehend aus der unmittelbar gegebenen Kraft und der gleich grossen parallel entgegengesetzten Kraft in dem Punkt A. (So bilden in Fig. 124 $K_1 - K_1$, $K_2 - K_2$, $K_n - K_n$ Kräftepaare mit den Momenten $K_1 l_1$, $K_2 l_2$, $K_n l_n$.)

Man erhält also im ganzen 3, 4 oder n einfache Kräfte von bekannter Richtung und Grösse an dem gemeinschaftlichen Angriffspunkt A, und ausserdem 3, 4 oder n Kräftepaare, deren Momente und Achsenrichtungen aus der Lage des willkürlich gewählten Punktes A und aus den gegebenen Kräften zu bestimmen sind.

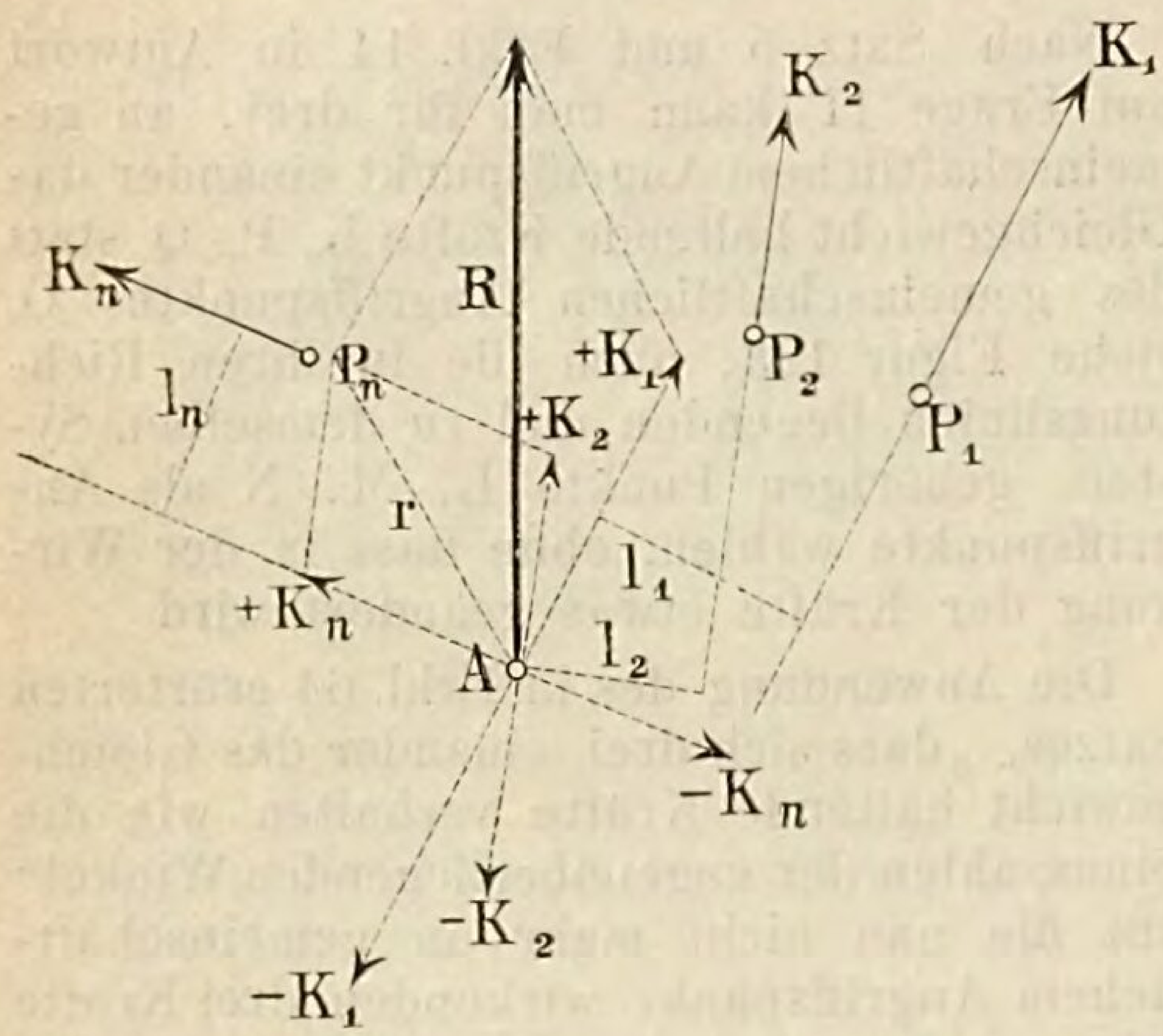
Die 3, 4 oder n einfachen Kräfte $+K_1$, $+K_2$, $+K_n$ können durch ihre Mittelkraft R ersetzt werden und jene 3, 4 oder n Kräftepaare lassen sich nach den im vorigen Abschnitt gefundenen Regeln durch Addition (bei entgegengesetztem Sinn durch Subtraktion) zu einem resultierenden Kräftepaar $(X - X)$ mit dem Moment:

$$Xx = K_1 l_1 \pm K_2 l_2 \pm K_n l_n$$

vereinigen.

Diese Summe ist aber das statische Moment der Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ in Bezug auf den Punkt A.

Figur 124.



Erkl. 121. Aus nebenstehender Antwort lassen sich folgende Sätze ableiten:

1). Sind die gegebenen Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ parallel, so findet man die Mittelkraft durch Addition der Kräfte bei übereinstimmender, durch Subtraktion bei entgegengesetzter Richtung derselben.

2). Wird die Resultante $R = 0$, so findet in Bezug auf fortschreitende Bewegung Gleichgewicht statt; die Kräfte setzen sich alsdann nur zu einem einzigen Kräftepaar zusammen. Ist das Moment $\overline{Xx}$, siehe Fig. 125, dieses Paares ebenfalls $= 0$, so findet auch in Bezug auf drehende Bewegung Gleichgewicht statt.

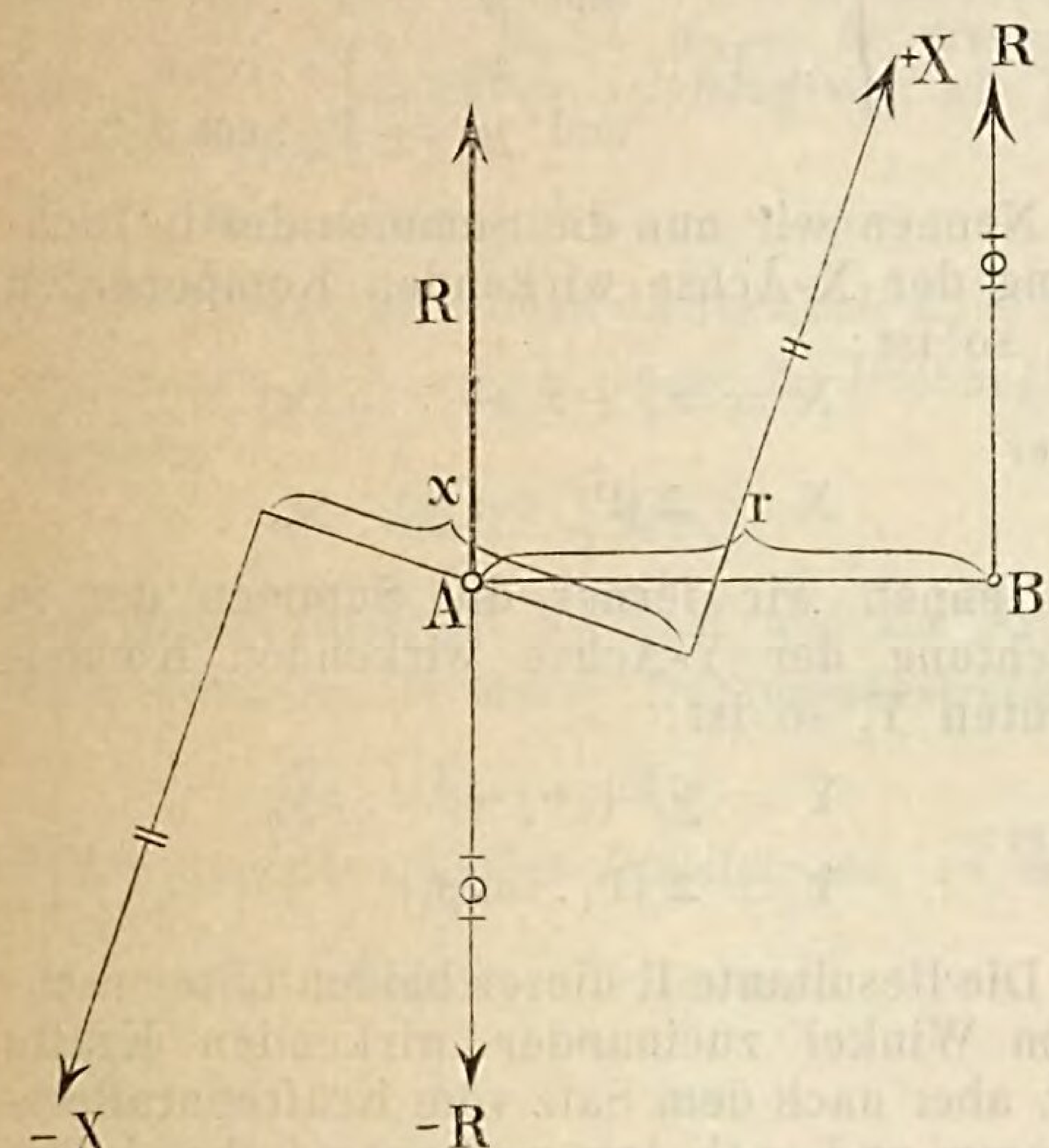
Frage 63. Wenn man nun in der, in Antw. auf die vorige Frage erörterten Weise die gegebenen Kräfte auf eine Kraft und auf ein Kräftepaar reduziert hat, ist dann noch eine weitere Vereinigung zwischen diesen heterogenen[1]) Elementen der Mechanik möglich und wie lässt sich die gemachte Aussage beweisen?

Antwort. Hat man die gegebenen Kräfte auf eine Resultante R und auf ein resultierendes Paar vom Moment Xx reduziert, so lassen sich sämtliche gegebenen Kräfte K_1, $K_2 \ldots K_n$ durch diese Mittelkraft R ersetzen mit einer Angriffslinie, deren Ab-

[1]) Siehe Erkl. 122.

Erkl. 122. Heterogén (vom griech. hetero, anders ..., fremd ..., entgegengesetzt) heisst so viel wie ungleichartig, fremdartig, verschiedenartig, im Gegensatz zu homogen, gleichartig.

Figur 125.



Erkl. 123. Aus der nebenstehenden Antwort ergeben sich folgende Sätze:

1). Man darf eine Kraft R parallel mit ihrer Richtung von B nach A verschieben, muss aber dabei das sich bildende Kräftepaar vom Moment Rr mit in Rechnung bringen.

2). Ist ein Punkt der Kräfteebene fest, so konstruiere man für diesen Punkt die Resultante und das resultierende Kräftepaar. Die Mittelkraft R wird durch den Gegendruck des festen Punktes aufgehoben; es genügt daher zum Gleichgewicht, wenn das Moment des resultierenden Kräftepaares oder die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf den festen Punkt = 0 ist.

stand von jedem Punkt in der Ebene gefunden wird, wenn man die Summe der statischen Momente der Seitenkräfte ($K_1 l_1 + K_2 l_2 + \ldots K_n l_n$) in Bezug auf diesen Punkt durch die Mittelkraft R teilt.

Beweis. Es sei die Resultante in dem beliebigen Punkt A, Figur 125, gleich R, das statische Moment der Seitenkräfte in Bezug auf denselben Punkt $K_1 l_1 \pm K_2 l_2 \ldots \pm K_n l_n$, und das resultierende Kräftepaar (X — X) habe das Moment Xx, so ist:

$$Xx = K_1 l_1 \pm K_2 l_2 \pm \ldots . K_n l_n$$

Man verändere nun das Paar vom Moment Xx in der Weise, dass es zur Kraft die vorhandene Resultante R erhalte.

Der dazugehörige Arm r bestimmt sich dabei durch die Gleichung:

$$Xx = Rr$$

oder:

$$r = \frac{Xx}{R}$$

Dieses veränderte Paar verschiebe man in der Ebene dergestalt, dass eine seiner Kräfte die im Punkt A angreifende bekannte Kraft R vernichte.

Es bleibt dann in der Entfernung r im Punkt B eine Kraft übrig, welche gleich und parallel der ursprünglichen Kraft R und auch nach derselben Richtung wie diese wirksam ist, bloss mit sich parallel um die Breite r des veränderten Paares verschoben.

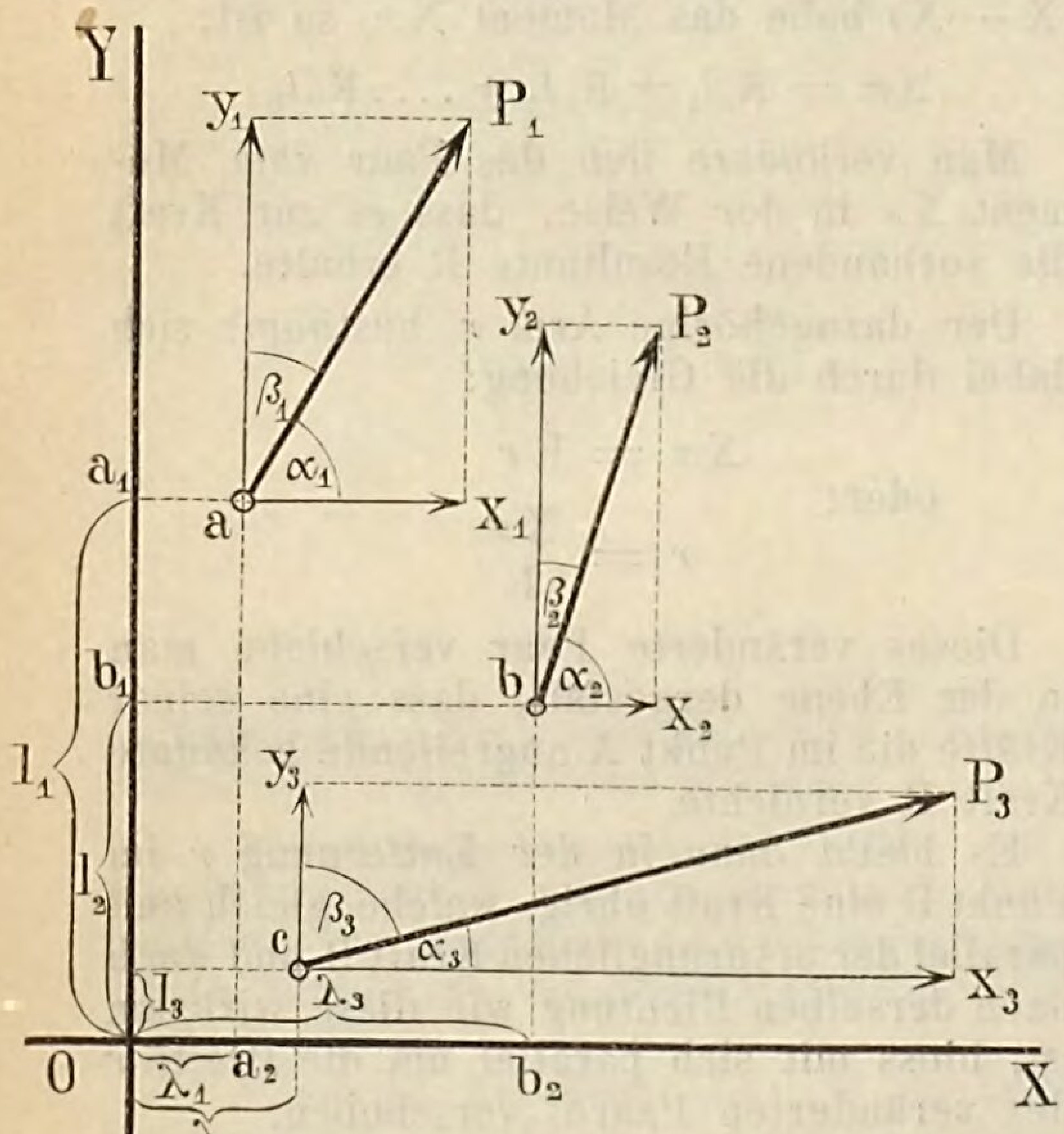
Dieser Satz wird auch so ausgedrückt:

Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Kräfteebene ist gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte.

Frage 64. Wie kann man mehrere Kräfte einer Ebene, die an verschiedenen Punkten nach verschiedenen Richtungen wirksam sind, unter Zuhilfenahme eines rechtwinkligen Koordinatensystems vereinigen?

Antwort. Man zerlege jede der gegebenen Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_n$, siehe Figur 126, nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte, welche mit den beiden Achsen $\overline{OX}$ und $\overline{OY}$ parallel laufen.

Figur 126.



Wird die Richtung der gegebenen Kräfte durch die Winkel $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2 \ldots . \alpha_n \beta_n$ bezeichnet, die sie mit den Koordinatenachsen bilden, so erhält man für die gegebenen Kräfte die resp. Komponenten:

$$
1). \ldots \left\{ \begin{array}{lrl}
\text{für } P_1: & x_1 & = P_1 . \cos \alpha_1 \\
& \text{und } y_1 & = P_1 . \cos \beta_1 \\
\text{„ } P_2: & x_2 & = P_2 . \cos \alpha_2 \\
& \text{und } y_2 & = P_2 . \cos \beta_2 \\
\text{„ } P_n: & x_n & = P_n . \cos \alpha_n \\
& \text{und } y_n & = P_n . \cos \beta_n
\end{array} \right.
$$

Nennen wir nun die Summen der in Richtung der X-Achse wirkenden Komponenten X, so ist:

$$X = x_1 + x_2 + \ldots . x_n$$

oder:

$$X = \Sigma (P_1 . \cos \alpha_1)$$

Nennen wir ferner die Summen der in Richtung der Y-Achse wirkenden Komponenten Y, so ist:

$$Y = y_1 + y_2 + \ldots . y_n$$

oder:

$$Y = \Sigma (P_1 . \cos \beta_1)$$

Die Resultante R dieser beiden unter rechtem Winkel zueinander wirkenden Kräfte ist aber nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm und nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

oder:

$$2). \ldots R = \sqrt{(\Sigma . P_1 . \cos \alpha_1)^2 + (\Sigma . P_1 . \cos \beta_1)^2}$$

wodurch das Bestreben der gegebenen Kräfte auf fortschreitende Bewegung ausgedrückt ist.

Denkt man sich die Angriffspunkte *a*, *b*, *c* etc. der gegebenen Kräfte P_1, $P_2 \ldots . P_n$ mit dem Schnittpunkt 0 des rechtwinkligen Koordinatensystems fest verbunden, so wohnt den gegebenen Kräften in Bezug auf den Punkt 0 ein Drehungsbestreben inne, welches (nach früheren Erörterungen) gemessen wird durch das Produkt aus der gegebenen Kraft und ihrem senkrechten Abstand vom Drehpunkt 0.

Nehmen wir wieder anstatt der gegebenen Kräfte P_1, $P_2 \ldots .$ ihre Komponenten $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots$ und bezeichnen wir die senkrechten Abstände der Angriffspunkte *a*, *b*, *c*, von der X-Achse mit l_1, l_2, l_3 und von der Y-Achse mit λ_1, λ_2, λ_3, so ist das Drehungsbestreben oder das statische Moment:

$$
\begin{array}{llll}
\text{von } x_1 = x_1 l_1 & & \text{von } y_1 = y_1 \lambda_1 \\
\text{„ } x_2 = x_2 l_2 & & \text{„ } y_2 = y_2 \lambda_2 \\
\text{„ } x_n = x_n l_n & & \text{„ } y_n = y_n \lambda_n
\end{array}
$$

Erkl. 124. Wirkt in einem festen Punkt O eine Kraft M in einer Entfernung $\overline{Oc} = m$ siehe Fig. 127, rechts oder links drehend auf einen Körper, so wird offenbar dasselbe geleistet, wenn man die gegebene Kraft M durch zwei andere Kräfte $K_1 = K_2 = M$ ersetzt, deren jede in demselben Drehungssinn wie M in einer Entfernung

$$\overline{Oa} = \overline{Ob} = \frac{1}{2}\overline{Oc} = \frac{1}{2}m$$

von Punkt O angreift; denn da die Kraft $K_1 = M$ und ihr Arm $\overline{aO} = \frac{1}{2}m$, so ist ihr Drehungsbestreben

$$K_1 . \overline{aO} = \frac{1}{2}\overline{Mm}$$

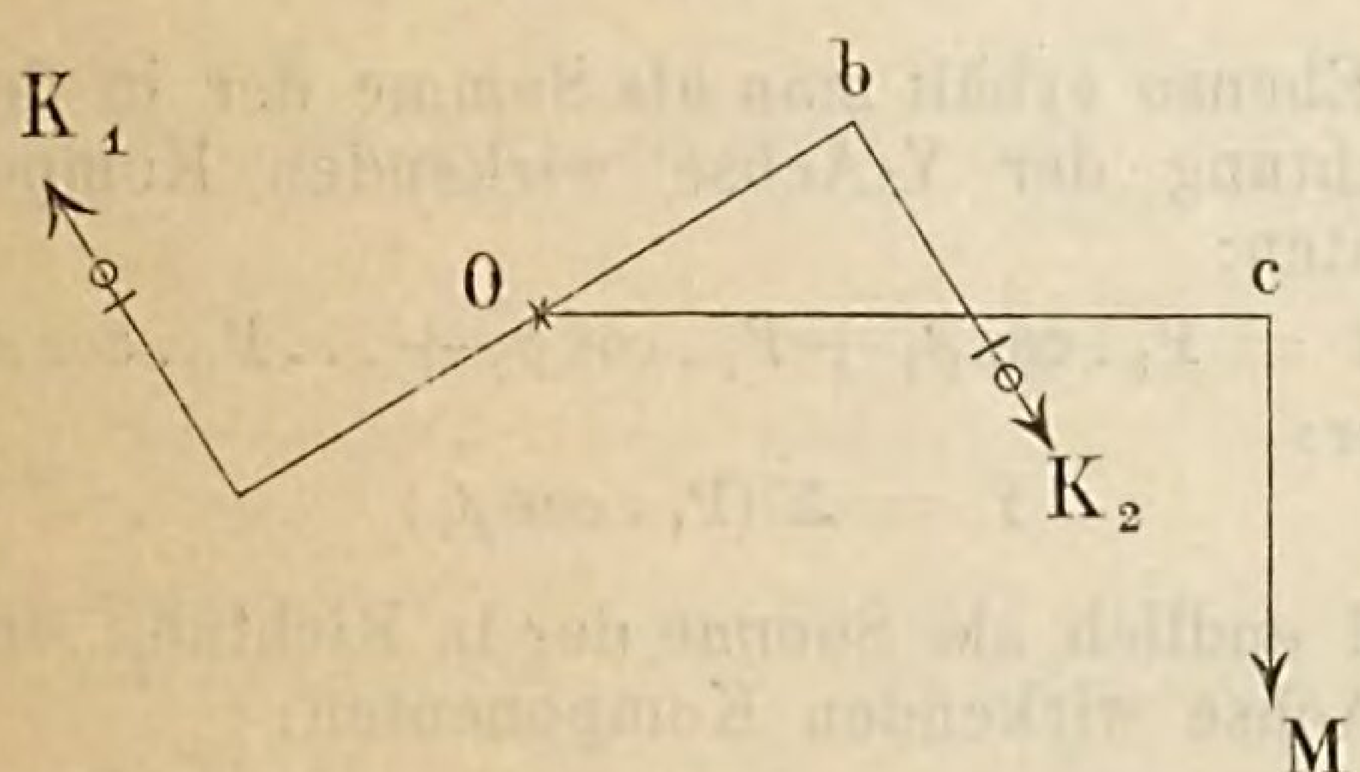
Da ferner die Kraft $K_2 = M$ und ihr Arm $\overline{Ob} = \frac{1}{2}m$, so ist deren Drehungsbestreben

$$K_2 . \overline{Ob} = \frac{1}{2}\overline{Mm};$$

addiert man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$K_1 . \overline{aO} + K_2 . \overline{bO} = \overline{Mm}$$

Figur 127.



Setzen wir für $x_1 x_2 \ldots . y_1 y_2$ aus obiger Gleich. 1). deren Werte ein, so sind die statischen Momente der einzelnen Komponenten:

$$P_1 . \cos\alpha_1 l_1 + P_2 . \cos\alpha_2 l_2 + \ldots P_n . \cos\alpha_n l_n$$
$$P_1 . \cos\beta_1 \lambda_1 + P_2 . \cos\beta_2 \lambda_2 + \ldots P_n . \cos\beta_n \lambda_n$$

Da nun das Drehungsbestreben der Komponenten $x_1 x_2 \ldots$ im allgemeinen dem Drehungsbestreben der Komponenten $y_1 y_2 \ldots .$ entgegengesetzt gerichtet ist (was um so deutlicher hervortritt, wenn man sich x_1 von a nach a_1, x_2 von b nach b_1 u. s. w. verlegt denkt), so erhält man als Gesamtdrehungsbestreben der gegebenen Kräfte:

$$Mm = \Sigma P_1 . \cos\alpha_1 l_1 - \Sigma P . \cos\beta_1 \lambda_1$$

oder

$$3). \ldots Mm = \Sigma P_1 (\cos\alpha_1 l_1 - \cos\beta_1 . \lambda_1)$$

Da diese Drehungsgrösse nach nebenstehender Erklärung als ein Kräftepaar angesehen resp. in ein solches umgewandelt werden kann und da dieses Kräftepaar mit der resultierenden Kraft R in derselben Ebene liegt, so ist eine Vereinigung beider nach Antwort auf Frage 63 möglich.

Es entsteht dadurch die mit R gleichgerichtete und ihr an Grösse gleiche Kraft R, wirkend an dem Arm r, d. h. um die Entfernung r von 0 aus gerechnet, parallel mit sich selbst verschoben, wobei r durch die Gleichung $Mm = Rr$ bestimmt werden muss; daraus folgt, dass:

$$Rr = \Sigma P_1 (\cos\alpha_1 l_1 - \cos\beta_1 \lambda_1)$$

oder

$$4). \ldots . r = \frac{\Sigma P_1 (\cos\alpha_1 l_1 - \cos\beta_1 \lambda_1)}{R}$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Resultante R mit den beiden Koordinatenachsen bildet, mit ϱ und σ, so wird (analog der Gleichung F). und G). in Auflösung der Aufgabe 13) die Richtung der Resultante bestimmt durch die Gleichungen:

$$5). \ldots \cos\varrho = \frac{X}{R} \quad \text{und} \quad \cos\sigma = \frac{Y}{R}$$

und kann jeder Punkt derselben als Angriffspunkt angenommen werden.

Da nach obiger Entwickelung:

$$Mm \text{ oder } Rr = \Sigma P_1 (\cos\alpha_1 l_1 - \cos\beta_1 \lambda_1)$$

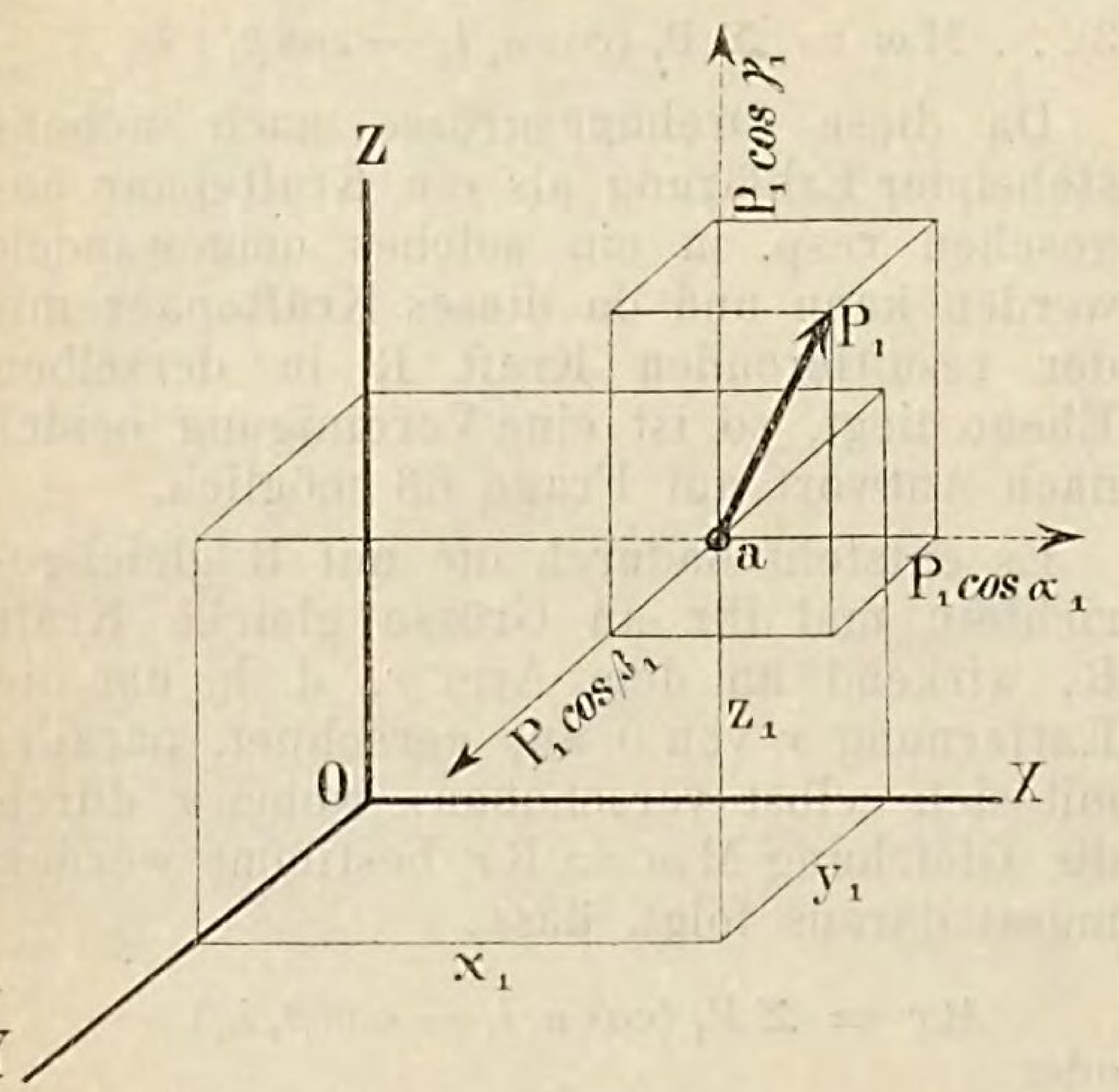
ist, so gilt auch für diesen Fall der Satz:

Für jeden beliebigen Punkt 0 ist das Moment der Resultante gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte.

b. Ueber die Vereinigung von Kräften, die an beliebig vielen Punkten nach den verschiedensten Richtungen im Raum wirken.

Frage 65. Wie kann man beliebig viele, an verschiedenen Punkten nach verschiedenen Richtungen im Raum wirkende Kräfte unter Zuhilfenahme eines rechtwinkligen dreiachsigen Koordinatensystems vereinigen?

Figur 128.



Antwort. Man zerlege, ganz analog dem Verfahren in Antw. auf Frage 64 jede der gegebenen Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ nach dem Satz vom Parallelepipedon in drei zueinander senkrechte Seitenkräfte, welche mit den drei Koordinatenachsen $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ und $\overline{OZ}$ parallel laufen, siehe Figur 128.

Wird die Richtung der gegebenen Kräfte wieder durch die Winkel $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots \alpha_n \beta_n \gamma_n$ mit den drei Koordinatenachsen bestimmt, so erhält man für die in a angreifende gegebene Kraft P_1 die drei Komponenten $P_1 . \cos\alpha_1$, $P_1 . \cos\beta_1$ und $P_1 . \cos\gamma_1$.

Desgleichen erhält man für eine zweite in b angreifende gegebene Kraft P_2 die drei Komponenten $P_2 . \cos\alpha_2$, $P_2 . \cos\beta_2$ und $P_2 . \cos\gamma_2$, und für eine nte Kraft P_n erhält man $P_n . \cos\alpha_n$, $P_n . \cos\beta_n$ und $P_n . \cos\gamma_n$.

Nennt man nun die Summe der in der Richtung der X-Achse wirkenden Komponenten X, so ist:

$$X = P_1 . \cos\alpha_1 + P_2 . \cos\alpha_2 + \ldots P_n . \cos\alpha_n$$

oder

$$X = \Sigma (P_1 . \cos\alpha_1)$$

Ebenso erhält man als Summe der in der Richtung der Y-Achse wirkenden Komponenten:

$$Y = P_1 . \cos\beta_1 + P_2 . \cos\beta_2 + \ldots P_n . \cos\beta_n$$

oder:

$$Y = \Sigma (P_1 . \cos\beta_1)$$

und endlich als Summe der in Richtung der Z-Achse wirkenden Komponenten:

$$Z = P_1 . \cos\gamma_1 + P_2 . \cos\gamma_2 \ldots + P_n . \cos\gamma_n$$

oder:

$$Z = \Sigma (P_1 . \cos\gamma_1)$$

Die Grösse der Resultante R dieser drei unter rechten Winkeln zueinander wirkenden Komponentensummen ist nach dem Satz vom Kräfteparallelepipedon:

$$1) \ldots\ldots R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

wodurch das Bestreben der gegebenen n Kräfte auf fortschreitende Bewegung ausgedrückt ist.

Bezeichnet man die Winkel, welche die Resultante R mit den drei Koordinatenachsen bildet, mit ϱ, σ und τ, so wird die

Richtung der Resultante bestimmt durch die Gleichungen:

$$2) \ldots \left\{ \begin{array}{lll} \cos \varrho = \frac{X}{R} & \text{oder} & R . \cos \varrho = X \\ \cos \sigma = \frac{Y}{R} & \text{oder} & R . \cos \sigma = Y \\ \cos \tau = \frac{Z}{R} & \text{oder} & R . \cos \tau = Z \end{array} \right.$$

Um das Drehungsbestreben der gegebenen Kräfte zu ermitteln, denkt man sich die Angriffspunkte a, b etc. derselben mit dem Schnittpunkt 0 des rechtwinkligen Koordinatensystems fest verbunden und nimmt wieder anstatt der gegebenen Kräfte ihre Komponenten.

Bei einer Drehung um die X-Achse ist offenbar die in Richtung dieser Achse liegende Komponente $P_1 . \cos \alpha_1$ ganz wirkungslos und aus der Drehrichtung der beiden übrigen Komponenten nebst deren senkrechten Abständen y_1 und z_1 von der X-Achse ergibt sich das Drehungsbestreben um die X-Achse oder in der YZ-Ebene =

$$P_1 . \cos \gamma_1 . y_1 - P_1 . \cos \beta_1 . z_1$$

In gleicher Weise ist bei einer Drehung um die Y-Achse die in Richtung dieser Achse wirkende Komponente $P_1 . \cos \beta_1$ ohne Einfluss und aus der Drehrichtung der beiden übrigen Komponenten, nebst deren senkrechten Abständen z_1 und x_1 von der Y-Achse ergibt sich das Drehungsbestreben um die Y-Achse oder in der XZ-Ebene =

$$P_1 . \cos \alpha_1 . z_1 - P_1 . \cos \gamma_1 . x_1$$

Endlich ist bei einer Drehung um die Z-Achse die in Richtung dieser Achse wirkende Komponente $P_1 . \cos \gamma_1$ wirkungslos, und aus der Drehrichtung der beiden übrigen Komponenten und deren senkrechten Abständen x_1 und y_1 von der Z-Achse ergibt sich das Drehungsbestreben um die Z-Achse oder in der XY-Ebene =

$$P_1 . \cos \beta_1 . x_1 - P_1 . \cos \alpha_1 . y_1$$

Sind nun 4, 5 oder n Kräfte gegeben, so erhalten wir mit jeder Koordinatenachse parallel laufend 4, 5 oder n Komponenten.

Bezeichnet man nun die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher gegebenen Kräfte in Bezug auf die X-Achse mit Mx, so kann das Drehungsbestreben derselben in abgekürzter Form ausgedrückt werden durch die Gleichung:

$$Mx = \Sigma P_1 (\cos \gamma_1 . y_1 - \cos \beta_1 . z_1)$$

In gleicher Weise erhält man für das Drehungsbestreben um die Y- resp. Z-Achse:

$$My = \Sigma P_1 (\cos \alpha_1 z_1 - \cos \gamma_1 . x_1)$$

$$Mz = \Sigma P_1 (\cos \beta_1 x_1 - \cos \alpha_1 . y_1)$$

und so erhält man als Gesamtdrehungsbestreben oder nach Erkl. 124 als resultierendes Kräftepaar der Grösse nach:

$$3) \ldots . \; Ss = \sqrt{(Mx)^2 + (My)^2 + (Mz)^2}$$

und der Richtung nach:

$$\cos \lambda = \frac{Mx}{Ss}$$

$$\cos \mu = \frac{My}{Ss}$$

$$\cos \nu = \frac{Mz}{Ss}$$

Als Endresultat ergibt sich hiernach in jedem Fall die Resultante R und das resultierende Kräftepaar Ss.

Frage 66. Unter welchen Umständen ist eine weitere Vereinigung der erhaltenen Resultante R und des resultierenden Kräftepaares Ss möglich?

Antwort. Eine weitere Vereinigung der Resultante R und des Kräftepaares Ss ist nur dann möglich, wenn das Paar Ss mit der Kraft R in derselben Ebene liegt, oder wenn die Kraftrichtung mit der Paarebene parallel läuft.

Der erstgenannte Fall wurde bereits in Antwort auf Frage 63 erörtert, und dadurch ist auch eine Untersuchung des zweiten Falles erledigt, indem man bei der letzteren Voraussetzung die Paarebene jederzeit so weit mit sich parallel verschieben kann, bis sie die Kraftrichtung in sich aufgenommen hat.

Schneidet dagegen die Kraftrichtung die Paarebene, so ist eine Vereinigung zwischen beiden Elementen unmöglich, da man bei dem Versuch einer Vereinigung auf zwei Kräfte geführt wird, deren Richtungen windschiefe Linien sind.

Frage 67. Wenn man durch Rechnung die Resultante R und das Paar Ss gefunden hat, woran erkennt man alsdann, dass eine Vereinigung beider möglich ist, und durch welches Verfahren erhält man Grösse, Richtung und Angriffspunkt der Gesamtresultante?

Antwort. Denkt man sich, analog der Antwort auf Frage 63 das Paar Ss derart verschoben, dass die im Koordinatenschnittpunkt 0 wirkende Kraft R aufgehoben wird, so bleibt dann die Gesamtresultante R übrig, welche mit der früheren Resultante parallel und gleichgerichtet wirkt und deren Angriffspunkt durch die ihm zugehörigen und noch zu berechnenden Koordinaten ξ, v und ζ be-

stimmt werden muss, die sich aus folgender Betrachtung ergeben:

Denkt man sich an Stelle der Gesamtresultante R ihre drei parallel zu den Koordinatenachsen wirkenden Komponenten, so muss für den Fall des Gleichgewichts das Gesamtdrehungsbestreben der gegebenen Kräfte um die X-Achse, d. h. die von uns mit Mx bezeichnete Grösse:

$$\Sigma P_1 (\cos \gamma_1 . y_1 - \cos \beta_1 . z_1)$$

gleich sein dem gesamten Drehungsbestreben derjenigen beiden Komponenten von R, welche nicht in Richtung der X-Achse wirken; dies sind aber die beiden Kräfte, die wir mit Y und Z bezeichneten.

Der unbekannte Arm der ersteren ist die ihr zugehörige Koordinate ζ und bewirkt eine Drehung im negativen Sinn, während der Arm der zweiten, oder die ihr zugehörige Koordinate υ ist und eine Drehung im positiven Sinn erzeugt.

Demnach ist das Gesamtdrehungsbestreben beider, oder die algebraische Summe ihrer statischen Momente $Z\upsilon - Y\zeta$ und es muss für den Fall des Gleichgewichts:

$$Mx = Z\upsilon - Y\zeta$$

sein.

In gleicher Weise muss das Gesamtdrehungsbestreben der gegebenen Kräfte um die Y-Achse, oder die Grösse My gleich sein dem Gesamtdrehungsbestreben der beiden nicht in Richtung dieser Achse liegenden Komponenten der Gesamtresultante R.

Diese beiden Komponenten sind X und Z, und zwar wirkt X an dem noch unbekannten Arm ζ im positiven und Z an dem Arm ξ im negativen Sinn drehend, und somit ist die algebraische Summe der statischen Momente dieser beiden Komponenten von R, $X\zeta - Z\xi$ und für den Fall des Gleichgewichts:

$$My = X\zeta - Z\xi$$

Endlich muss noch das Gesamtdrehungsbestreben der gegebenen Kräfte um die Z-Achse oder die Grösse Mz gleich sein der algebraischen Summe der statischen Momente der nicht in Richtung dieser Achse liegenden Komponenten X und Y, und zwar wirkt X an dem Arm υ negativ drehend, Y an dem Arm ξ dagegen positiv drehend, woraus sich schliesslich die Gleichung:

$$Mz = Y\xi - X\upsilon$$

ergibt.

Für den Fall des Gleichgewichts muss also gleichzeitig:

$$1) \ldots\ldots \begin{cases} Mx = Zv - Y\zeta \\ My = X\zeta - Z\xi \\ Mz = Y\xi - Xv \end{cases}$$

sein.

Multipliziert man die erste dieser drei Gleichungen mit X, die zweite mit Y, die dritte mit Z und addiert darauf die drei neu erhaltenen Gleichungen, so erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$2) \ldots\ Mx \,.\, X + My \,.\, Y + Mz \,.\, Z = 0,$$

als **einzige Bedingung** für die Vereinigung von Ss und R.

Ist diese Bedingung erfüllt, so dienen zur Berechnung der Koordinaten des Angriffspunkts der Gesamtresultante R die unter 1). aufgestellten Gleichungen.

Da aber diese drei Gleichungen voneinander abhängig sind, so können nur zwei derselben für die Entwickelung benutzt werden. Nehmen wir zu diesem Zweck z. B. die beiden letzten Gleichungen:

$$My = X\zeta - Z\xi$$
$$Mz = Y\xi - Xv$$

so ist durch dieselben die Richtung der Resultante R im Raum bestimmt, da die erste derselben die Projektion[1]) der Richtungslinie auf die XZ-Ebene, die zweite die Projektion auf die XY-Ebene vorstellt.

Hierbei ist zu beachten, dass jeder Punkt dieser Richtungslinie als Angriffspunkt der Gesamtresultante R gelten kann[2]), also auch derjenige Punkt, in welchem die Richtungslinie der Resultante die Horizontalebene schneidet.

In diesem Fall ist aber die Koordinate:

$$\zeta = 0$$

zu rechnen. Setzt man diesen Wert in die beiden Bedingungsgleichungen, so erhält man:

$$My = X \,.\, 0 - Z\xi$$

oder:

$$My = -Z\xi$$

woraus sich für:

$$3) \ldots\ldots \xi = -\frac{My}{Z}$$

ergibt.

Aus der zweiten Gleichung:

$$Mz = Y\xi - Xv$$

erhält man für:

$$v = \frac{Y\xi - Mz}{X}$$

[1]). Siehe Erkl. 125.
[2]). Siehe Erkl. 126.

Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} MxX &= ZvX - Y\zeta X \\ MyY &= X\zeta Y - Z\xi Y \\ MzZ &= Y\xi Z - XvZ \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} MxX + \\ MyY + \\ MzZ \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} + ZvX - Y\zeta X - Z\xi Y \\ - XvZ + Y\zeta X + Y\xi Z \\ \end{array}\right.$$

$$MxX + MyY + MzZ = 0$$

Erkl. 125. Projektion (vom lat. projectio, das Hervorwerfen) ist die Darstellung oder Zeichnung der scheinbaren Lage und Gestalt eines Gegenstandes. Wenn man z. B. von den beiden Endpunkten einer Geraden, oder von allen Punkten des Umfangs einer beliebig begrenzten Figur senkrechte Linien auf eine ausser jener Linie resp. Figur liegende Ebene fällt, so heisst die auf der Ebene durch die Fusspunkte der Lote gebildete Linie resp. Figur, die Projektion der zuerst gegebenen Linie, resp. Figur.

Erkl. 126. Da der Gleichgewichtszustand des Kräftesystems nicht gestört wird, wenn der Angriffspunkt der Kraft R in der Richtungslinie desselben beliebig verschoben wird, so ist bei Einführung der Grössen ξ, v, ζ als Koordinaten des Angriffspunkts der Resultante wohl zu beachten, dass diese drei Koordinaten keineswegs einen fest bestimmten Punkt bezeichnen, sondern nur irgend einen von den unendlich vielen in einer geraden Linie liegenden Punkten, welche sämtlich die Eigenschaft besitzen, als Angriffspunkte der Kraft R gewählt werden zu können.

oder den oben für ξ berechneten Wert eingesetzt:

$$v = \frac{Y\left(-\frac{My}{z}\right) - Mz}{X}$$

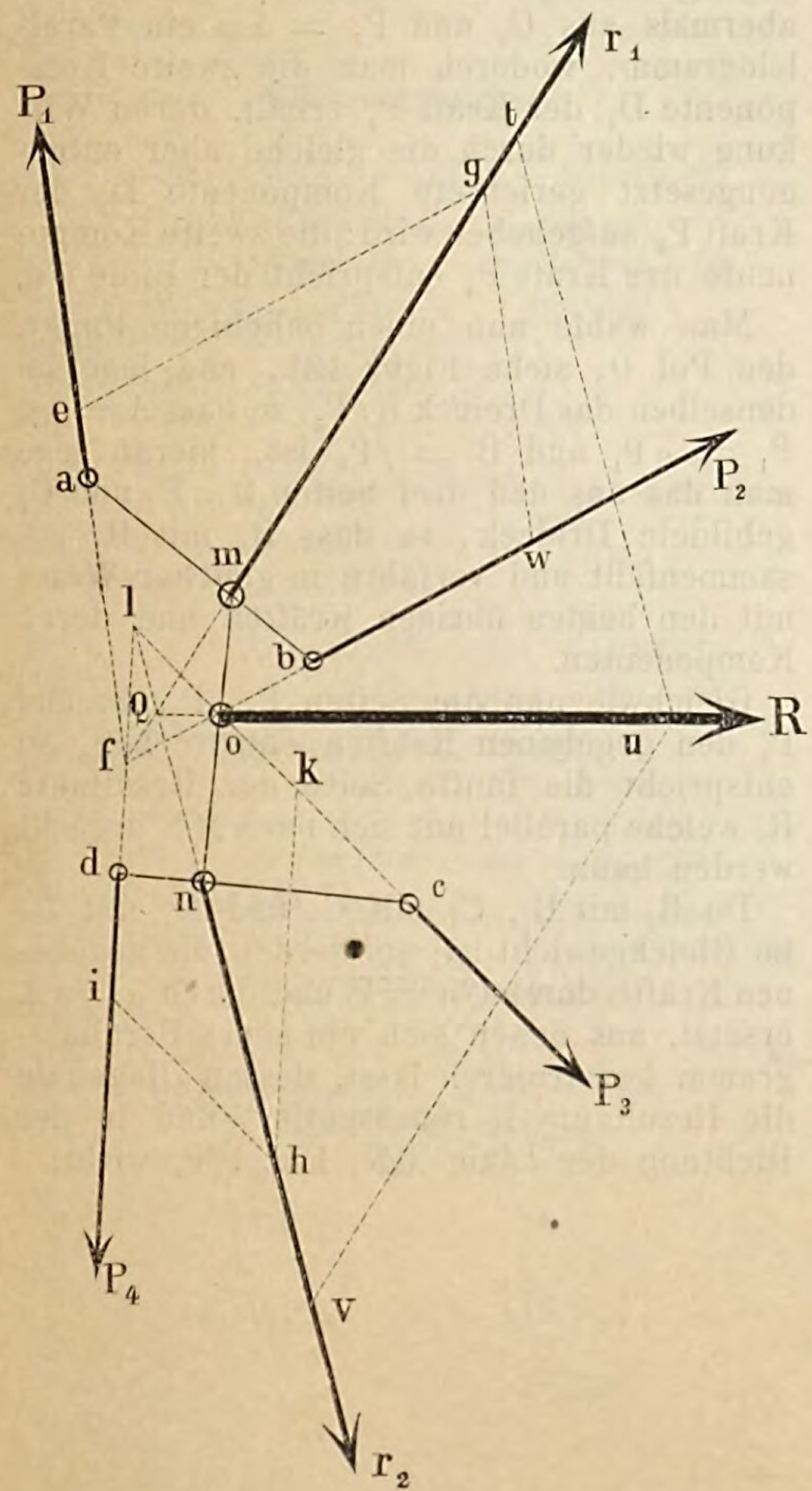
oder:

$$4). \ldots . \quad v = -\frac{My\,Y + Mz\,Z}{X}$$

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 132. Es seien vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 der Grösse und Richtung nach gegeben durch die resp. Linien der Figur 129 und ihre Angriffspunkte seien die Punkte a, b, c, d. Wie ermittelt man durch Konstruktion Grösse, Richtung und Angriffspunkt der Resultante?

Figur 129.



1. Auflösung. Man denke sich die Richtungslinien der beiden gegebenen Kräfte P_1 und P_2 rückwärts über a und b verlängert, bis sie sich in dem Punkt f schneiden, mache $\overline{fw} = P_2$ und $\overline{fe} = P_1$ und zeichne das Parallelogramm $fegw$, dessen Diagonale $\overline{fg}$ die Resultante der beiden Kräfte P_1 und P_2 nach Grösse und Richtung darstellt, und welche man, um ihren Angriffspunkt m zu erhalten, nach dem Durchschnittspunkt m der Diagonale $\overline{fg}$ mit der Angriffslinie $\overline{ab}$ verlegt, so dass $\overline{mr_1}$ oder $r_1 = \overline{fg}$ ist.

In gleicher Weise verlängert man die Richtungslinien der Kräfte P_3 und P_4 bis zu ihrem Schnittpunkt l und denke sich diese beiden Kräfte in l wirkend, d. h. man mache $\overline{lk} = P_3$ und $\overline{li} = P_4$, und vollende das Parallelogramm $ilkh$, so bildet die Linie $\overline{lh} = \overline{nr_2}$ oder r_2 die Resultante von P_3 und P_4.

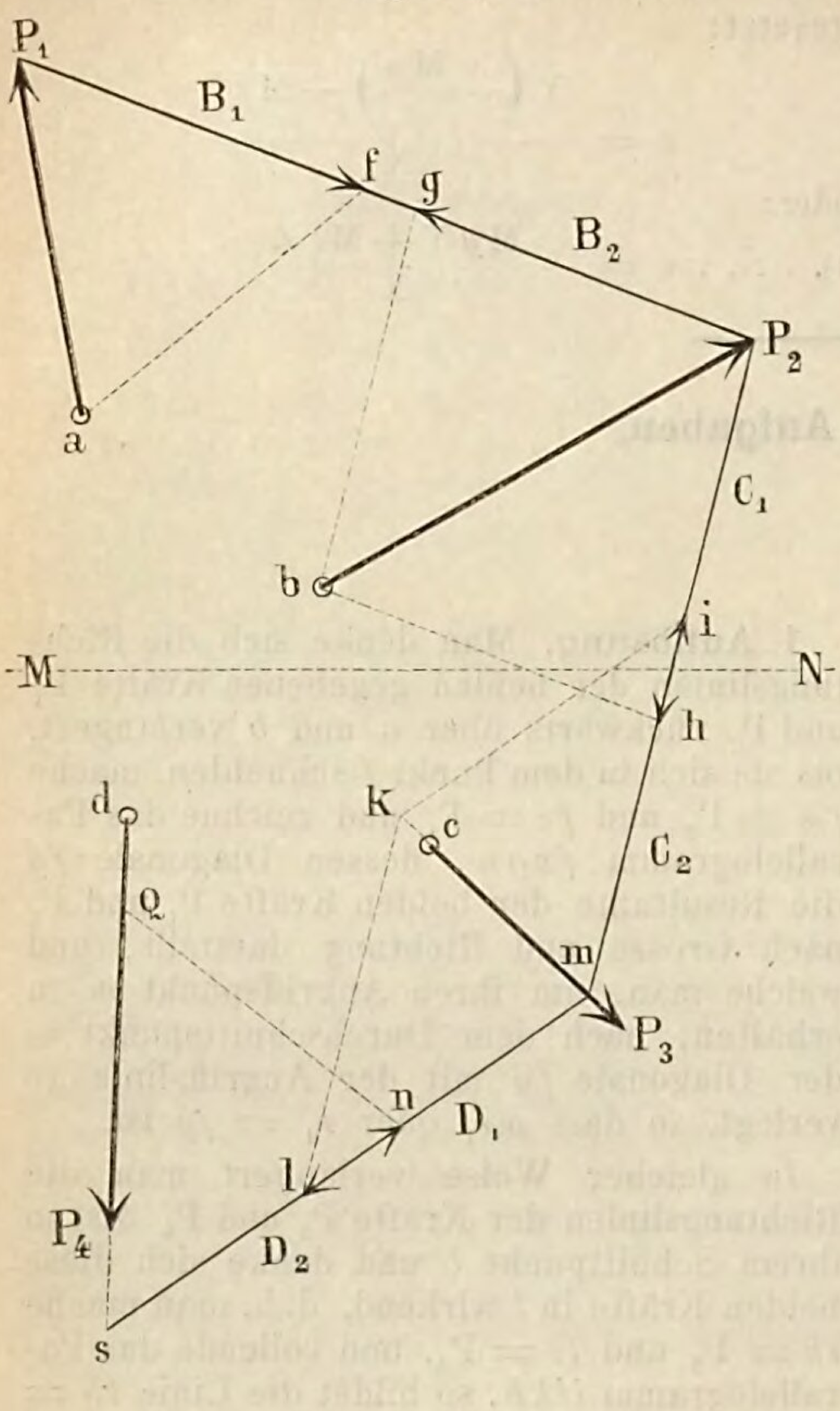
Schliesslich verlängert man noch r_1 und r_2 bis zu deren Schnittpunkt Q, verlegt die beiden Kräfte r_1 und r_2 nach Q, d. h. man macht $\overline{Qt} = r_1$ und $\overline{Qv} = r_2$, und zeichnet aus diesen beiden Linien das Parallelogramm $Qtuv$, so ist die Diagonale $\overline{Qu}$ dieses Parallelogramms die gesuchte Resultante der gegebenen vier Kräfte nach Grösse und Richtung und ihr Angriffspunkt liegt in O, d. h. in demjenigen Punkt, in welchem die Verbindungslinie $\overline{mn}$ der Angriffspunkte der Resultanten r_1 und r_2 von der zuletzt ermittelten Diagonale geschnitten wird. $\overline{oR}$ oder $R = \overline{Qu}$.

2. Auflösung durch Bildung eines sogen. Kräftepolygons (siehe Antw. auf Frage 60).

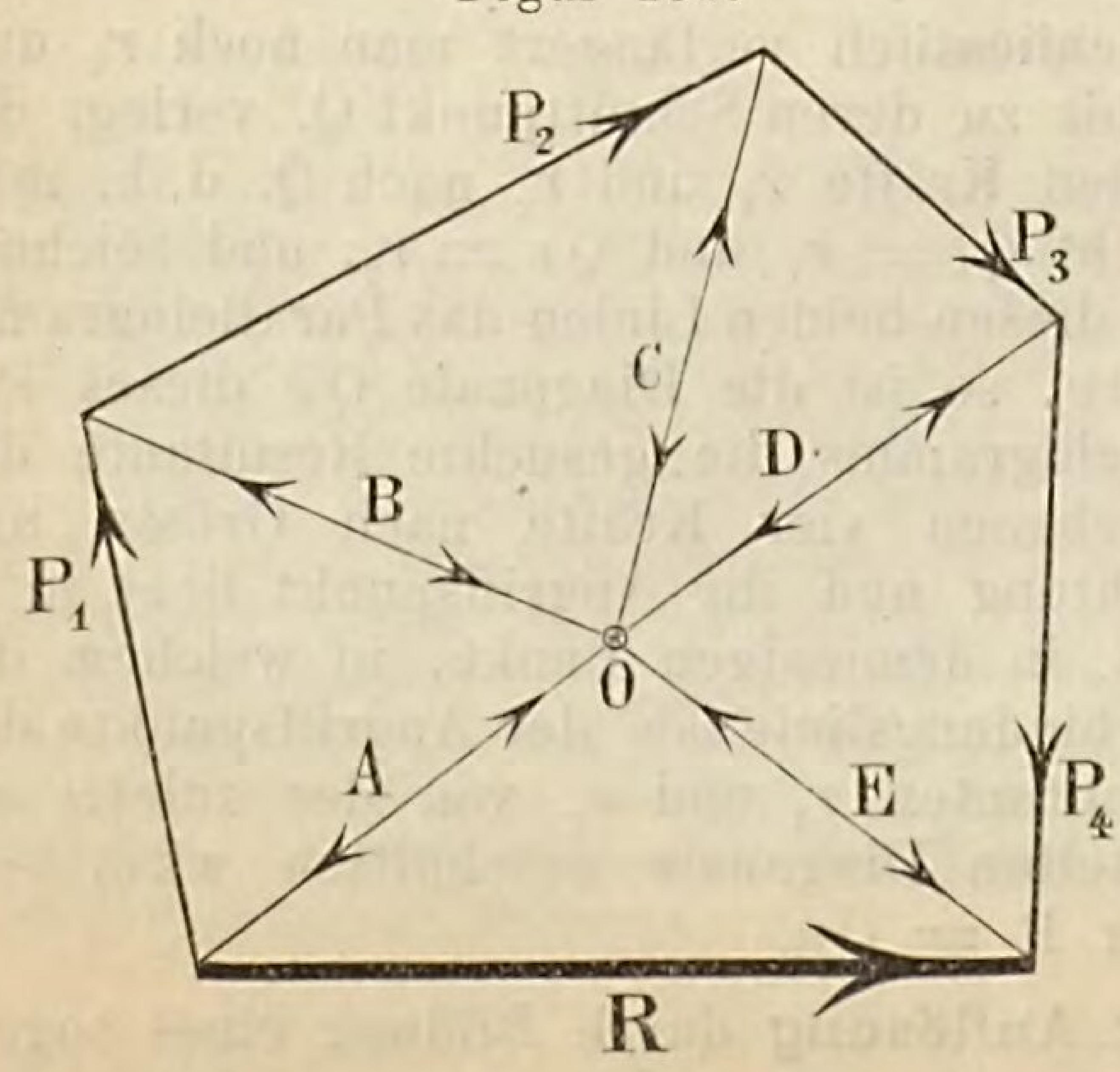
Es seien in Figur 130 die Linien P_1, P_2, P_3 und P_4, welche in den resp. Punkten a, b, c, d angreifen, die Repräsentanten der gegebenen Kräfte nach Grösse und Richtung.

Man zeichne zunächst die Verbindungslinie P_1P_2 und denke sich die Kraft P_1 in zwei

Figur 130.



Figur 131.



Erkl. 127. Die gegebenen Kräfte können auch in anderer als der oben angegebenen Reihenfolge zu einem Polygon zusammengesetzt werden, und zwar sind bei vier gegebenen Kräften $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschiedene Aufeinanderfolgen möglich.

Komponenten zerlegt, deren eine $= B_1$ ganz beliebig gross angenommen ist und in Richtung der Verbindungslinie wirkt, so wird $\overline{af}$ die zweite Komponente der Kraft P_1 sein, was sofort einleuchtet, wenn man das Parallelogramm, dessen eine Diagonale die Kraft P_1 bildet, vollständig zeichnet (was in nebenstehender Figur wegen Raumersparnis nicht geschehen ist).

Um die Wirkung der Komponente B_1 aufzuheben, zerlegt man die gegebene Kraft P_2 gleichfalls in zwei Komponenten, deren eine B_2 mit B_1 gleiche Grösse und gleiche aber entgegengesetzte Richtung hat. Hierdurch ist zugleich die zweite Komponente C_1 der Kraft P_2 bedingt. Die Richtungslinie der Komponente C_1 verlängert man bis zum Durchschnitt mit der Richtung der Kraft P_3.

Um die Wirkung von C_1 aufzuheben, zeichne man $\overline{mi}$ oder C_2 gleich gross aber entgegengesetzt gerichtet mit C_1, konstruiere abermals aus C_2 und $P_3 = \overline{km}$ ein Parallelogramm, wodurch man die zweite Komponente D_1 der Kraft P_3 erhält, deren Wirkung wieder durch die gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Komponente D_2 der Kraft P_4 aufgehoben wird; die zweite Komponente der Kraft P_4 entspricht der Linie $\overline{Qn}$.

Man wähle nun einen beliebigen Punkt, den Pol 0, siehe Figur 131, und lege an denselben das Dreieck afP_1, so dass $A = \overline{af}$, $P_1 = \overline{aP_1}$ und $B = \overline{fP_1}$ ist, hieran lege man das aus den drei Seiten B_2, P_2 und C_1 gebildete Dreieck, so dass B_1 mit B_2 zusammenfällt und verfahre in gleicher Weise mit den beiden übrigen Kräften und deren Komponenten.

Gleichwie nun die Seiten P_1, P_2, P_3 und P_4 den gegebenen Kräften entsprechen, so entspricht die fünfte Seite der Resultante R, welche parallel mit sich nach $\overline{MN}$ gerückt werden kann.

Da B_1 mit B_2, C_1 mit C_2 und D_1 mit D_2 im Gleichgewicht ist, so werden die gegebenen Kräfte durch $\overline{Qn} = E$ und durch $\overline{af} = A$ ersetzt, aus denen sich ein neues Parallelogramm konstruieren lässt, dessen Diagonale die Resultante R repräsentiert und in der Richtung der Linie $\overline{MN}$, Fig. 130, wirkt.

Aufgabe 133. Es sei ein festes System von fünf materiellen Punkten durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 10;$$
$$x_2 = 9, \quad y_2 = 12;$$
$$x_3 = 17, \quad y_3 = 14;$$
$$x_4 = 20, \quad y_4 = 13;$$
$$x_5 = 15, \quad y_5 = 18.$$

Die daran wirksamen Kräfte sind der Reihe nach: $P_1 = 50$, $P_2 = 30$, $P_3 = 70$, $P_4 = 90$ und $P_5 = 120$ kg.

Die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit den Koordinaten bilden, seien:

$$\alpha_1 = 70^0, \quad \beta_1 = 20^0$$
$$\alpha_2 = 60^0, \quad \beta_2 = 150^0$$
$$\alpha_3 = 120^0, \quad \beta_3 = 30^0$$
$$\alpha_4 = 150^0, \quad \beta_4 = 120^0$$
$$\alpha_5 = 90^0, \quad \beta_5 = 0^0$$

Es ist die Resultante nach Grösse und Richtung zu bestimmen.

Auflösung. Nach der Formel 1). in Antwort auf Frage 64 ist die Summe der Komponenten, welche in der Richtung der X-Achse wirken:

$$X = P_1 . \cos\alpha_1 + P_2 . \cos\alpha_2 + \ldots P_n . \cos\alpha_n$$

Setzt man in diese Gleichung die in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte ein, so ist:

$$X = 50 . \cos 70^0 + 30 . \cos 60^0 + 70 . \cos 120^0 + 90 . \cos 150^0 + 120 . \cos 90^0$$

Nun ist nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 1). bis 5).:

$$50 . \cos 70^0 = +17{,}101$$
$$30 . \cos 60^0 = +15{,}000$$
$$70 . \cos 120^0 = -35{,}000$$
$$90 . \cos 150^0 = -77{,}943$$
$$120 . \cos 90^0 = 0{,}000$$

Das gibt zusammen nach Hilfsrechn. 6). für:

A). $X = -80{,}842$

In gleicher Weise erhält man für die Summe der Komponenten, welche in der Richtung der Y-Achse wirken:

$$Y = P_1 . \cos\beta_1 + P_2 . \cos\beta_2 \ldots + P_n . \cos\beta_n$$

Setzt man in diese Gleichung die in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte ein, so ist:

$$Y = 50 . \cos 20^0 + 30 . \cos 150^0 + 70 . \cos 30^0 + 90 . \cos 120^0 + 120 . \cos 0^0$$

Nun ist nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 7). bis 11).:

$$50 . \cos 20^0 = +46{,}9846$$
$$30 . \cos 150^0 = -25{,}98$$
$$70 . \cos 30^0 = +60{,}62$$
$$90 . \cos 120^0 = -45{,}00$$
$$120 . \cos 0^0 = +120$$

Das gibt zusammen nach Hilfsrechn. 12). für:

B). $Y = 156{,}625$

Nun ist die Resultante R nach Gleich. 2). in Antw. auf Frage 64:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Setzt man in diese Gleichung die oben berechneten Zahlenwerte, so ist:

$$R = \sqrt{(-80{,}842)^2 + 156{,}625^2}$$

oder nach Hilfsrechnung 13). ist:

Hilfsrechnungen:

1). . . $50 . \cos 70^0 = \log 50 + \log\cos 70^0$

$$\log 50 = 1{,}6989700$$
$$+ \log\cos 70^0 = 9{,}5340517-10$$
$$\log 50 + \log\cos 70^0 = 1{,}2330217$$

mithin:

$$50 . \cos 70^0 = 17{,}101$$

2). . . . $30 . \cos 60^0 = 30 . \frac{1}{2}$ (siehe Erkl. 32)

oder: $30 . \cos 60^0 = 15$

3). . . . $70 . \cos 120^0 = 70 \cdot -\cos 60^0$

oder: $70 \cdot -\frac{1}{2}$ (siehe Erkl. 32)

also: $70 . \cos 120^0 = -35$

4). . . . $90 . \cos 150^0 = 90 \cdot -\cos 30^0$

$90 \cdot -\cos 30^0 = 90 \cdot -0{,}866$ (siehe Erkl. 32)

$90 \cdot -0{,}866 = 77{,}943$

5). . . . $120 . \cos 90^0 = 120 . 0 = 0$,

da $\cos 90^0 = 0$.

6. . . .

$$\begin{array}{r} 17{,}101 \\ +15 \\ \hline +32{,}101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -35 \\ -77{,}943 \\ \hline -112{,}943 \\ +32{,}101 \\ \hline -80{,}842 \end{array}$$

Hilfsrechnungen:

7). . . $50 \,.\, \cos 20^0 = \log 50 + \log \cos 20^0$

$$\begin{aligned} \log 50 &= 1{,}6989700 \\ + \log \cos 20^0 &= 9{,}9729858 - 10 \\ \hline \log 50 \,.\, \cos 20^0 &= 1{,}6719558 \end{aligned}$$

mithin: $50 \,.\, \cos 20^0 = 46{,}9846$

8). . . . $30 \,.\, \cos 150^0 = 30 \cdot - \cos 30^0$

oder: $30 \cdot - 0{,}866 = - 25{,}98$

9). . . . $70 \,.\, \cos 30^0 = 70 \,.\, 0{,}866$

oder: $70 \,.\, \cos 30^0 = 60{,}62$

10). . . . $90 \,.\, \cos 120^0 = 90 \cdot - \cos 60^0$

oder: $90 \,.\, \cos 120^0 = 90 \cdot - 0{,}5 = - 45$

11). . . . $120 \,.\, \cos 0^0 = 120 \,.\, 1 = 120$

12). . . .

$$\begin{array}{r} 46{,}985 \\ + 60{,}62 \\ + 120 \\ \hline 227{,}605 \\ - 70{,}98 \\ \hline 156{,}625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - 25{,}98 \\ - 45 \\ \hline - 70{,}98 \end{array}$$

13). . . . $80{,}842^2 = 2 \,.\, \log 80{,}842$

$$\begin{aligned} \log 80{,}842 &= 1{,}9076370 \\ &\quad\; .\, 2 \\ \hline \log 80{,}842^2 &= 3{,}8152740 \end{aligned}$$

mithin: $80{,}842^2 = 6535{,}43$

$156{,}625^2 = 2 \,.\, \log 156{,}625$

$$\begin{aligned} \log 156{,}625 &= 2{,}1948611 \\ &\quad\; .\, 2 \\ \hline \log 156{,}625^2 &= 4{,}3897222 \end{aligned}$$

mithin: $156{,}625^2 = 24531{,}4$

14). . . . $\sqrt{31066{,}83} = \frac{1}{2} \cdot \log 31066{,}83$

$$\begin{aligned} \log 31066{,}83 &= 4{,}4922969 \\ &\quad\; \cdot \tfrac{1}{2} \\ \hline \log R &= 2{,}2461485 \end{aligned}$$

mithin: num-log R oder $R = 176{,}258$

15). . . $\log \cos \varrho = \log 80{,}842 - \log 176{,}258$

Nun ist:
$$\begin{aligned} \log 80{,}842 &= 1{,}9076370 \\ - \log 176{,}258 &= - 2{,}2461485 \\ \hline \log \cos \varrho &= 9{,}6614885 \end{aligned}$$

mithin:

num-log $\cos \varrho = 62^0\, 41'\, 58''$

da aber der Wert für $\cos \varrho$ das Minusvorzeichen hat, so ist als ϱ der Nebenwinkel des eben berechneten Winkels anzusehen, und demnach ist Winkel:

$$\varrho = 180^0 - 62^0\, 41'\, 58''$$

oder: $\varrho = 117^0\, 18'\, 2''$

$$R = \sqrt{6535{,}43 + 24531{,}4}$$

oder:

$$R = \sqrt{31066{,}83}$$

Hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 14). für:

C). $R = 176{,}258$

Nach Gleich. 5). in Antw. auf Frage 64 ist:

$$\cos \varrho = \frac{X}{R}$$

und

$$\cos \sigma = \frac{Y}{R}$$

oder nach den oben ermittelten Werten ist:

$$\cos \varrho = - \frac{80{,}842}{176{,}258}$$

und

$$\cos \sigma = \frac{156{,}625}{176{,}258}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach Hilfsrechnung 15). für

D). . . . $\cos \varrho = 117^0\, 18'\, 2''$

und für

E). . . . $\cos \sigma = 27^0\, 18'\, 2''$

Nach Formel 3). in Antw. auf Frage 64 ist das Gesamtdrehungsbestreben der gegebenen Kräfte um den als fest gedachten Koordinatendurchschnittspunkt:

$$Mm \text{ oder } Rr = \Sigma P_1 (\cos \alpha_1 l_1 - \cos \beta_1 \lambda_1)$$

oder:

$$Rr = P_1 . \cos \alpha_1 l_1 + P_2 . \cos \alpha_2 l_2 + \ldots P_n . \cos \alpha_n l_n - (P_1 . \cos \beta_1 \lambda_1 + P_2 . \cos \beta_2 \lambda_2 + \ldots P_n . \cos \beta_n \lambda_n)$$

Es sind somit die sämtlichen oben berechneten, in Richtung der X-Achse wirkenden Komponenten mit den gegebenen Hebelarmen y_1, $y_2 \ldots . y_n$ zu multiplizieren, und sämtliche in Richtung der Y-Achse wirkenden Komponenten mit ihren Armen x_1, $x_2 \ldots x_n$ zu vervielfältigen.

Es ist demnach:

$$\Sigma . P_1 . \cos \alpha_1 l_1 = 17{,}101 . 10 + 15 . 12 - 35 . 14 - 77{,}943 . 13 + 0{,}8$$

oder nach Hilfsrechnung 16).:

$$\Sigma . P_1 . \cos \alpha_1 l_1 = - 1152{,}249$$

Ferner ist:

$$\Sigma . P_1 . \cos \beta_1 \lambda_1 = + 46{,}985 . 5 - 25{,}98 . 9 + 60{,}62 . 17 - 45 . 20 + 120 . 15$$

oder nach Hilfsrechnung 17).:

$$\Sigma . P_1 . \cos \beta_1 \lambda_1 = 1931{,}645$$

Hilfsrechnungen:

16). . . $+17{,}101 \cdot 10 = +171{,}01$
$+15 \cdot 12 = +180$
$-35 \cdot 14 = -490$
$-77{,}943 \cdot 13 = -1013{,}259$
$+0 \cdot 8 = 0$
$+351{,}01$
$-1503{,}259$
$-1152{,}249$

17). . . $+46{,}985 \cdot 5 = 234{,}925$
$-25{,}98 \cdot 9 = -233{,}82$
$+60{,}62 \cdot 17 = 1030{,}54$
$-45 \cdot 20 = -900$
$+120 \cdot 15 = +1800$
$+3065{,}465$
$-1133{,}82$
$+1931{,}645$

18). . . 3083894 : 176258 = 17,5
176258
1321314
1233806
875080

19). . . y = 1152249 : 80842 = 14,25
80842
343829
323368
204610
161684
429260

20). . . x = 1931645 : 156625 = 12,33
156625
365395
313250
521450
469875
515750

Mithin ist:

$$\mathrm{M}m \text{ oder } \mathrm{R}r = -1152{,}249 - 1931{,}645$$

oder:

$$\mathrm{R}r = -3083{,}894$$

Da nun R = 176,258 ist, so ist:

F). $r = -\dfrac{3083{,}894}{176{,}258}$

oder nach Hilfsrechn. 18).:

$$r = 17{,}5$$

Soll das System der gegebenen fünf Kräfte ins Gleichgewicht gebracht werden, so muss nach den oben erhaltenen Resultaten eine sechste Kraft $P_6 = 176{,}258$ kg angebracht werden, welche mit der X-Achse einen Winkel von:

$$180^0 - \varrho = 180^0 - 117^0\,18'\,2''$$

oder:

$$62^0\,41'\,58''$$

und mit der Y-Achse einen Winkel von

$$180^0 - \sigma = 180^0 - 27^0\,18'\,2''$$

oder:

$$152^0\,41'\,58''$$

bildet.

Der Angriffspunkt dieser sechsten Kraft muss durch die ihm zugehörigen Koordinaten x und y bestimmt werden, die sich durch folgende Betrachtung finden:

Für den Fall des Gleichgewichts muss das Gesamtdrehungsbestreben:

$$\Sigma \,.\, P_1 \,.\, \cos\alpha_1 l_1 = -1152{,}249$$

der in Richtung der X-Achse wirkenden Komponenten gleich sein dem statischen Moment der in Richtung der X-Achse wirkenden Komponente von R; letztere ist aber:

$$X = -80{,}842$$

und ihr unbekannter Arm y.

Es besteht demnach die Gleichung:

$$-80{,}842\,y = -1152{,}249$$

Hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 19). für den Arm:

G). $y = 14{,}25$

Es muss aber auch für den Fall des Gleichgewichts das Gesamtdrehungsbestreben der in Richtung der Y-Achse wirkenden Komponenten:

$$\Sigma \,.\, P_1 \,.\, \cos\beta_1 \lambda_1 = 1931{,}645$$

gleich sein dem statischen Moment der in Richtung derselben Achse wirkenden Komponente von R; letztere ist aber nach obiger Berechnung:

$$Y = 156{,}625$$

und ihr unbekannter Arm sei x, folglich besteht die Gleichung:

$$156{,}625\,x = 1931{,}645$$

und hieraus erhält man für x nach Hilfsrechnung 20).:

$$x = 12{,}33$$

Aufgabe 134. An einem festen System von vier materiellen Punkten wirken vier Kräfte nach beliebigen Richtungen, deren Gesamtwirkung zu bestimmen ist. Die Intensitäten der Kräfte sind $P_1 = 50$, $P_2 = 70$, $P_3 = 90$ und $P_4 = 120$ kg. Die Richtungen derselben mit den drei Koordinatenachsen sind:

$\alpha_1 = 60^0$, $\beta_1 = 40^0$, γ_1 spitz,
$\alpha_2 = 65^0$, $\beta_2 = 45^0$, γ_2 stumpf,
$\alpha_3 = 70^0$, $\beta_3 = 50^0$, γ_3 spitz,
$\alpha_4 = 75^0$, $\beta_4 = 55^0$, γ_4 stumpf,

und die Koordinaten ihrer Angriffspunkte sind:

$x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$
$x_2 = 1$ m, $y_2 = 4$ m, $z_2 = 7$ m
$x_3 = 2$ „ $y_3 = 5$ „ $z_3 = 8$ „
$x_4 = 3$ „ $y_4 = 6$ „ $z_4 = 9$ „

Hilfsrechnungen:

1). . . $50 \cdot \cos 60^0 = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$

2). . . $70 \cdot \cos 65^0 = \log 70 + \log \cos 65^0$

$\log 70 = 1{,}8450980$
$+ \log \cos 65^0 = 9{,}6259483-10$
$\overline{\quad 1{,}4710463}$

mithin: $70 \cdot \cos 65^0 = 29{,}583$

3). . . $90 \cdot \cos 70^0 = \log 90 + \log \cos 70^0$

$\log 90 = 1{,}9542425$
$+ \log \cos 70^0 = 9{,}5340517$
$\overline{\quad 1{,}4882942}$

mithin: $90 \cdot \cos 70^0 = 30{,}782$

4). . . $120 \cdot \cos 75^0 = \log 120 + \log \cos 75^0$

$\log 120 = 2{,}0791812$
$+ \log \cos 75^0 = 9{,}4129962$
$\overline{\quad 1{,}4921774}$

mithin: $120 \cdot \cos 75^0 = 31{,}058$

5). . . $50 \cdot \cos 40^0 = \log 50 + \log \cos 40^0$

$\log 50 = 1{,}6989700$
$+ \log \cos 40^0 = 9{,}8842540$
$\overline{\quad 1{,}5832240}$

mithin: $50 \cdot \cos 40^0 = 38{,}302$

6). . . $70 \cdot \cos 45^0 = \log 70 + \log \cos 45^0$

$\log 70 = 1{,}8450980$
$+ \log \cos 45^0 = 9{,}8494850$
$\overline{\quad 1{,}6945830}$

mithin: $70 \cdot \cos 45^0 = 49{,}498$

7). . . $90 \cdot \cos 50^0 = \log 90 + \log \cos 50^0$

$\log 90 = 1{,}9542425$
$+ \log \cos 50^0 = 9{,}8080675$
$\overline{\quad 1{,}7623100}$

mithin: $90 \cdot \cos 50^0 = 57{,}851$

Auflösung. Man zerlege, ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe, jede der gegebenen Kräfte in drei zueinander senkrechte Komponenten, welche mit den Koordinatenachsen parallel laufen. Nach Antw. auf Frage 65 ist die Summe der in Richtung der X-Achse wirkenden Komponenten:

$$X = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 \ldots + P_n \cdot \cos \alpha_n$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden gegebenen Zahlenwerte, so ist:

$$X = \left\{ \begin{array}{rcl} 50 \cdot \cos 60^0 &=& 25 \\ 70 \cdot \cos 65^0 &=& 29{,}583 \\ 90 \cdot \cos 70^0 &=& 30{,}782 \\ 120 \cdot \cos 75^0 &=& 31{,}058 \end{array} \right\} \text{(siehe Hilfsrechn. 1—4)}$$

oder:

$$X = 116{,}423$$

Die Summe der in Richtung der Y-Achse wirkenden Komponenten ist:

$$Y = P_1 \cdot \cos \beta_1 + P_2 \cdot \cos \beta_2 \ldots + P_n \cdot \cos \beta_n$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte, so erhält man für

$$Y = \left\{ \begin{array}{rcl} 50 \cdot \cos 40^0 &=& 38{,}302 \\ 70 \cdot \cos 45^0 &=& 49{,}498 \\ 90 \cdot \cos 50^0 &=& 57{,}851 \\ 120 \cdot \cos 55^0 &=& 68{,}829 \end{array} \right\} \text{(siehe Hilfsrechn. 5—8)}$$

oder:

$$Y = 214{,}480$$

Die Summe der in Richtung der Z-Achse wirkenden Komponenten ist:

$$Z = P_1 \cdot \cos \gamma_1 + P_2 \cdot \cos \gamma_2 + \ldots P_n \cdot \cos \gamma_n$$

Da nun in der Aufgabe nur angegeben ist, ob γ spitz oder stumpf ist, so muss zur Berechnung von γ folgender Satz zu Hilfe genommen werden:

„Wenn eine im Raum gelegene Kraft mit den drei rechtwinkligen Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, so findet unter anderen folgende Relation statt“:

$$\cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta) + \cos \gamma^2 = 0$$

Hieraus erhält man für

$$\cos \gamma^2 = - \cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta)$$

Setzt man in diese Gleichung die für α und β gegebenen Werte ein, so erhält man nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 9). bis 12.) für:

Hilfsrechnungen:

8). . . $120 . \cos 55^0 = \log 120 + \log \cos 55^0$

$$\begin{aligned} \log 120 &= 2{,}0791812 \\ + \log \cos 55^0 &= 9{,}7585913 \\ &\overline{1{,}8377725} \end{aligned}$$

mithin: $120 . \cos 55^0 = 68{,}829$

9). . . Da $\alpha_1 = 60^0$ und $\beta_1 = 40^0$ gross ist, so ist $-\cos(\alpha + \beta) = -\cos 100^0$ oder $= \cos 80^0$ und $\alpha - \beta = 20^0$, es ist somit nach nebenstehender Gleichung:

$$\cos \gamma_1{}^2 = \cos 80^0 . \cos 20^0$$

oder:

$$\log \cos \gamma_1 = \frac{1}{2}(\log \cos 80^0 + \log \cos 20^0)$$

$$\begin{aligned} \log \cos 80^0 &= 9{,}2396702-10 \\ + \log \cos 20^0 &= 9{,}9729858-10 \\ \log \cos \gamma_1{}^2 &= 19{,}2126560-20 : 2 \\ \log \cos \gamma &= 9{,}6063280-10 \\ + \log 50 &= 1{,}6989700 \\ &\overline{1{,}3052980} \end{aligned}$$

mithin ist: $50 . \cos \gamma_1 = 20{,}198$

10). . . $\cos \gamma_2{}^2 = -\cos 110^0 . \cos 20^0$

oder:

$$\log \cos \gamma = \frac{1}{2}(\log \cos 70 + \log \cos 20)$$

$$\begin{aligned} \log \cos 70^0 &= 9{,}5340517-10 \\ + \log \cos 20^0 &= 9{,}9729858-10 \\ \log \cos \gamma_2{}^2 &= 19{,}5070375-20 : 2 \\ \log \cos \gamma &= 9{,}7535187-10 \\ + \log 70 &= 1{,}8450980 \\ &\overline{1{,}5986167} \end{aligned}$$

mithin ist: $70 . \cos \gamma_2 = 39{,}684$. Diese Grösse ist aber mit dem Minusvorzeichen in Rechnung zu bringen, da nach der Aufgabe γ_2 stumpf ist.

11). . . $\cos \gamma_3{}^2 = -\cos 120^0 . \cos 20^0$

oder:

$$\log \cos \gamma_3 = \frac{1}{2}(\log \cos 60^0 + \log \cos 20^0)$$

$$\begin{aligned} \log \cos 60^0 &= 9{,}6989700-10 \\ + \log \cos 20^0 &= 9{,}9729858-10 \\ \log \cos \gamma_3{}^2 &= 19{,}6719558-20 : 2 \\ \log \cos \gamma_3 &= 9{,}8359779 \\ + \log 90 &= 1{,}9542425 \\ &\overline{1{,}7902204} \end{aligned}$$

mithin ist: $90 . \cos \gamma_3 = 61{,}691$

12). . . $\cos \gamma_4{}^2 = -\cos 130^0 . \cos 20^0$

oder:

$$\log \cos \gamma_4 = \frac{1}{2}(\log \cos 50^0 + \log \cos 20^0)$$

$$\begin{aligned} \log \cos 50^0 &= 9{,}8080675-10 \\ + \log \cos 20^0 &= 9{,}9729858-10 \\ &\overline{19{,}7810533-20 : 2} \\ \log \cos \gamma_4 &= 9{,}8905266-10 \\ + \log 120 &= 2{,}0791812 \\ &\overline{1{,}9697078} \end{aligned}$$

mithin ist: $120 . \cos \gamma_4 = 93{,}263$ und zwar negativ, da nach der Aufgabe γ_4 stumpf ist.

$$Z = \begin{cases} 50 . \cos \gamma_1 = 20{,}198 \\ 70 . \cos \gamma_2 = -39{,}684 \\ 90 . \cos \gamma_3 = 61{,}691 \\ 120 . \cos \gamma_4 = -93{,}263 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &-132{,}947 \\ &+81{,}889 \\ Z &= -51{,}058 \end{aligned}$$

Nach Gleich. 1). in Antw. auf Frage 65 ist die Resultante R der drei oben berechneten Komponenten X, Y und Z:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

oder die oben ermittelten Zahlenwerte in diese Gleichung eingesetzt, ist:

$$R = \sqrt{116{,}423^2 + 214{,}48^2 + 51{,}058^2}$$

oder nach Hilfsrechnung 13).:

$$R = \sqrt{62162{,}9}$$

hieraus erhält man nach Hilfsrechnung 14). für die Grösse:

A). $R = 249{,}325$

Nach Gleich. 2). in Antw. auf Frage 65 wird die Richtung der Resultante zu den drei Koordinatenachsen bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$\cos \varrho = \frac{X}{R},$$

$$\cos \sigma = \frac{Y}{R}$$

$$\cos \tau = \frac{Z}{R}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, so ist:

$$\cos \varrho = \frac{116{,}423}{249{,}325}$$

$$\cos \sigma = \frac{214{,}48}{249{,}325}$$

$$\cos \tau = -\frac{51{,}058}{249{,}325}$$

hieraus erhält man nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 15).—17). für Winkel:

B). $\begin{cases} \varrho = 62^0 \, 9' \, 48'' \\ \sigma = 30^0 \, 39' \, 20'' \\ \tau = 101^0 \, 49' \end{cases}$

Nach Antw. auf Frage 65 ist ferner die Summe der statischen Momente sämtlicher gegebenen Kräfte in Bezug auf die X-Achse:

$$Mx = \Sigma . P_1 . (\cos \gamma_1 y_1 - \cos \beta_1 z_1)$$

oder in Anbetracht der gegebenen resp. berechneten Zahlengrössen ist:

Hilfsrechnungen:

13). . $\log 116{,}423^2 = 2 . \log 116{,}423$

$\log 116{,}423 = 2{,}0660388$
$. 2$

$\log 116{,}423^2 = 4{,}1320776$

mithin: $116{,}423^2 = 13554{,}3$

$\log 214{,}48^2 = 2 . \log 214{,}48$

$\log 214{,}48 = 2{,}3313868$
$. 2$

$\log 214{,}48^2 = 4{,}6627736$

mithin: $214{,}48^2 = 46001{,}7$

$\log 51{,}058^2 = 2 . \log 51{,}058$

$\log 51{,}058 = 1{,}7080638$
$. 2$

$\log 51{,}058^2 = 3{,}4161276$

mithin: $51{,}058^2 = 2606{,}9$

$X^2 = 13554{,}3$
$Y^2 = 46001{,}7$
$Z^2 = 2606{,}9$

$R^2 = 62162{,}9$

14). . . . $R = \sqrt{62162{,}9}$

oder: $\log R = \frac{1}{2} \cdot \log 62162{,}9$

$\log 62162{,}9 = 4{,}7935313$
$. \frac{1}{2}$

$\log R = 2{,}3967657$

mithin: num-log R oder $R = 249{,}325$

15). . . $\log \cos \varrho = \log 116{,}423 - \log 249{,}325$

$\log 116{,}423 = 2{,}0660388$
$- \log 249{,}325 = -2{,}3967657$

$\log \cos \varrho = 9{,}6692731-10$

mithin: num-log $\cos \varrho$ oder $\varrho = 62^0\, 9'\, 48''$

16). . . $\log \cos \sigma = \log 214{,}48 - \log 249{,}325$

$\log 214{,}48 = 2{,}3313868$
$- \log 249{,}325 = -2{,}3967657$

$\log \cos \sigma = 9{,}9346211-10$

mithin: $\sigma = 30^0\, 39'\, 20''$

17). . . $\log \cos \tau = \log 51{,}058 - \log 249{,}325$

$\log 51{,}058 = 1{,}7080638$
$- \log 249{,}325 = -2{,}3967656$

$\log \cos \tau = 9{,}3112981-10$

mithin: $\tau = -78^0\, 11'$. Das Minusvorzeichen deutet an, dass der Nebenwinkel, also ein Winkel von $\tau = 180^0 - 78^0 11' = 101^0\, 49'$ zu nehmen ist.

$$Mx = (20{,}198 . 0 - 39{,}684 . 4 + 61{,}691 . 5 - 93{,}263 . 6) - (38{,}302 . 0 + 49{,}498 . 7 + 57{,}851 . 8 + 68{,}829 . 9)$$

oder:

$$Mx = (0 - 158{,}736 + 308{,}455 - 559{,}578) - (0 + 346{,}486 + 462{,}808 + 619{,}461)$$

oder:

$$Mx = -409{,}859 - 1428{,}755$$

oder:

$$Mx = -1838{,}614$$

Ferner ist die Summe der statischen Momente in Bezug auf die Y-Achse:

$$My = \Sigma . P_1 . (\cos \alpha_1 z_1 - \cos \gamma_1 x_1)$$

oder in Anbetracht der gegebenen resp. berechneten Zahlengrössen ist:

$$My = (25 . 0 + 29{,}583 . 7 + 30{,}782 . 8 + 31{,}058 . 9) - (20{,}198 . 0 - 39{,}684 . 1 + 61{,}691 . 2 - 93{,}263 . 3)$$

oder:

$$My = (0 + 207{,}081 + 246{,}256 + 279{,}522) - (0 - 39{,}684 + 123{,}382 - 279{,}789)$$

oder:

$$My = 732{,}859 - (-196{,}091)$$

oder:

$$My = 928{,}950$$

Ferner ist die Summe der statischen Momente in Bezug auf die Z-Achse:

$$Mz = \Sigma . P_1 . (\cos \beta_1 x_1 - \cos \alpha_1 y_1)$$

oder in Anbetracht der gegebenen resp. berechneten Zahlengrössen ist:

$$Mz = (38{,}302 . 0 + 49{,}498 . 1 + 57{,}851 . 2 + 68{,}829 . 3) - (25 . 0 + 29{,}583 . 4 + 30{,}782 . 5 + 31{,}058 . 6)$$

oder:

$$Mz = (0 + 49{,}498 + 115{,}702 + 206{,}487) - (0 + 118{,}332 + 153{,}910 + 186{,}348)$$

oder:

$$Mz = 371{,}687 - 458{,}580$$

oder:

$$Mz = -86{,}893$$

und so erhält man als Gesamtdrehungsbestreben oder als resultierendes Kräftepaar der Grösse nach (s. Gleich. 3). in Antwort auf Frage 65).:

$$Ss = \sqrt{(-1838{,}614)^2 + 928{,}95^2 + (-86{,}893)^2}$$

oder nach Hilfsrechnung 18).:

$$Ss = \sqrt{3380502 + 862948 + 7550}$$

oder:

$$Ss = \sqrt{4251000}$$

Hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 19).:

C). . . . $Ss = 2061{,}8$

und der Richtung nach erhält man:

Hilfsrechnungen:

18). . $\log 1838{,}614^2 = 2 . \log 1838{,}614$

$\log 1838{,}614 = 3{,}2644906$
$. 2$

$\log 1838{,}614^2 = 6{,}5289812$

mithin: $1838{,}614^2 = 3380502$

$\log 928{,}95^2 = 2 . \log 928{,}95$

$\log 928{,}95 = 2{,}9679923$
$. 2$

$\log 928{,}95^2 = 5{,}9359845$

mithin: $928{,}95^2 = 862948$

$\log 86{,}893^2 = 2 . \log 86{,}893$

$\log 86{,}893 = 1{,}9389848$
$. 2$

$\log 86{,}893^2 = 3{,}8779696$

mithin: $86{,}893^2 = 7550$

3380502
862948
7550

4251000

19). . . $\sqrt{4251000} = \frac{1}{2} \cdot \log 4251000$

$\log 4251000 = 6{,}6284911$
$\cdot \frac{1}{2}$

$\log \mathrm{S}s = 3{,}3142455$

mithin: num-log Ss oder $\mathrm{S}s = 2061{,}8$

20). . . $\log 1838{,}614 = 3{,}2644906$
$- \log 2061{,}8 = -3{,}3142455$

$\log - \cos \lambda = 9{,}9502451$

mithin: $\lambda = 180^0 - 26^0\, 54'\, 20''$
oder: $\lambda = 153^0\, 5'\, 40''$

21). . . . $\log 928{,}95 = 2{,}9679923$
$- \log 2061{,}8 = -3{,}3142455$

$\log - \cos \mu = 9{,}6537468$

mithin: $\mu = 63^0\, 13'\, 15''$

22). . . . $\log 86{,}893 = 1{,}9389848$
$- \log 2061{,}8 = -3{,}3142455$

$\log\text{-}\cos \nu = 8{,}6247393$

mithin: $\nu = 180^0 - 87^0\, 35'\, 4''$
oder: $\nu = 92^0\, 24'\, 56''$

23). $1838{,}614 . 116{,}423 = \log 1838{,}614 + \log 116{,}423$

$\log 1838{,}614 = 3{,}2644902$
$+ \log 116{,}423 = 2{,}0660388$

$\log \mathrm{M}x . \mathrm{X} = 5{,}3305290$

mithin: $\mathrm{M}x . \mathrm{X} = -214056{,}8$

$928{,}95 . 214{,}48 = \log 928{,}95 + \log 214{,}48$

$\log 928{,}95 = 2{,}9679923$
$+ \log 214{,}48 = 2{,}3313868$

$\log \mathrm{M}y . \mathrm{Y} = 5{,}2993791$

mithin: $\mathrm{M}y . \mathrm{Y} = 199241{,}2$

$$\cos \lambda = \frac{\mathrm{M}x}{\mathrm{S}s}$$

$$\cos \mu = \frac{\mathrm{M}y}{\mathrm{S}s}$$

$$\cos \nu = \frac{\mathrm{M}z}{\mathrm{S}s}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\cos \lambda = -\frac{1838{,}614}{2061{,}8}$$

$$\cos \mu = \frac{928{,}95}{2061{,}8}$$

$$\cos \nu = -\frac{86{,}893}{2061{,}8}$$

oder nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 20).—22). ist:

D). . . . $\begin{cases} \lambda = 153^0\, 5'\, 40'' \\ \mu = 63^0\, 13'\, 15'' \\ \nu = 92^0\, 24'\, 56'' \end{cases}$

Es ist nun noch zu untersuchen, ob sich Ss und R zu einer Gesamtresultante R vereinigen lassen.

Es muss zu dem Ende:

$$\mathrm{M}x . \mathrm{X} + \mathrm{M}y . \mathrm{Y} + \mathrm{M}z . \mathrm{Z} = 0$$

sein.

Da dies aber nach Hilfsrechn. 23). nicht der Fall ist, und vielmehr:

$$-1838{,}614 . 116{,}423 + 928{,}95 . 214{,}48 - 86{,}893 \cdot -51{,}058 = -10379{,}02$$

beträgt, so ist eine Vereinigung von Ss und R unmöglich.

$86{,}893 \,.\, 51{,}058 = \log 86{,}893 + \log 51{,}058$

$$\begin{aligned} \log 86{,}893 &= 1{,}9389848 \\ + \log 51{,}058 &= 1{,}7080638 \\ \hline \log Mz \,.\, Z &= 3{,}6470486 \end{aligned}$$

mithin: $Mz \,.\, Z = 4436{,}58$

$$\begin{array}{r} +199241{,}2 \\ \hline 203677{,}78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -214056{,}8 \\ +203677{,}78 \\ \hline -10379{,}02 \end{array}$$

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 135. Vier beliebige Kräfte einer Ebene setze man zu einer Resultante zusammen, und zwar:

a). durch Zurückführung auf Kräfteparallelogramme,

b). durch Bildung eines Kräftepolygons.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 132.

Aufgabe 136. Es sei ein festes System von fünf materiellen Punkten einer Ebene durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &= 25 & y_1 &= 13 \\ x_2 &= 39 & y_2 &= 24 \\ x_3 &= 32 & y_3 &= 41 \\ x_4 &= 16 & y_4 &= 39 \\ x_5 &= 13 & y_5 &= 20 \end{aligned}$$

Die daran wirksamen Kräfte sind der Reihe nach $P_1 = 18$, $P_2 = 20$, $P_3 = 30$, $P_4 = 24$ und $P_5 = 17$. Die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit den Koordinaten bilden, seien:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 26^0\,30' & \beta_1 &= 63^0\,30' \\ \alpha_2 &= 35^0 & \beta_2 &= 125^0 \\ \alpha_3 &= 124^0 & \beta_3 &= 34^0 \\ \alpha_4 &= 70^0 & \beta_4 &= 20^0 \\ \alpha_5 &= 90^0 & \beta_5 &= 0^0 \end{aligned}$$

Es soll die Resultante nach Grösse und Richtung bestimmt werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 133.

Aufgabe 137. An einem festen System von fünf materiellen Punkten wirken fünf Kräfte, deren Gesamtwirkung zu bestimmen ist. Die Intensitäten der Kräfte sind $P_1 = 14$, $P_2 = 37$, $P_3 = 30$, $P_4 = 47$ und $P_5 = 65$ kg. Die Richtungen derselben mit den drei Koordinatenachsen sind:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 57^0 & \beta_1 &= 45^0 & \gamma_1 &\text{ spitz,} \\ \alpha_2 &= 63^0 & \beta_2 &= 48^0 & \gamma_2 &\text{ stumpf,} \\ \alpha_3 &= 68^0 & \beta_3 &= 52^0 & \gamma_3 &\text{ spitz,} \\ \alpha_4 &= 70^0 & \beta_4 &= 55^0 & \gamma_4 &\text{ stumpf,} \\ \alpha_5 &= 75^0 & \beta_5 &= 58^0 & \gamma_5 &\text{ spitz.} \end{aligned}$$

Die Koordinaten ihrer Angriffspunkte sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 & y_1 &= 3 & z_1 &= 4 \\ x_2 &= 4 & y_2 &= 5 & z_2 &= 9 \\ x_3 &= 0 & y_3 &= 0 & z_3 &= 0 \\ x_4 &= 6 & y_4 &= 8 & z_4 &= 11 \\ x_5 &= 7 & y_5 &= 9 & z_5 &= 12 \end{aligned}$$

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 134.

9). Vom Schwerpunkt.

a. Allgemeines über den Schwerpunkt.

Frage 68. Was versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers.

Antwort. Unter dem Schwerpunkt eines Körpers versteht man denjenigen Punkt im Innern eines Körpers, in dem man seine ganze Schwere, sein ganzes Gewicht, oder die Schwere aller seiner einzelnen Massenteile sich vereinigt denken kann.

Frage 69. Was versteht man unter den Massenteilchen eines Körpers und unter der Schwere desselben?

Erkl. 128. Das Wort Moleküle (Mehrzahl) kommt vom lat. moles, Masse, molecula, kleine Masse und bedeutet Teilchen, Massenteilchen, Kügelchen. In der Physik versteht man unter Molekül die kleinste Masse irgend eines Körpers, auf welche man durch mechanische Teilung gelangt. (Weiteres siehe in dem Lehrbuch, welches die „Allgemeinen Eigenschaften der Körper" behandelt.)

Erkl. 129. Unter elementaren Kräften (vom lat. elementarĭus) versteht man im allgemeinen die von allem Anfang an vorhanden gewesenen Kräfte, die Naturkräfte.

Antwort. Die Massenteilchen oder Moleküle[1]) eines Körpers sind die kleinsten physikalisch noch nachweisbaren Teilchen, aus denen man sich jeden Körper bestehend denkt (siehe dasjenige Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches die allgemeinen Eigenschaften der Körper behandelt). Auf jedes Molekül wirkt die Anziehung der Erde, oder was dasselbe ist, die Schwerkraft und zwar senkrecht abwärts, d. h. nach dem Mittelpunkt der Erde hingerichtet, und zwar ist die Intensität dieser Kraft auf alle Moleküle desselben und auch verschiedener Körper die gleiche. Die Summe dieser, auf die einzelnen Moleküle eines Körpers wirkenden Anziehungskräfte [elementaren[2]) Schwerkräfte] nennt man die Schwere oder das Gewicht des Körpers.

[1]). Siehe Erkl. 128.
[2]). Siehe Erkl. 129.

Frage 70. Warum nennt man den Schwerpunkt auch Mittelpunkt der Schwere?

Erkl. 130. Centrum, lat. oder Centre, franz. (spr. ssangt'r) heisst Mittelpunkt, Einigungspunkt eines Kreises, oder überhaupt die Mitte. — Gravĭtas, lat., bedeutet Schwere. Folglich heisst Centrum gravitatis soviel wie Mittelpunkt der Schwere, Schwerpunkt.

Erkl. 131. Sowohl für die Statik, als überhaupt für die Mechanik ist die Ermittelung des Schwerpunkts der in Betracht kommenden Körper unbedingt nötig, denn man kann nicht die Schwere der einzelnen Moleküle berücksichtigen, deren Grösse stets unbestimmt bleiben wird, sondern bloss die Resultierende ihrer Gesamtwirkung, und namentlich lässt sich bei der Untersuchung der Bahn, die ein bewegter Körper durchläuft (siehe das Lehrbuch der Dynamik), diese unmöglich als ein hohler Raum betrachten, sondern man muss sie notwendig als

Antwort. Der Schwerpunkt wird auch Mittelpunkt der Schwere oder Centrum gravitatis[1]) genannt, weil man bei der geringen Ausdehnung aller irdischen Körper, im Vergleich zur Erde, deren Halbmesser 63 666 197 m beträgt, die nach dem Erdmittelpunkt hinlaufenden Richtungslinien der auf die Moleküle wirkenden Anziehungskräfte als parallel ansehen kann. Alle parallelen Kräfte können aber, wie bereits gezeigt wurde, auf eine Resultante zurückgeführt werden, deren Angriffspunkt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt wird. Für die der Schwere unterworfenen Körper gibt es demnach einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte, an dem wir uns alle Kräfte vereinigt denken können, und in Bezug auf welchen die Summe der Drehungs-

[1]). Siehe Erkl. 130.

eine Linie betrachten, welche derjenige Punkt des Körpers beschrieb, in welchem die ganze, bloss rücksichtlich ihrer Schwere vorgestellte Masse vereint gedacht werden kann.

momente gleich Null ist. Dieser Punkt ist aber der Schwerpunkt.

Frage 71. Wenn nun der Schwerpunkt eines Körpers unterstützt ist, in was für einem Zustand befindet sich alsdann der Körper?

Antwort. Ist der Schwerpunkt eines Körpers unterstützt, oder greift an ihm eine senkrecht nach oben gerichtete, dem Gewicht des Körpers gleiche Kraft an, so muss (unter Berücksichtigung der Antw. auf Frage 70) der Körper im Gleichgewicht sein. Er kann weder eine fortschreitende, noch im Ganzen eine drehende Bewegung annehmen, sondern wird nur gegen diese Unterstützung einen dem Gewicht des Körpers entsprechenden Druck ausüben. Jedoch setzt diese Bedingung bloss ein Ruhen des Schwerpunkts voraus, während die Teile des Körpers sich um diesen Punkt bewegen können und in dieser Hinsicht der geringsten Kraft folgen, da einer solchen Bewegung in der Regel nur sehr unbedeutende Hindernisse entgegenstehen. Hieraus wird erklärlich, dass die Luftballons bei ihrem Schweben so leicht eine, meistens schnelle Bewegung um ihre senkrechte Achse annehmen; auch gehört hierher die schnelle rotierende Bewegung der Eismassen in den Polarmeeren.

Erkl. 132. Das in nebenstehender Antwort erwähnte Ruhen des Schwerpunkts, verbunden mit einer Beweglichkeit der Teile des Körpers nach allen Richtungen hin, kann nur bei schwimmenden Körpern als möglich gedacht oder, namentlich bei einer aus homogener Masse bestehenden Kugel wirklich dargestellt werden; in allen anderen Fällen aber findet die Unterstützung des Schwerpunkts durch physische (d. h. sinnlich wahrnehmbare, körperliche) Achsen statt, deren geometrische Mittellinien den Schwerpunkt des Körpers schneiden und dem Körper gestatten, in jeder Lage, in welche er durch Umdrehung der Achse gebracht wird, zu ruhen.

Dass die soeben erwähnten leichten Drehungen solcher Körper, die im Schwerpunkt unterstützt sind, schon durch die geringe Kraft der Adhäsion[1]) gewisser Teilchen an andern hervorgebracht werden können, beweist folgendes Experiment:

Schneidet man ein längliches Stück aus der Fahne einer Gänsefeder ab, bestreicht dieses an beiden Enden an den gegenüberstehenden Rändern mit etwas Lavendel- oder Nelkenöl und legt es auf reines Wasser, so dreht es sich um seinen Mittelpunkt und zwar mit beiden Enden nach den dem Oel entgegengesetzten Seiten.

[1]). Siehe Erkl. 134.

Frage 72. In was für einem Zustand befindet sich ein Körper, dessen Schwerpunkt nicht unterstützt ist?

Antwort. Da im Schwerpunkt die Schwere, also auch die Bedingung des Fallens befindlich gedacht wird, so kann ein Körper, dessen Schwerpunkt nicht unterstützt, also auch nicht am Fallen gehindert ist, nicht ruhen. Derselbe wird sich vielmehr so bewegen, dass sein Schwerpunkt allezeit die tiefste Stelle einnehmen, d. h. dem Zentrum der Erde so nahe als möglich kommen wird. Das Herabsinken des Schwerpunkts ist hierbei stets ein Fallen, wenn dieses auch nicht so augenfällig hervortritt, als beim freien Fall der Körper. Schwimmende Körper, durch Reibung an einer Veränderung ihrer Lage nicht gehindert, werden daher stets so zur Ruhe kommen, dass ihr Schwerpunkt den möglichst tiefsten Punkt einnimmt. Hier-

Erkl. 133. Auf dem in nebenstehender Antwort erwähnten Satz, dass der Schwerpunkt eines schwimmenden Körpers die möglichst tiefste Lage einnimmt, beruht eine interessante Spielerei, die in etwas eleganterer Darstellung an einer kleinen Figur, dem schottischen Tänzer (scottish dancer) gezeigt wird. Benetzt man eine Glasscheibe, eine ebene porzellanene Schüssel oder einen flachen Teller mit Wasser, legt darauf die gleichfalls benetzte konvexe (d. h. die auswärts gewölbte oder erhabene) Seite eines Uhrglases oder einer Glaslinse und gibt man der unterstützenden Ebene eine passende Neigung gegen den Horizont, so sinkt die durch Adhäsion[1]) zwischen den beiden sich berühren-

[1]). Siehe Erkl. 134.

den Flächen befindliche Wasserschicht etwas herab, der Schwerpunkt des Uhrglases oder der Linse kommt über den Unterstützungspunkt zu liegen und da die adhärierende Flüssigkeit das Herabgleiten verhindert, so erfolgt eine Drehung um den Unterstützungspunkt. Das adhärierende Glas sinkt zwar hierdurch etwas herab, allein da die Bedingung des Umdrehens stets aufs neue wieder erzeugt wird, so dauert dasselbe ohne Unterbrechung fort, so lange man durch eine schickliche Veränderung der Neigung sie unterhalten will. Befestigt man in dem Uhrglas oder auf der Glaslinse eine senkrecht stehende leichte Figur, so hat man den schottischen Tänzer.

Erkl. 134. Unter Adhäsion oder Flächenanziehung (vom lat. adhaerēre = anhangen, anhaften, ankleben) versteht man die Anhaftungskraft oder Anziehung sich berührender Körper gleichen oder verschiedenen Aggregatzustandes. (Siehe dasjenige Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches von den allgemeinen Eigenschaften der Körper handelt.)

durch ist zu gleicher Zeit ein einfaches Mittel geboten, den Schwerpunkt eines Körpers empierisch zu finden, indem man den Körper auf einer Flüssigkeit (z. B. eine Eisenkugel auf Quecksilber) schwimmen lässt, dabei den höchsten hervorstehenden Punkt markiert und auf diese Weise denjenigen Durchmesser erhält, welcher durch den Schwerpunkt des Körpers geht und auf dem Flüssigkeitsspiegel senkrecht steht.

Frage 73. Von welchem Einfluss ist die Drehung eines Körpers auf die Lage seines Schwerpunkts?

Erkl. 135. Aus nebenstehender Antwort ist ersichtlich, dass bloss bei festen Körpern, die ihre Form nicht ändern, von einem Schwerpunkt die Rede sein kann, während bei Flüssigkeiten im allgemeinen ein Schwerpunkt überhaupt nicht in Betracht kommt. Wenn letzteres dennoch der Fall ist, so geschieht es unter der Voraussetzung, dass eine gegebene Masse dieser Flüssigkeit während der Zeitdauer, für welche die Untersuchung gilt, ihre Gestalt nicht ändere.

Antwort. Der Schwerpunkt ist in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn man auch den Körper dreht. Denn eine solche Drehung hat denselben Erfolg, als wäre bei ungeänderter Körperlage die Richtung sämtlicher Kräfte um einen gleichen Winkel gedreht. Wie aber früher nachgewiesen wurde, ändert eine solche Drehung den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht. Es bleibt also in allen Fällen Grösse, Richtung und Angriffspunkt der Resultante und der einzelnen Molekülgewichte in Bezug auf die Lage der Moleküle dieselbe, welches auch die Lage oder Stellung des Körpers sein mag.

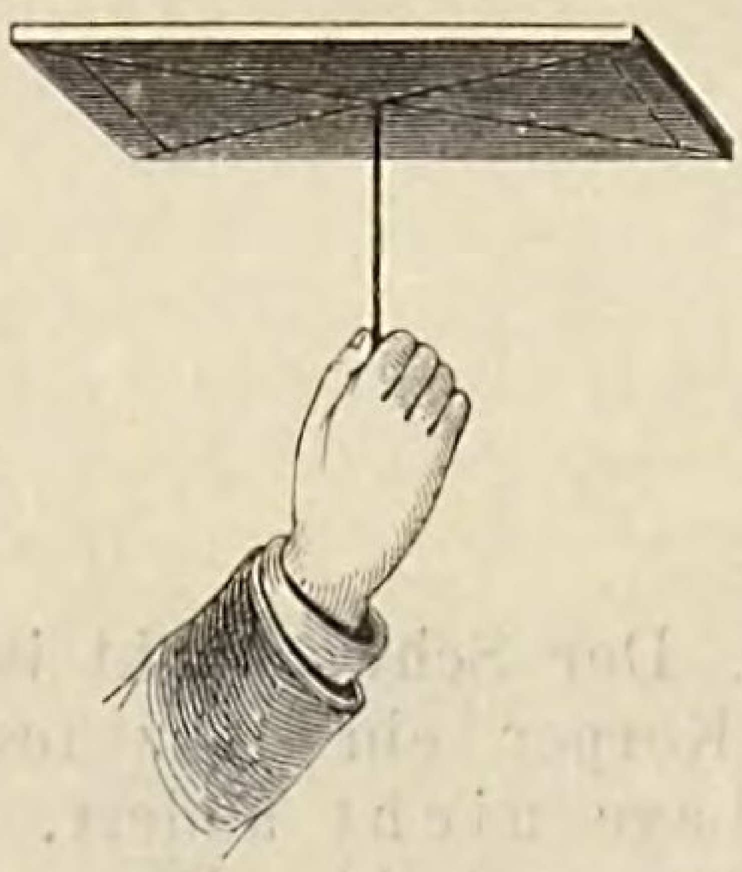
Die Wahrheit dieses Satzes, welche unmittelbar einleuchtet und nicht erst eines Beweises bedarf, wird durch alltägliche Erscheinungen bestätigt. Das Gewicht eines Steinhaufens wird nicht geändert, wenn die einzelnen Steine desselben ihre Lage untereinander ändern. Wir können die Last eines Steines in unserer Hand durch eine blosse Wendung desselben nicht ändern. Wenn wir die Wirkung einer Wage oder eines ähnlichen Instruments untersuchen, so sehen wir noch deutlicher, dass die veränderte Lage eines Gewichts oder die veränderte Stellung mehrerer Gewichte, auf die Wirkung derselben keinen Einfluss hat, so lange nur der Unterstützungspunkt derselben nicht geändert wird.

b. Ueber die Lage des Schwerpunkts und deren Ermittelung auf empierischem Weg.

Frage 74. Welche Experimente [1]) können zur Erläuterung der Lage des Schwerpunkts dienen?

Erkl. 136. Unter einem Experiment (lat. experiméntum) versteht man einen Versuch, bei dem man die Bedingungen eines Ereignisses resp. einer Naturerscheinung in kleinem Massstab absichtlich anordnet, um daraus zu bestimmen, welchen Anteil jede der Bedingungen an der gesamten Erscheinung hat.

Figur 132.



Erkl. 137. Manchmal haben die Körper, deren Schwerpunkte bestimmt werden sollen, in ihrer ganzen Ausdehnung eine gleiche Dicke, die zugleich im Verhältnis zu ihren andern Dimensionen sehr gering ist, so dass man sie unberücksichtigt lassen und den Körper nur als eine Ebene ansehen kann. Derartige Körper sind z. B. dünne Bretter, Eisenblech u. s. w.

Erkl. 138. Unter dem Mittelpunkt einer ebenen Fläche versteht man den Punkt, welcher alle durch ihn gezogene gerade Linien, die von dem Anfang der Fläche begrenzt sind, halbiert.

[1]). Siehe Erkl. 136.

Antwort. 1). Legt man einen dünnen steifen Draht oder ein Lineal, einen Bleistift u. dergl. in seiner Mitte quer auf einen schmalen Gegenstand, z. B. auf die Schneide einer Messerklinge, so kann man nach einigem Probieren den Draht oder Stab in horizontaler Lage ins Gleichgewicht bringen.

2). Legt man kreisförmige oder quadratische Flächen [1]) aus gleichmässig dickem Holz oder aus Pappe in ihrem Mittelpunkt [2]) auf die Spitze einer Nadel, siehe Figur 132, so werden dieselben nahezu im Gleichgewicht sein, das mit Hilfe kleiner Wachskügelchen vollends erreicht werden kann. Besonders gut gelingt dieses Experiment, wenn die zur Anwendung kommenden Platten in ihrem Mittelpunkt eine kleine Vertiefung, ein Pfännchen haben, und auf der Nadelspitze in drehende Bewegung versetzt werden. (Siehe den Abschnitt „Kräftepaare“.)

[1]). Siehe Erkl. 137.
[2]). Siehe Erkl. 138.

Frage 75. Was ergibt sich aus den vorerwähnten Experimenten sowohl als auch aus den in den Antworten auf die Fragen 68—70 enthaltenen Erklärungen in Bezug auf die Lage des Schwerpunkts in geraden schweren Linien resp. regelmässigen Flächen und Körpern?

Antwort. Aus den vorerwähnten Experimenten nebst den früher gegebenen Erklärungen ergibt sich leicht, dass der Schwerpunkt einer überall gleich dichten geraden Linie oder einer homogenen Stange, welche allenthalben gleichen Querschnitt hat, in deren Mitte fällt; der eines Kreises in seinen Mittelpunkt, der eines Parallelogramms in den Durchschnittspunkt seiner Diagonalen,

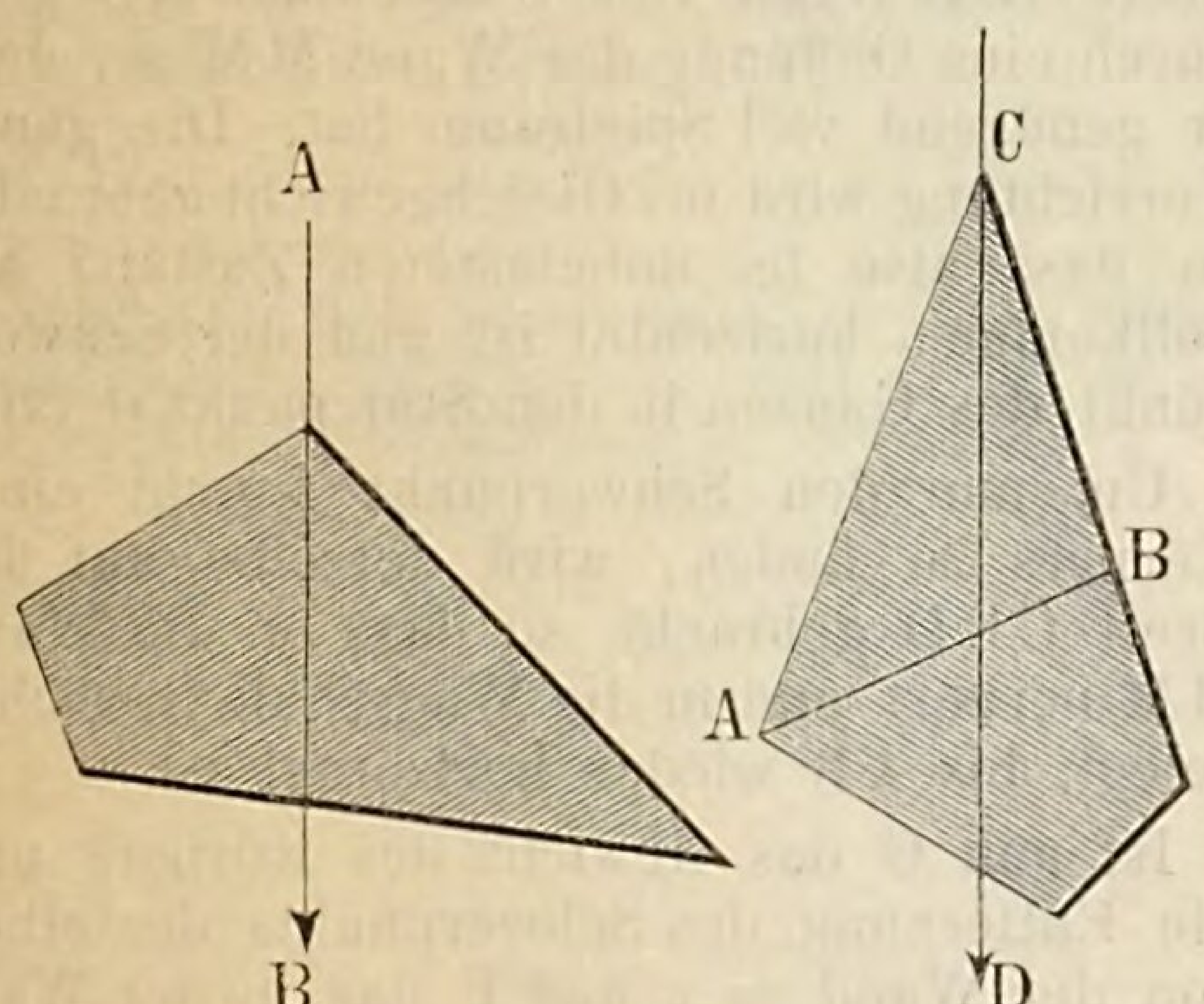
Erkl. 139. Unter dem Mittelpunkt eines Körpers versteht man den Punkt, welcher jede gerade durch ihn gehende Linie, deren Endpunkte in der Oberfläche des Körpers liegen, in zwei gleiche Teile teilt. Es ist nun leicht einzusehen, dass, wenn ein homogener Körper einen Mittelpunkt hat, dieser mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammenfällt.

der eines Parallelepipedons ebenfalls in den Durchschnittspunkt seiner Diagonalen, der einer Walze in den Mittelpunkt[1]) ihrer Achse und der einer Kugel in ihren Mittelpunkt. Immer vorausgesetzt, dass diese Flächen und Körper homogene, d. h. solche von gleichförmiger Dichtigkeit sind.

[1]). Siehe Erkl. 139.

Frage 76. Wie kann man auf dem Wege des Versuchs den Schwerpunkt unregelmässig begrenzter ebener Flächen ermitteln?

Figur 133.



Erkl. 140. Jede durch den Schwerpunkt eines Systems gelegte Ebene heisst eine Schwerebene. Ebenso wird die gerade Linie, die den Schwerpunkt des Systems enthält, Schwerlinie genannt.

In konstruktiver Hinsicht ist hiernach der Schwerpunkt bestimmt durch zwei Schwerlinien, oder durch eine Schwerebene und eine Schwerlinie, welche die Ebene schneidet.

Antwort. Soll der Schwerpunkt unregelmässiger oder auch solcher Flächen gesucht werden, deren Dichtigkeit nicht überall die gleiche ist, so geschieht dies auf folgende einfache Art: Man hänge den betreffenden Körper, z. B. eine dünne Blechplatte an irgend einem Punkt mittels eines Fadens auf, der mit etwas Wachs befestigt sein kann, siehe Figur 133, so wird er in einer gewissen Lage zur Ruhe kommen. Da die Schwerkraft, welche den Körper senkrecht herabzieht, ihren Angriffspunkt im Schwerpunkt hat, so muss dieselbe, wenn der Körper nicht fällt, durch eine ihr gerade entgegengesetzt gerichtete Kraft, welche ebenfalls durch den Schwerpunkt gehen muss, aufgehoben sein. Diese in der Richtung des Fadens wirkende Kraft ist die Festigkeit des Fadens. Es muss somit die nach der Richtung des Fadens verlängerte Linie $\overline{AB}$ [1]), welche man deutlich auf die Platte zeichnet, durch den Schwerpunkt gehen.

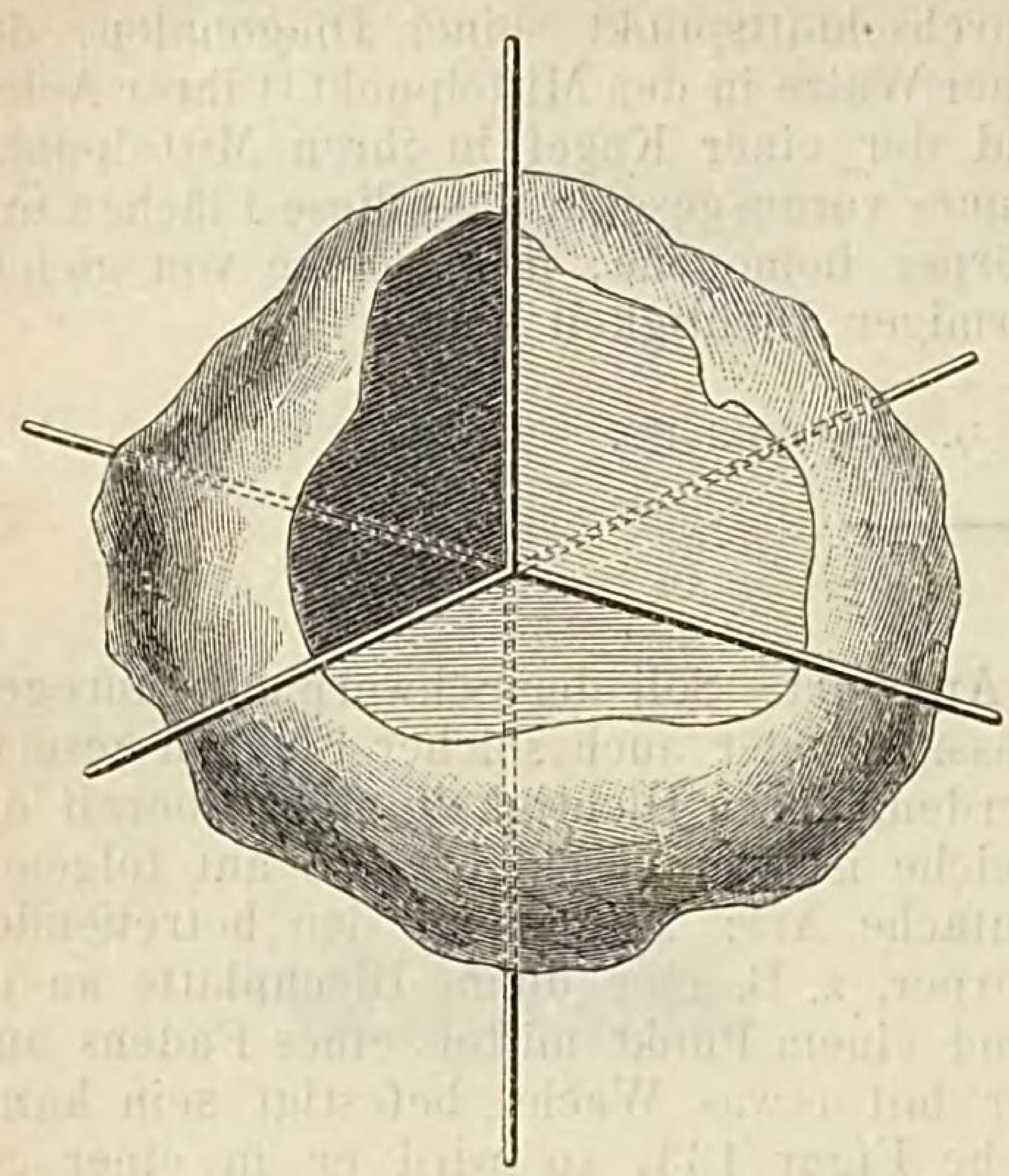
Befestigt man nun den Faden an einem andern Punkt des flächenförmigen Körpers, so wird es auch jetzt eine Lage geben, in welcher der Körper zur Ruhe kommt. Auch in diesem Fall wird die geradlinige Verlängerung des Fadens $\overline{CD}$ durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, so dass der Schwerpunkt selbst der Durchschnittspunkt der beiden Linien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist, und wenn man die Platte genau in diesem Punkt auf die Spitze einer senkrecht stehenden Nadel legt, so wird sie sich darauf erhalten. Letzteres ist allerdings insofern schwierig, als die geringste Abweichung ein Herabfallen der Platte bewirkt.

[1]). Siehe Erkl. 140.

Frage 77. Wie kann man auf dem Weg des Versuchs den Schwerpunkt eines unregelmässig begrenzten Körpers finden, welcher sich nach allen Richtungen des Raumes ziemlich gleichmässig ausdehnt?

Antwort. a). Man nehme eine grosse Kartoffel, eine Runkelrübe oder einen sonst leicht zerlegbaren Körper und verfahre in

Figur 134.

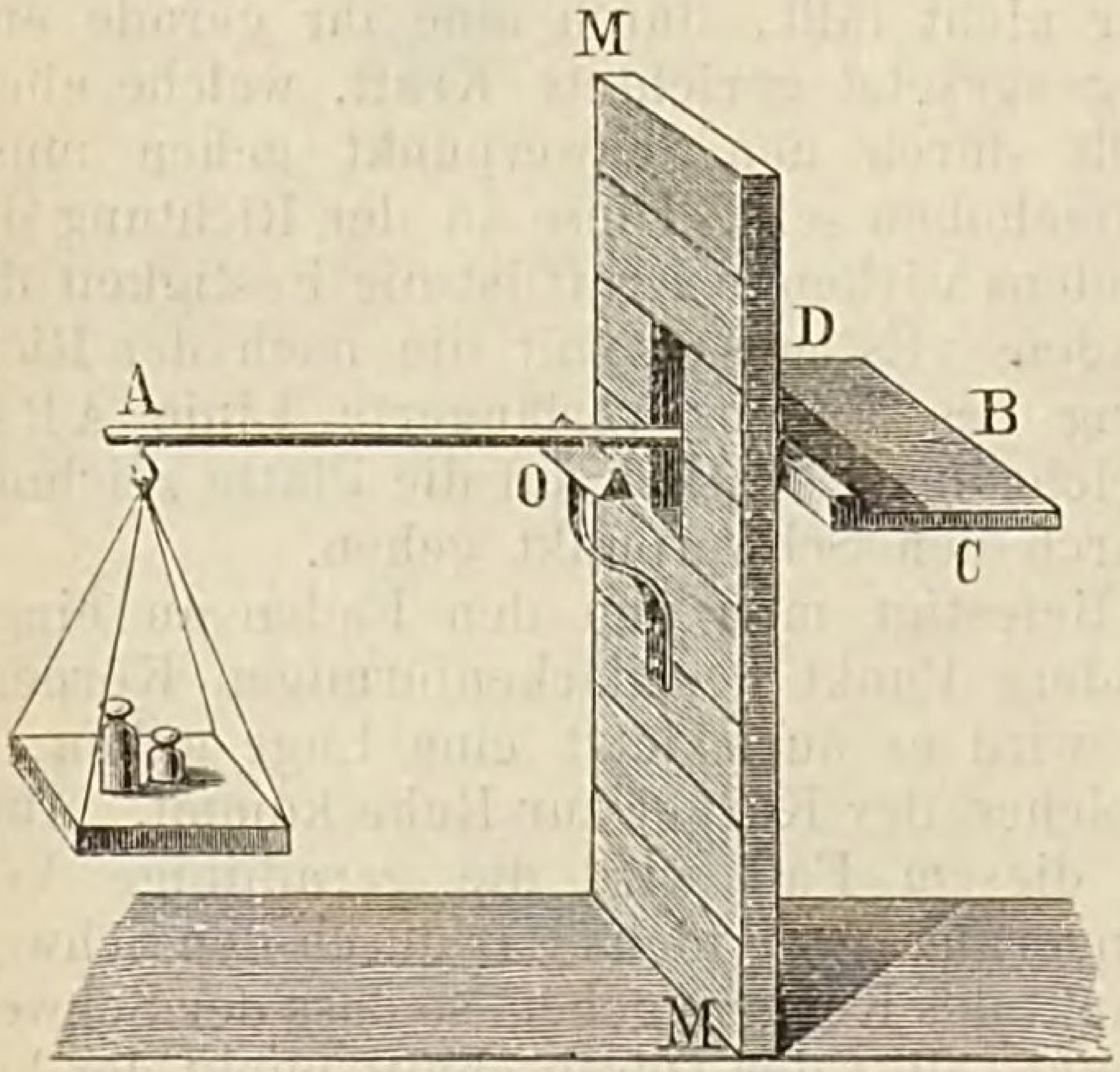


der oben angegebenen Weise, nur mit dem Unterschied, dass man die Richtung des Fadens jedesmal mittels eines Drahtes markiert, den man durch den Körper steckt und vorläufig wieder entfernt. Steckt man dann schliesslich die Drähte wieder ein, so treffen sie einander in demselben Punkt, wovon man sich dadurch leicht überzeugen kann, dass man ein passendes Stück aus dem Körper entfernt (siehe Figur 134).

b). Zu Schwerpunktsbestimmungen grösserer und schwer zerlegbarer Körper kann man sich der im Nachfolgenden beschriebenen Vorrichtung bedienen.

Es sei $\overline{AB}$, siehe Figur 135, ein in 0 gestützter oder aufgehängter Wagebalken, welcher in A eine Schale zur Aufnahme von Gewichten und andererseits das horizontale Brett CBD trägt. Der Wagebalken $\overline{AB}$ geht durch eine Oeffnung der Wand MM so, dass er genügend viel Spielraum hat. Die ganze Vorrichtung wird ins Gleichgewicht gebracht, so dass also im unbelasteten Zustand $\overline{AB}$ vollkommen horizontal ist und der Schwerpunkt des Ganzen in den Stützpunkt 0 fällt.

Figur 135.



Um nun den Schwerpunkt irgend eines Körpers zu finden, wird derselbe auf das Brett CBD gebracht, so dass er die Wand MM berührt und in die Wagschale Gewichte gelegt, bis $\overline{AB}$ wieder horizontal ist.

Ist nun G das Gewicht des Körpers und die Entfernung des Schwerpunkts desselben von der Wand $= x$ und P das in der Wagschale befindliche Gewicht, so muss nach dem Satz von den statischen Momenten, in Bezug auf Figur 136:

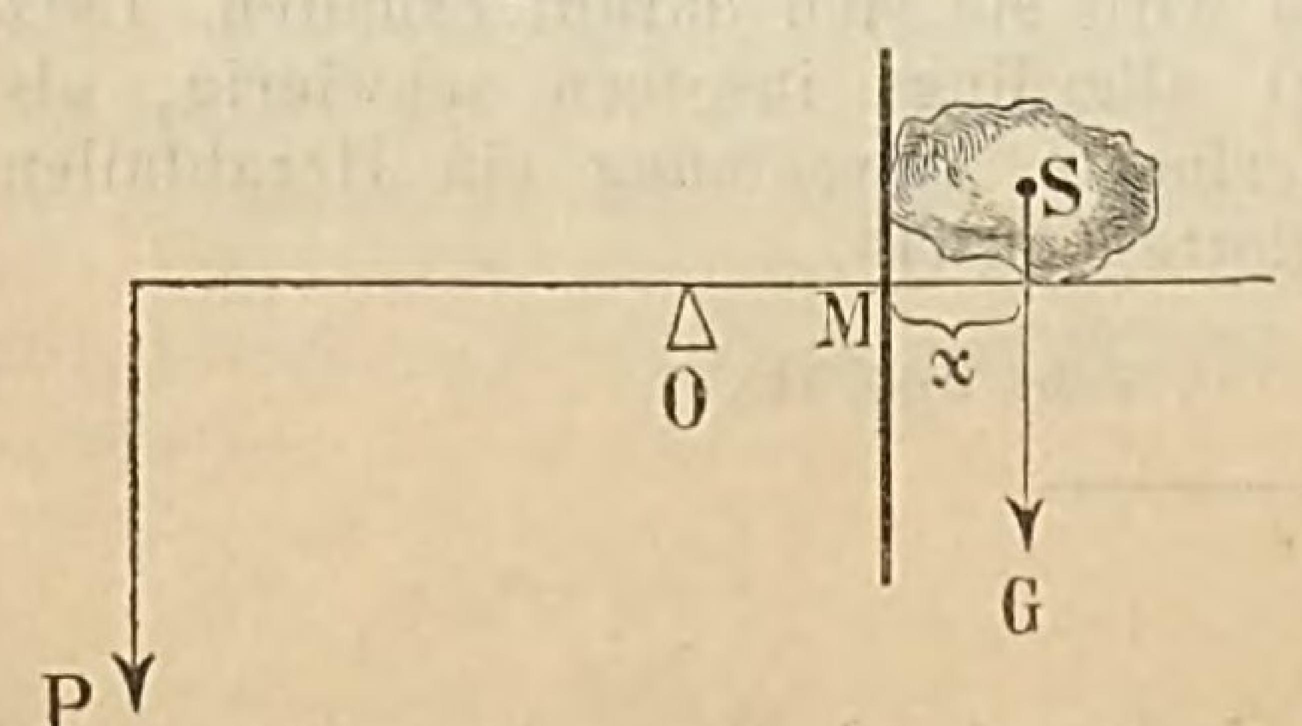
$$P \cdot \overline{AO} = G(\overline{OM} + x)$$

sein, woraus sich ergibt:

$$x = \frac{P \cdot \overline{AO} - G \cdot \overline{OM}}{G}$$

Es hat also die senkrechte Schwerebene die genannte Entfernung x von der Wand. Durch wiederholtes Umlegen auf eine andere Seite erhält man im Durchschnitt der gefundenen Schwerlinien den Schwerpunkt des Körpers.

Figur 136.



Anmerkung 4. Bei einem homogenen Körper ist die Lage des Schwerpunkts ganz unabhängig von dem Massengehalt des Körpers, vielmehr nur abhängig von der Form und Lage des Raumes, welchen der Körper einnimmt und welcher auf rein geometrischem Weg sich bestimmen lässt. Es ist daher bei der Schwerpunktsbestimmung eines solchen Körpers gar nicht erforderlich, an einen mit Masse erfüllten Raum zu denken; vielmehr kann man denselben wie einen geometrischen Körper behandeln, und ist es daher zulässig, auch von den Schwerpunkten geometrischer Körper zu reden.

Wie von dem Schwerpunkt eines geometrischen Körpers, so kann auch von dem Schwerpunkt einer geometrischen Fläche die Rede sein. Endlich kann man sich ein System von materiellen Punkten derart angeordnet denken, dass die ganze Masse desselben als über eine Linie stetig und gleichförmig verteilt anzusehen ist.

c. Schwerpunktsbestimmungen für Linien, ebene Figuren und Körper durch Konstruktion und Rechnung.

α). Schwerpunkte von Linien.

Frage 78. Wo liegt der Schwerpunkt einer homogenen geraden Linie?

Erkl. 141. Der Schwerpunkt für zwei gleich schwere materielle Punkte liegt in der Mitte der geraden Verbindungslinie derselben.

Antwort. Der Schwerpunkt einer homogenen (aus gleich schweren materiellen Punkten bestehenden) geraden Linie fällt mit dem Mittelpunkt derselben zusammen (wie bereits in Antwort auf Frage 75 angedeutet wurde).

Beweis. Der Schwerpunkt je zweier gleich weit vom Mittelpunkt abstehender Punkte der Geraden ist nach der Theorie der parallelen Kräfte der Mittelpunkt selbst, also ist auch der Schwerpunkt aller materiellen Punkte der Mittelpunkt, da auf beiden Seiten desselben gleich viel materielle Punkte liegen.

Frage 79. Wo liegt der Schwerpunkt des Umfangs eines Dreiecks?

Erkl. 142. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „Eine gerade Linie, welche zwei Seiten eines Dreiecks so teilt, dass die homologen Abschnitte proportioniert sind, ist der dritten parallel.“

Erkl. 143. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der beiden andern.“

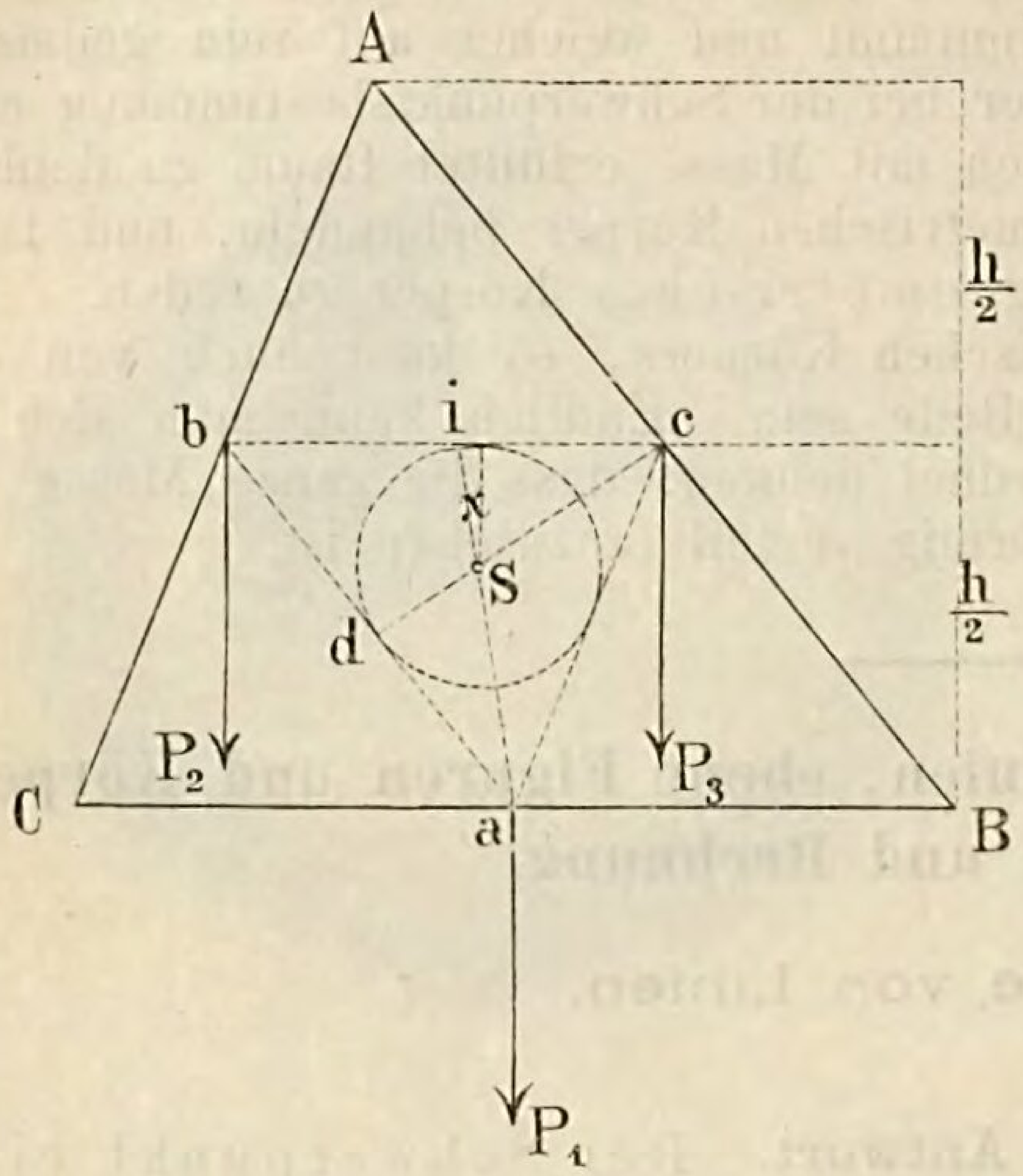
Erkl. 144. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „In jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist der Durchschnittspunkt der die Winkel halbierenden Linien.“

Antwort. Der Schwerpunkt des Umfangs eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des in dasjenige Dreieck beschriebenen Kreises, welches man durch Verbindung der Halbierungspunkte der Seiten erhält.

Beweis. Die Schwerpunkte der drei Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$, siehe Figur 137, sind nach der Antw. auf die vorige Frage resp. die Halbierungspunkte a, b und c; in diesen Punkten greifen also die Gewichte der drei Seiten an, welche sich jedoch wie die Längen der Seiten verhalten. Um zu dem Angriffspunkt der Resultante dieser drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 zu kommen, verbinden wir zuerst zwei miteinander, etwa die in b und c angreifenden P_2 und P_3, die Resultante dieser beiden Kräfte habe ihren Angriffspunkt in dem Punkt i der Verbindungslinie, dann ist:

$$\overline{bi} : \overline{ic} = P_3 : P_2$$

Figur 137.



Erkl. 145. Da S der Mittelpunkt eines in das Dreieck abc einbeschriebenen Kreises und also von den drei Dreiecksseiten gleich weit entfernt ist, so kann man sich von Punkt S auf jede Dreiecksseite ein Lot gefällt denken, deren jedes = X (siehe Figur 137) ist.

Da nun der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich ist dem Produkt aus Grundlinie mal halber Höhe, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks:

$$abc = \frac{1}{2}x \cdot \overline{ab} + \frac{1}{2}x \cdot \overline{ac} + \frac{1}{2}x \cdot \overline{bc}$$

oder da:

$$\overline{ab} = \frac{1}{2}\overline{AB},\ \overline{ac} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ und } \overline{bc} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

so ist auch der Flächeninhalt des Dreiecks:

$$abc = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}\overline{BC}$$

oder:

$$abc = \frac{1}{4}x(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$$

Der Flächeninhalt vom Dreieck:

$$ABC = \overline{BC} \cdot \frac{h}{2}$$

Da nun

$$\triangle ABC = 4 \cdot \triangle abc$$

so ist auch:

$$\triangle ABC = 4 \cdot \frac{1}{4}x(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$$

oder:

$$\triangle ABC = x(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$$

Bezeichnet man nun den Umfang des Dreiecks ABC mit U und den Flächeninhalt desselben mit F, so ist:

$$F = xU$$

hieraus erhält man für den Schwerpunktsabstand:

$$x = \frac{F}{U}$$

Da aber

$$P_3 : P_2 = \overline{AB} : \overline{AC}$$

und

$$\overline{cB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

und

$$\overline{bC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

so ist auch:

$$\overline{bi} : \overline{ic} = \overline{cB} : \overline{bC}$$

oder da

$$\overline{ba} = \overline{cB} \text{ [1]}$$

und

$$\overline{ac} = \overline{bC}$$

so ist auch:

$$\overline{bi} : \overline{ic} \text{ oder } P_3 : P_2 = \overline{ba} : \overline{ac}$$

Verbindet man i mit a, so ist hiernach [2]) $\overline{ia}$ die Halbierungslinie des Winkels bac. In der Linie $\overline{ia}$ muss nun der gesuchte Schwerpunkt liegen, da er der Angriffspunkt der Resultante der beiden in i und a wirkenden Kräfte ist. Hätten wir die Kräfte P_1 und P_2 vereinigt, so hätte sich auf dieselbe Weise ergeben, dass der Schwerpunkt S auf der Halbierungslinie $\overline{dc}$ des Winkels bca liegen muss, also kann es nur der Durchschnittspunkt beider Halbierungslinien, d. h. der Mittelpunkt des in das Dreieck abc beschriebenen Kreises sein. [3])

[1]) Siehe Erkl. 142.
[2]) Siehe Erkl. 143.
[3]) Siehe Erkl. 144.

Frage 80. Wo liegt der Schwerpunkt von vier Linien, die ein Parallelogramm einschliessen?

Antwort. Aus Antw. auf Frage 79 folgt unmittelbar, dass der Schwerpunkt des Umfangs eines Parallelogramms im Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien liegt, die die Schwerpunkte je zweier parallelen Seiten verbindet.

Frage 81. Wo liegt der Schwerpunkt des Umfangs eines regelmässigen Vielecks oder regulären Polygons?

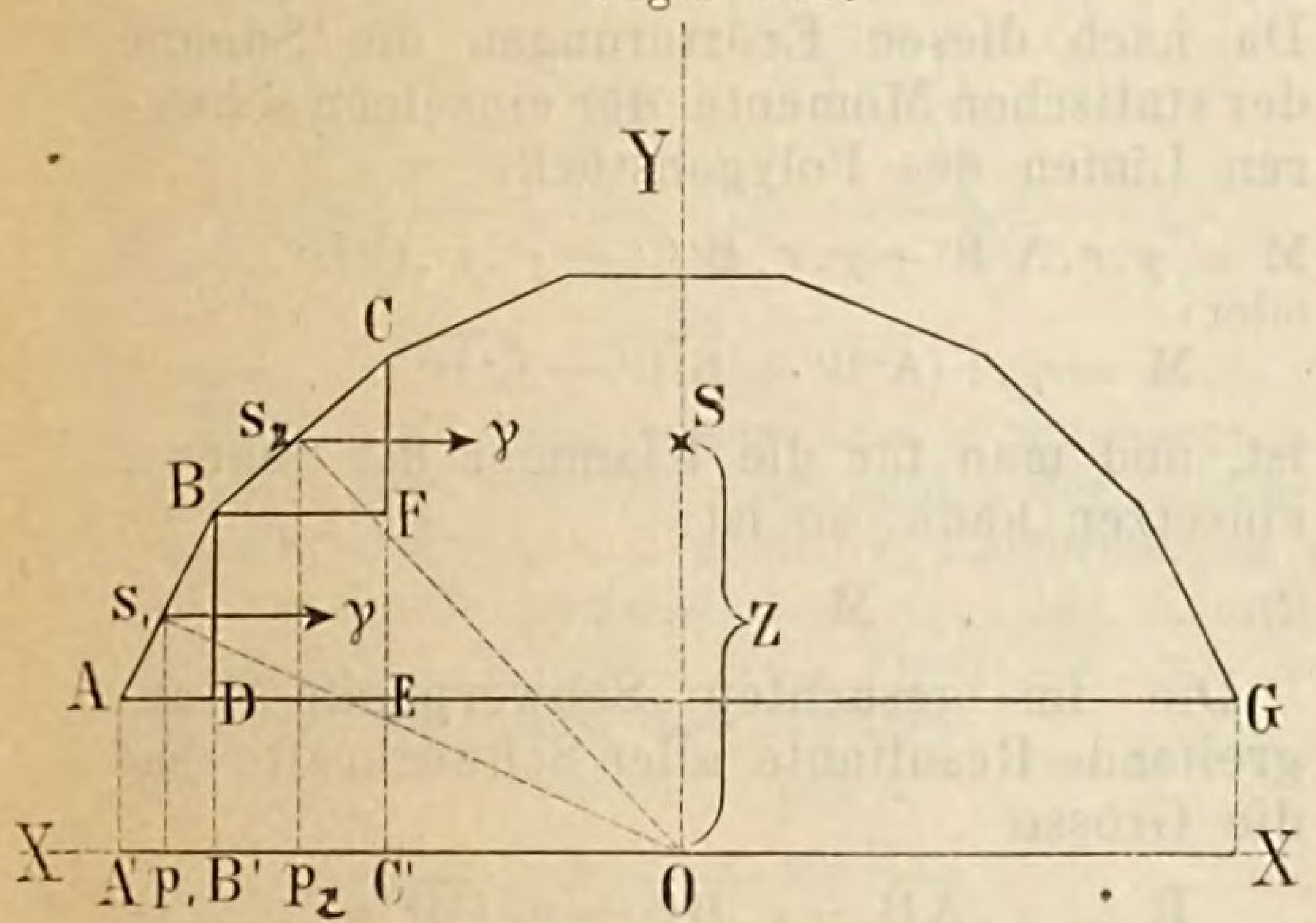
Erkl. 146. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „Um jedes und in jedes reguläre Polygon lässt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt des einen Kreises ist auch der des andern und heisst der Mittelpunkt des Polygons.“

Antwort. Der Schwerpunkt der gesamten Linien einer regelmässigen Figur liegt in demjenigen Punkt, welcher von dem Schwerpunkt jeder einzelnen Linie gleich weit absteht, also im Zentrum eines in oder um dieselbe beschriebenen Kreises. [1]).

[1]) Siehe Erkl. 146.

Frage 82. Wo liegt der Schwerpunkt von dem symmetrischen Stück eines aus schweren Linien zusammengesetzten regulären Polygons.

Figur 138.



Erkl. 147. Symmetrisch (griech. symmetros, von syn und métron, Mass) heisst soviel wie ebenmässig, verhältnismässig, übereinstimmend in der Anordnung der Teile. Das Eigentümliche einer symmetrischen Figur besteht darin, dass dieselbe aus zwei gleichen Hälften zusammengesetzt ist, die einander in den einzelnen Teilen, aber in umgekehrter Ordnung gleich sind, sich also zu einander verhalten wie das Spiegelbild zu seinem Gegenstand. Die Gerade, durch welche die symmetrische Figur in zwei gleiche Hälften zerlegt wird, heisst Symmetrieachse.

Antwort. Der Schwerpunkt von dem symmetrischen Stück eines regulären Polygons liegt in der Symmetrieachse [1]) und zwar ist der Abstand des Schwerpunkts von dem zur begrenzenden Sehne des Polygonstücks parallel laufenden Durchmesser gleich dem Produkt aus dem Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises mit der genannten Sehne s, dividiert durch den Umfang u des vorliegenden Polygonstücks, oder:

$$z = \frac{rs}{u}$$

Beweis. Die Länge einer Seite des regulären Polygons sei a und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises r. Man ziehe durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O, siehe Figur 138, der beiden zu dem regulären Polygon gehörigen Kreise eine Parallele XX mit der das symmetrische Stück begrenzenden Sehne AG. Die in O zu XX errichtete Normale oder Senkrechte OY teilt das Stück des Polygons in zwei gleiche Teile; der Schwerpunkt S wird sich deshalb auf dieser Linie, der sog. Symmetrieachse befinden, so dass es sich nur um den Abstand Z = SO von der Linie XX handelt. Um diesen Abstand zu finden, denke man sich das Gewicht jeder Vielecksseite senkrecht oder normal [1]) zu OY gerichtet. Die erste dieser Kräfte hat, wenn mit γ das Gewicht

[1]) Siehe Erkl. 147.

Erkl. 148. Normal heisst in der Geometrie soviel wie winkelrecht, senkrecht.

Erkl. 149. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zwei Winkeln des andern sind.“

Die beiden Dreiecke ABD und $s_1 p_1 O$ in Figur 138 sind zunächst beide rechtwinklig; aber es ist auch:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle s_1 O p_1$$

denn da die Linie $O s_1$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht (als Höhe in einem gleichschenkligen Dreieck), so ist:

$$\sphericalangle A s_1 p_1 + \sphericalangle p_1 s_1 O = R$$
$$\sphericalangle p_1 s_1 O + \sphericalangle s_1 O p_1 = R$$

folglich ist:

$$\sphericalangle A s_1 p_1 + \sphericalangle p_1 s_1 O = \sphericalangle p_1 s_1 O + \sphericalangle s_1 O p_1$$
$$- \sphericalangle p_1 s_1 O = - \sphericalangle p_1 s_1 O$$
$$\sphericalangle A s_1 p_1 = \sphericalangle s_1 O p_1$$

oder da:

$$\sphericalangle A s_1 p_1 = \sphericalangle ABD$$

(als korrespondierende Winkel)

so ist auch:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle s_1 O p_1$$

folglich ist:

$$\triangle ABD \sim \triangle s_1 O p_1$$

In gleicher Weise lässt sich nachweisen, dass

$$\triangle BCF \sim \triangle s_2 p_2 O$$

ist.

der Längeneinheit einer Polygonseite bezeichnet wird, die Grösse $\gamma \cdot \overline{AB}$ und greift in der Mitte s_1 von $\overline{AB}$ an; die Grösse der zweiten Kraft ist $\gamma \cdot \overline{BC}$ und ihr Angriffspunkt s_2 in der Mitte von $\overline{BC}$. Die Summe der statischen Momente aller dieser Kräfte in Bezug auf den Punkt O ist daher

$$1). \ldots \gamma . \overline{AB} . \overline{s_1 p_1} + \gamma . \overline{BC} . \overline{s_2 p_2} \ldots + \gamma . a . \overline{s_n p_n}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und $s_1 p_1 O$ 2) folgt, dass

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{s_1 O} : \overline{s_1 p_1}$$

oder:

$$\overline{AB} . \overline{s_1 p_1} = \overline{AD} . \overline{s_1 O} \text{ oder } \overline{AD} . r$$

in gleicher Weise ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BCF und $s_2 p_2 O_1$, dass

$$\overline{BC} : \overline{BF} = \overline{s_2 O} : \overline{s_2 p_2}$$

oder:

$$\overline{BC} . \overline{s_2 p_2} = \overline{BF} . \overline{s_2 O} \text{ oder } \overline{BF} . r$$

folglich kann man der obigen Grösse 1). auch folgende Form geben:

$$\gamma . \overline{AD} . r + \gamma . \overline{BF} . r + \cdots\cdots$$

Für $\overline{AD}$ resp. $\overline{BF}$ kann man auch $\overline{A'B'}$ resp. $\overline{B'C'}$ einsetzen; diese letzteren Linien sind die Projektionen der resp. Polygonseiten und bilden zusammen die Sehne s. Da nach diesen Erörterungen die Summe der statischen Momente der einzelnen schweren Linien des Polygonstücks

$$M = \gamma . r . \overline{A'B'} + \gamma . r . \overline{B'C'} + \gamma . r . \overline{C'D'} \ldots . +$$

oder:

$$M = \gamma . r (\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} \ldots . +)$$

ist, und man für die Klammer die Sehne s einsetzen kann, so ist:

$$2). \quad \ldots\ldots \quad M = \gamma . r . s$$

Die im gesuchten Schwerpunkt S angreifende Resultante aller Schwerkräfte hat die Grösse

$$R = \gamma . \overline{AB} + \gamma . \overline{BC} + \gamma . \overline{CD} + \ldots .$$

oder:

$$R = \gamma (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots .)$$

setzt man für diese Klammer den Umfang u, bestehend aus der Summe der gegebenen n Seiten a des Polygonstücks, so ist die im Schwerpunkt s angreifende Resultante

$$R = \gamma . u$$

dieselbe ist normal zu OY gerichtet und da ihr Hebelarm $\overline{OS} = Z$ ist, so ist ihr Moment in Bezug auf den Punkt O:

$$3). \quad \ldots\ldots \quad M_1 = \gamma . u . z$$

1) Siehe Erkl. 148.

Für den Fall des Gleichgewichts muss aber dieses Moment gleich dem Moment der Einzelkräfte oder

$$M = M_1$$

sein, folglich auch

$$\gamma \,.\, r \,.\, s = \gamma \,.\, u \,.\, z$$

oder:

$$r\,s = u\,z$$

und hieraus erhält man für den Abstand Z des Schwerpunkts S von dem Durchmesser XX:

$$4). \quad . \; . \; . \; . \; . \; Z = \frac{r\,s}{u}$$

was zu beweisen war.

Frage 83. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens?

Antwort. Der Abstand des Schwerpunkts eines Kreisbogens vom Zentrum des zugehörigen Kreises ist die vierte Proportionale zum Halbmesser r, der Sehne s und dem Bogen b.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Antwort auf die vorige Frage 82, in welcher die Formel für ein symmetrisches Polygonstück ohne Rücksicht auf die Zahl der Polygonseiten entwickelt wurde. Diese Formel gilt demnach auch bei beliebig wachsender Seitenzahl, daher auch für den Kreisbogen, den man als ein Polygonstück aus unendlich vielen unendlich kleinen Seiten bestehend ansehen kann. Setzen wir statt des Umfangs u in Gleichung 4). der Antwort auf Frage 82 die Länge des Kreisbogens b, so ist der Abstand Z des Schwerpunkts vom Zentrum

$$1). \quad . \; . \; . \; . \quad Z = \frac{r\,s}{b}$$

Hiernach verhält sich der Bogen b zur Sehne s wie der Halbmesser r des Kreises zum Schwerpunktsabstand z, oder

$$b : s = r : z$$

Ist der zum Bogen gehörige Mittelpunktswinkel $= 2\,\alpha$, so ist der Bogen

$$b = \frac{2\,r \,.\, 2\,\alpha \,.\, \pi}{360}$$

die Sehne

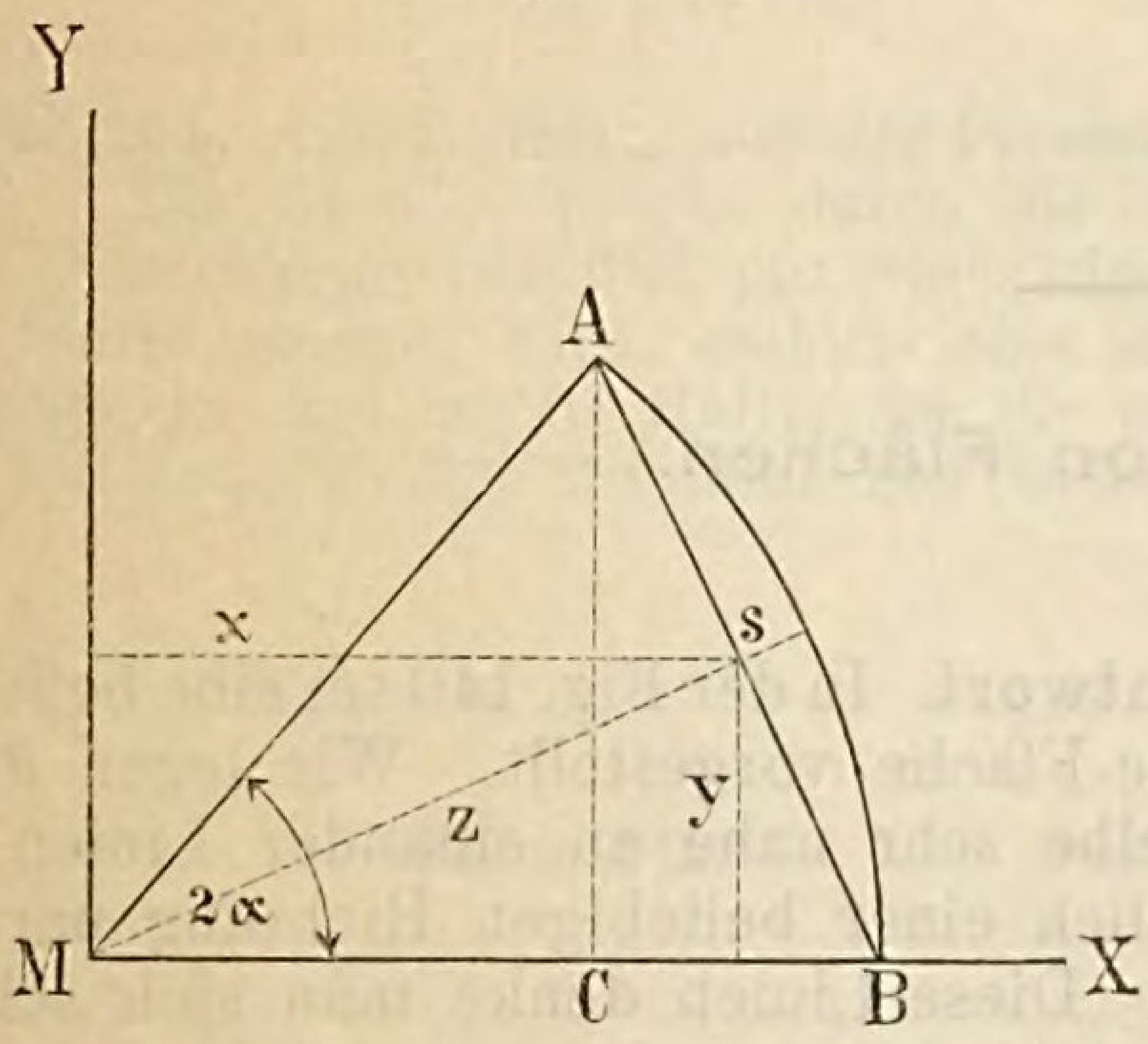
$$s = 2\,r \,.\, \sin \alpha$$

und diesem nach

$$\frac{2\,r \,.\, 2\,\alpha \,.\, \pi}{360} : 2\,r \,.\, \sin \alpha = r : z$$

folglich der Abstand des Schwerpunkts vom Zentrum des Kreises:

Figur 139.



Erkl. 150. Sind ausser dem in nebenstehender Antwort erörterten Abstand z des Schwerpunkts vom Zentrum noch die Entfernungen x und y des Schwerpunkts S von den Koordinatenachsen MY und MX, Figur 139, zu bestimmen, so erhält man zunächst:

$$x = z \,.\, \cos \alpha$$

$$y = z \,.\, \sin \alpha$$

Setzt man den in nebenstehender Antwort berechneten Wert für z ein, so ist:

$$x = \frac{r \,.\, \sin \alpha \,.\, \cos \alpha}{\alpha}$$

$$y = \frac{r \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \alpha}{\alpha}$$

oder da nach einer goniometrischen Formel

$$2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha = \sin 2\,\alpha$$

ist, so erhält man für

$$x = \frac{r \,.\, \sin 2\,\alpha}{2\,\alpha}$$

$$y = \frac{r \,.\, \sin \alpha^2}{\alpha}$$

Für den Halbkreis ist

$$2\alpha = \pi$$

$$\sin\alpha = 1$$

daher:

$$Z = \frac{r \cdot 2}{\pi}$$

$$x = 0$$

und $y = 0$

Für den Viertelkreis ist:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

daher:

$$Z = \frac{r\,2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$X = \frac{2r}{\pi}$$

$$Y = \frac{2r}{\pi}$$

$$Z = \frac{r \cdot 2r \cdot \sin\alpha \cdot 180}{2r \cdot \alpha \cdot \pi}$$

oder:

2). . . $Z = \dfrac{180 \cdot r \cdot \sin\alpha}{\alpha \cdot \pi}$ [1]).

oder nach trigonometrischer Bezeichnung:

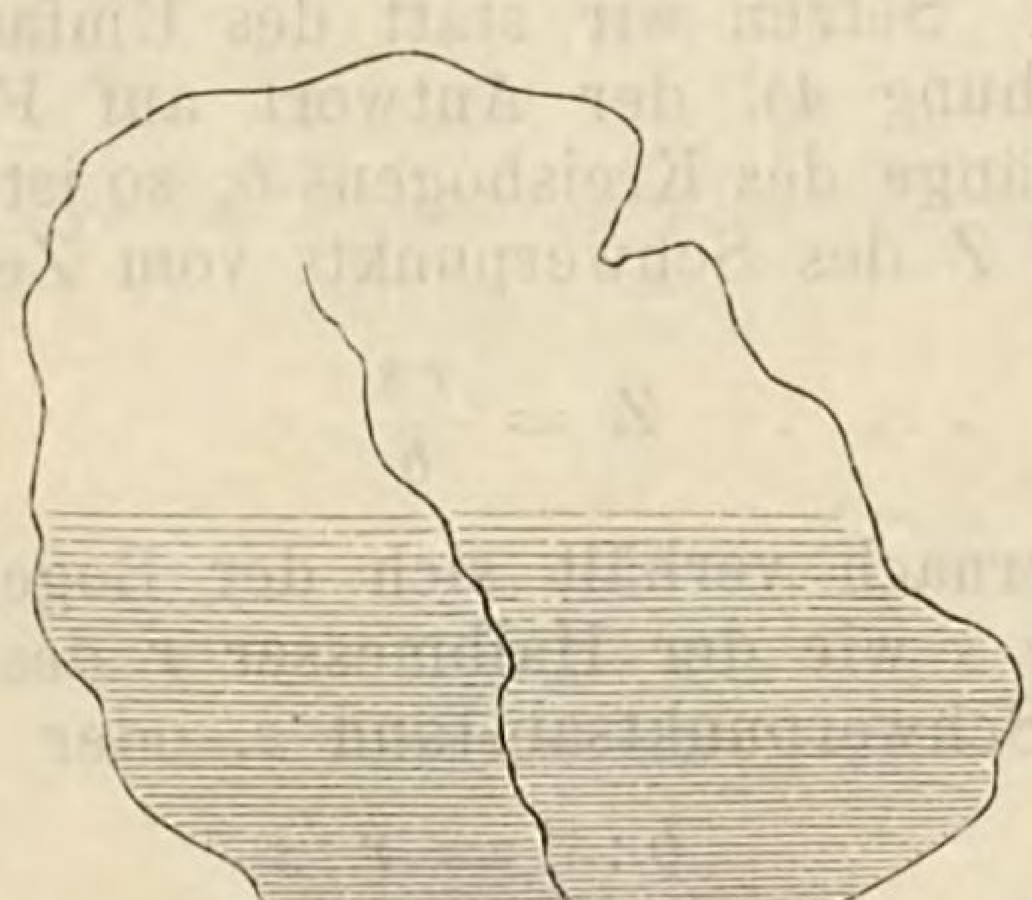
$$Z = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\alpha}$$

[1]) Siehe Erkl. 150 und Erkl. 157.

β). Schwerpunkte von Flächen.

Frage 84. Auf welche Weise ermittelt man im allgemeinen den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Fläche?

Figur 140.



Antwort. In der Fig. 140 sei eine beliebige ebene Fläche vorgestellt. Wir legen durch dieselbe sehr nahe an einander Linien, die sämtlich einer beliebigen Richtung parallel sind. Diese Linien denke man sich schwer und verbinde deren Schwerpunkte, d. h. ihre Mittelpunkte, durch eine Linie. Diese wird im allgemeinen eine krumme Linie sein und das Gewicht der ganzen Fläche enthalten; ihr Schwerpunkt wird daher auch der Schwerpunkt der Fläche sein müssen. Ist diese schwere Linie eine gerade, so wird sie nach Erkl. 140 Schwerlinie und geht deshalb durch den Schwerpunkt der Fläche. Durch dieses Gesetz ist die Bestimmung des Schwerpunktes bei ebenen Flächen auf die von Linien zurückgeführt.

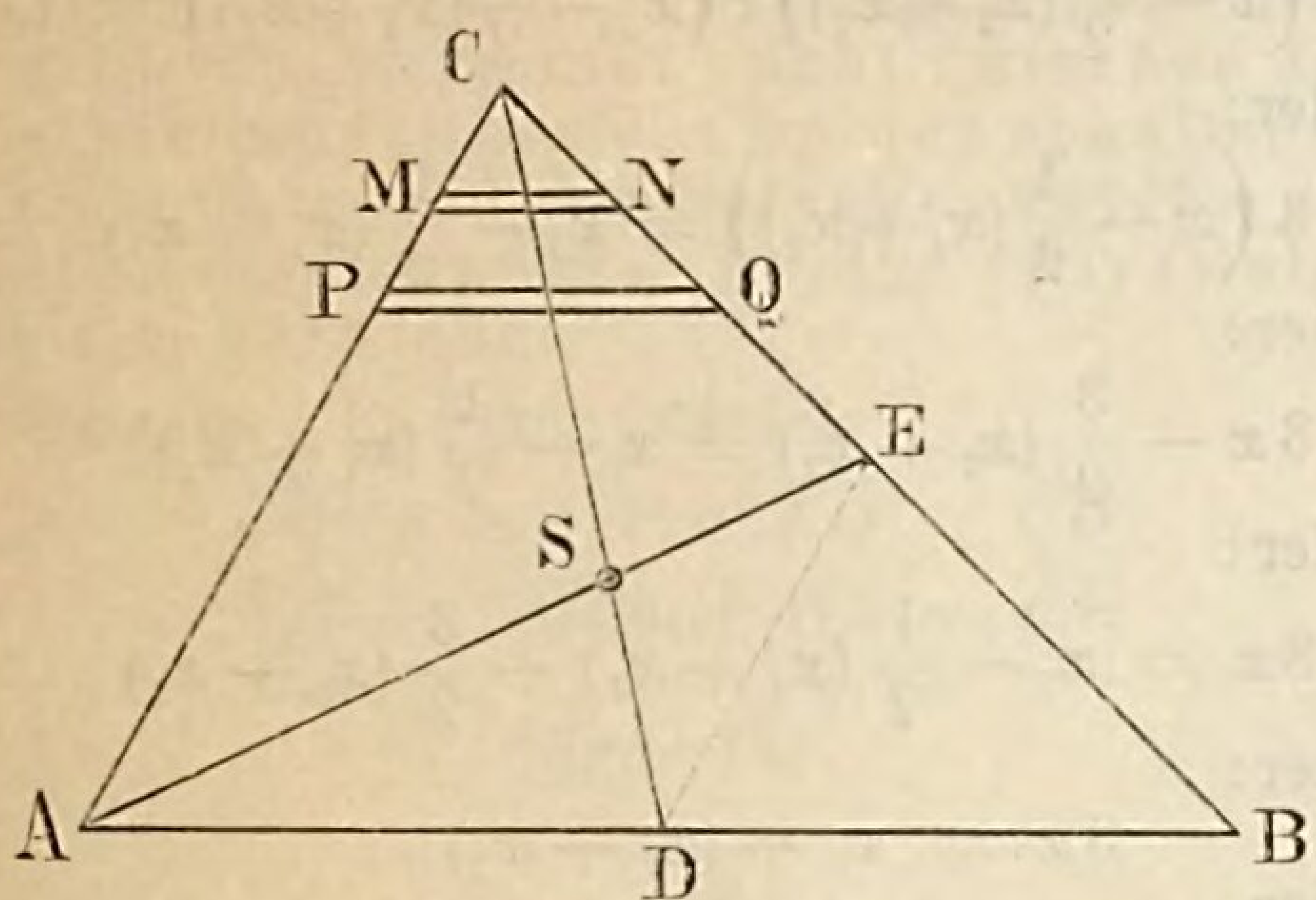
Frage 85. Wo liegt der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche?

Antwort. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt:

a). in dem Durchschnittspunkt der Transversalen[1]), welche die Seiten des Dreiecks halbieren, so dass

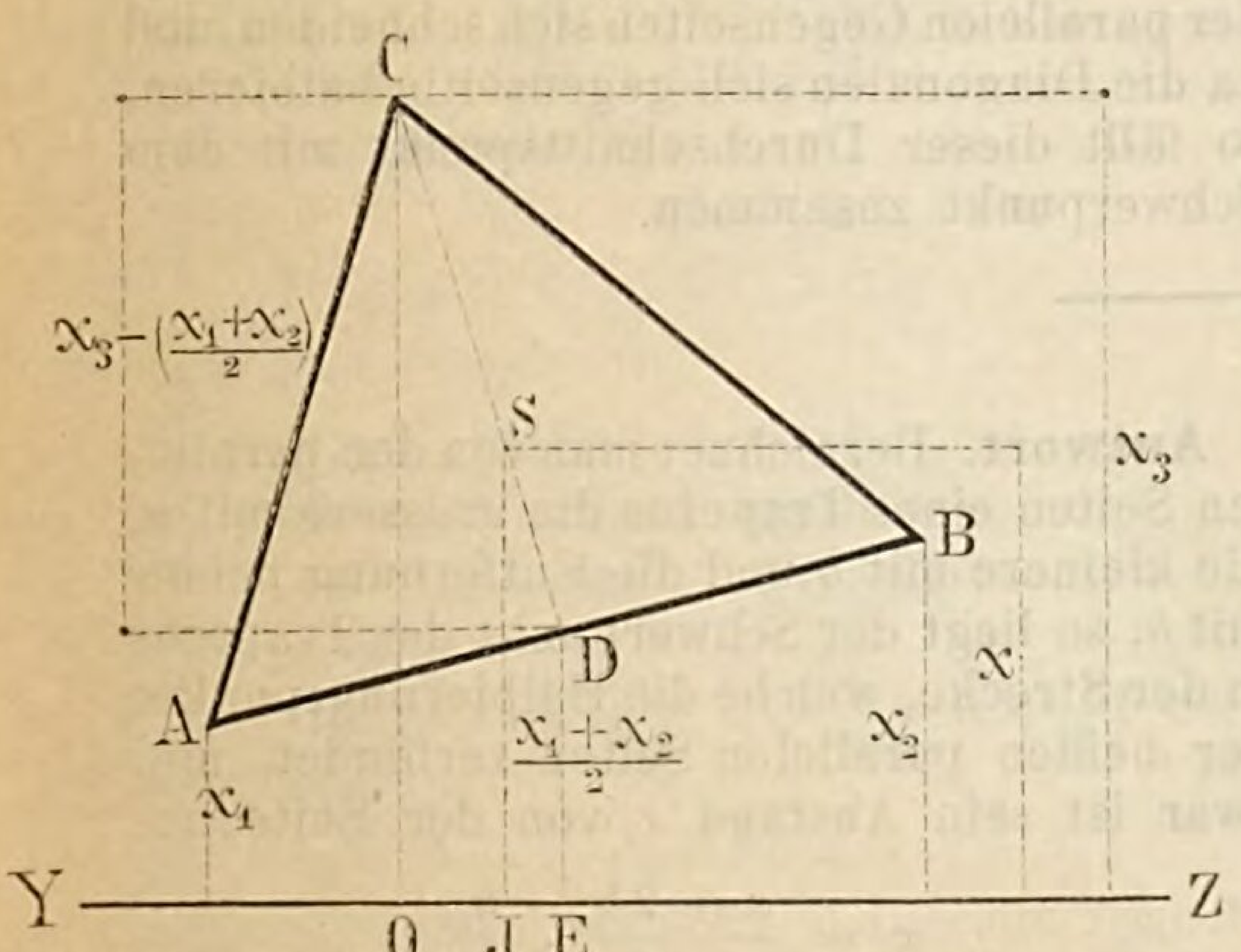
b). der obere Abschnitt jeder der Transversalen doppelt so gross ist, als der untere, und dass

Figur 141.



Erkl. 151. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „Die Gerade, welche durch die Mitte einer Dreiecksseite parallel mit einer der andern Seiten gezogen wird, halbiert eine zweite Dreiecksseite und ist die Hälfte der ihr parallelen Seite, ist also eine Mittellinie des Dreiecks."

Figur 142.



Erkl. 152. Ein Lehrsatz aus der Planimetrie lautet: „Parallelen zwischen den Schenkeln eines Winkels schneiden auf denselben proportionierte Stücke ab."

c). der Abstand des Schwerpunkts von einer in der Dreiecksebene beliebig gelegenen geraden Linie gleich dem dritten Teil von der Summe der Abstände der drei Dreiecksspitzen von derselben Linie ist.

Beweis zu a). Man denke sich das Dreieck ABC, Fig. 141, durch parallel zur Seite AB gezogene Linien in unendlich schmale Streifen MN, PQ zerlegt. Die Schwerpunkte der so erhaltenen Streifen liegen sämtlich in der Linie CD. Aus demselben Grund enthält auch die von der Mitte der Seite $\overline{BC}$ nach dem gegenüberliegenden Endpunkt A gezogene Linie $\overline{EA}$ den Schwerpunkt des Dreiecks; folglich muss derselbe mit dem Durchschnittspunkt S der beiden Linien DC und EA zusammenfallen.

Beweis zu b). Dieser so erhaltene Punkt S liegt, von jeder Seite als Grundlinie aus gerechnet, im ersten Drittel der Höhe des Dreiecks, denn wenn man E mit D durch eine Gerade verbindet, so ist:

$$\triangle ASC \sim \triangle DSE$$

und

$$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ }^{1)}$$

folglich auch:

$$\overline{DS} = \frac{1}{2}\overline{CS}$$

oder:

$$\overline{DS} = \frac{1}{3}\overline{CD}$$

Beweis zu c). Um den Abstand X des Schwerpunkts S von der Linie YZ oder von einer Ebene, die sich mit der Dreiecksebene in der Linie YZ schneidet, zu ermitteln, ziehe man, Fig. 142, von den drei Ecken der Dreiecksfläche die drei Lote x_1, x_2 und x_3 zu YZ, desgleichen von dem Halbierungspunkt D der Seite AB das Lot DE und vom Schwerpunkt das Lot SJ = X, so ist:

$$\overline{DS} : \overline{DC} = 1 : 3$$

[nach dem Beweis zu b).]

oder:

$$(\overline{SJ} - \overline{DE}) : (\overline{CO} - \overline{DE}) = 1 : 3 \text{ }^{2)}$$

da aber

$$\overline{DE} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

ist, so ist:

$$\left(\overline{SJ} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) : \left(\overline{CO} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = 1 : 3$$

setzt man in diese Proportion für

[1)] Siehe Erkl. 151.
[2)] Siehe Erkl. 152.

Erkl. 153. Denkt man sich anstatt des schweren Dreiecks drei gleich schwere Punkte A, B, C, so ist der Abstand des Schwerpunktes S derselben von der Linie YZ oder von der Ebene gleichfalls:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

es fällt daher der Schwerpunkt eines ebenen Dreiecks mit dem seiner drei gleich schweren Ecken zusammen.

$$\overline{SJ} = x$$

und für $\overline{CO} = x_3$

so erhält man:

$$\left(x - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) : \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) = 1:3$$

oder:

$$3\left(x - \frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) = x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

oder:

$$3x - \frac{3}{2}(x_1+x_2) = x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

oder:

$$3x = x_3 - \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{3}{2}(x_1+x_2)$$

oder:

$$3x = x_3 + (x_1+x_2)$$

oder:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \text{ [1]}.$$

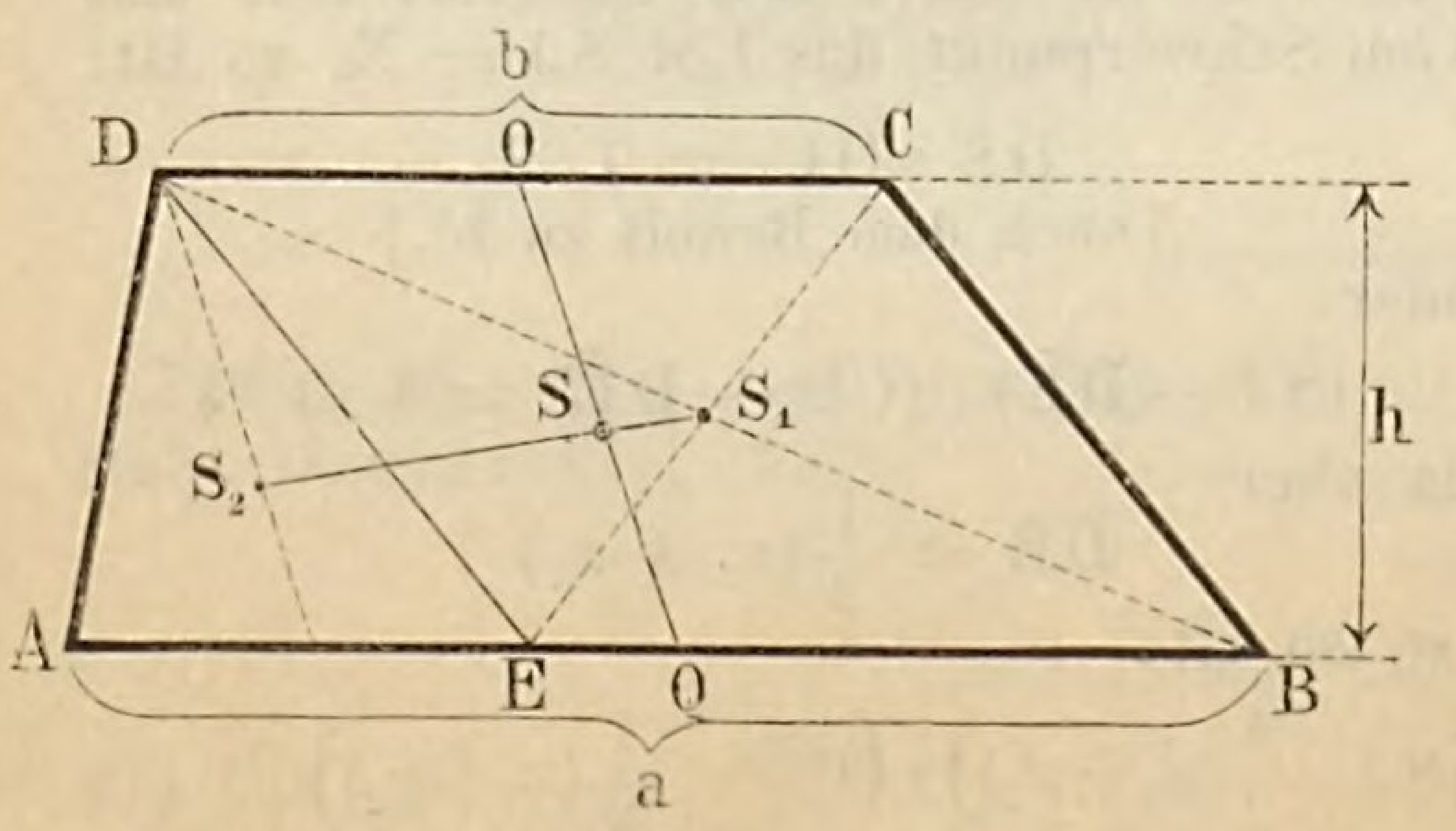
[1]) Siehe Erkl. 153.

Frage 86. Wo liegt der Schwerpunkt eines Parallelogramms?

Antwort. Wie schon in Antwort auf Frage 75 bemerkt wurde, liegt der Schwerpunkt eines Parallelogramms in dem Durchschnittspunkt seiner Diagonalen, denn der Schwerpunkt liegt da, wo die Verbindungsstrecken der Halbierungspunkte der parallelen Gegenseiten sich schneiden, und da die Diagonalen sich gegenseitig halbieren, so fällt dieser Durchschnittspunkt mit dem Schwerpunkt zusammen.

Frage 87. Wo liegt der Schwerpunkt eines Trapezes mit zwei parallelen Seiten?

Figur 143.



Antwort. Bezeichnet man von den parallelen Seiten eines Trapezes die grössere mit a, die kleinere mit b und die Entfernung beider mit h, so liegt der Schwerpunkt des Trapezes in der Strecke, welche die Halbierungspunkte der beiden parallelen Seiten verbindet, und zwar ist sein Abstand x von der Seite a:

$$x = \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$$

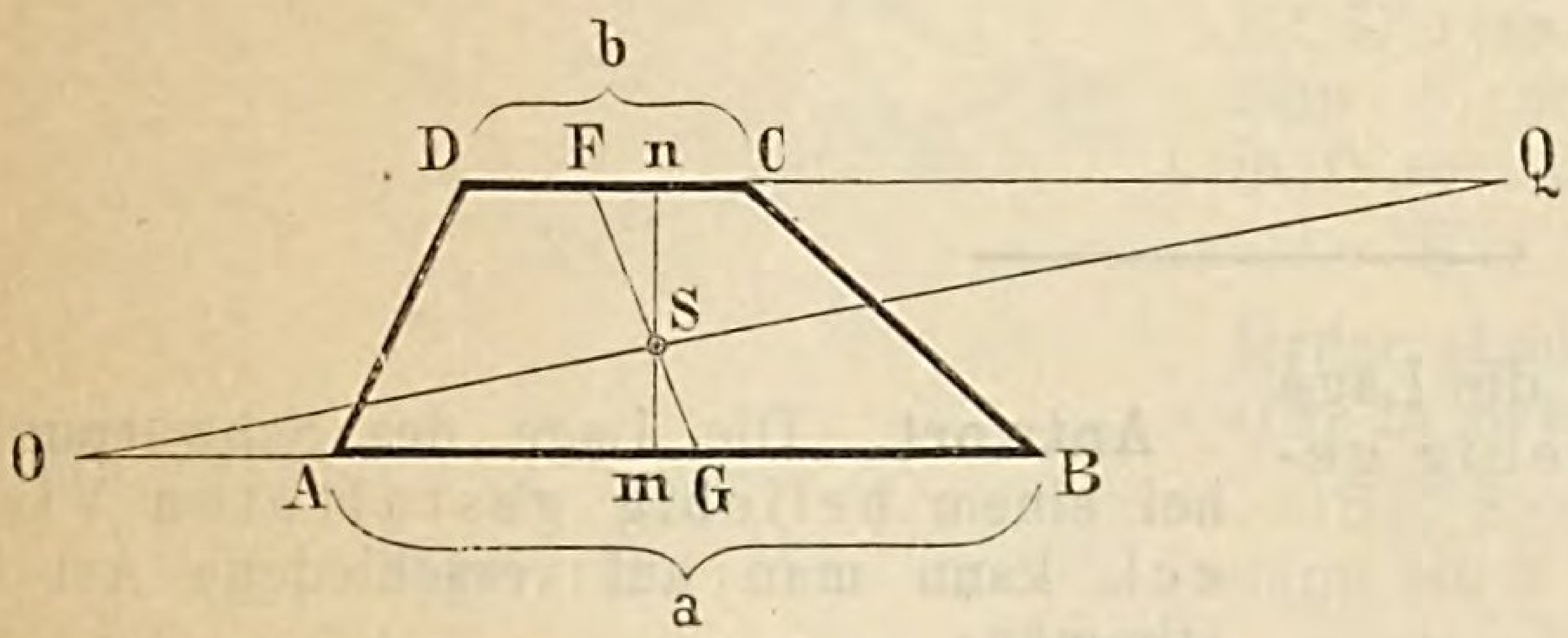
Beweis. Denkt man sich das Paralleltrapez als eine Summe schmaler Streifchen, welche mit den parallelen Seiten gleich gerichtet sind, so liegt nach Antwort auf Frage 84 der Schwerpunkt eines jeden solchen Streifchens in der Geraden OQ, welche die Halbierungspunkte von a und b verbindet. Zieht man $\overline{DE}$ (siehe Fig. 143) parallel $\overline{CB}$, so erhält man das Parallelogramm DEBC, dessen Schwerpunkt S_1 im Hal-

Erkl. 154. Ausser dem in nebenstehender Antwort erläuterten Verfahren findet man den Schwerpunkt eines Paralleltrapezes auch, wenn man jede der parallelen Seiten nach entgegengesetzter Richtung um ein Stück gleich der andern verlängert, und den Durchschnittspunkt sucht zwischen der Verbindungslinie der beiden erhaltenen Endpunkte und der Strecke, welche die Halbierungspunkte beider parallelen Seiten verbindet.

Beweis. In Figur 144 sei:

$$\overline{CQ} = \overline{AB} \text{ und } \overline{AO} = \overline{CD}$$
$$\overline{AG} = \overline{BG} \text{ und } \overline{DF} = \overline{CF}$$

Figur 144.



$\overline{nm}$ sei senkrecht $\overline{AB}$, alsdann ist:

$$\overline{Sm} : \overline{Sn} = \overline{SG} : \overline{SF}$$

und $\overline{SG} : \overline{SF} = \overline{OG} : \overline{FQ}$

Da nun:

$$\overline{Sn} = h - \overline{Sm}$$

und $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG}$

oder was dasselbe ist:

$$\overline{OG} = b + \frac{1}{2}a$$

ebenso $\overline{FQ} = \overline{FC} + \overline{CQ}$

oder was dasselbe ist:

$$\overline{FQ} = a + \frac{1}{2}b$$

so kann man für die Proportion:

$$\overline{Sm} : \overline{Sn} = \overline{OG} : \overline{FQ}$$

auch schreiben:

$$\overline{Sm} : h - \overline{Sm} = b + \frac{1}{2}a : a + \frac{1}{2}b$$

oder auch:

$$\overline{Sm} : h - \overline{Sm} = 2b + a : 2a + b$$

oder wenn man das erste und zweite resp. das dritte und vierte Glied summiert, so erhält man:

$$\overline{Sm} + h - \overline{Sm} : \overline{Sm} = 2b + a + 2a + b : 2b + a$$

oder: $h : \overline{Sm} = 3b + 3a : 2b + a$

Hieraus erhält man für den Abstand des Schwerpunkts:

$$\overline{Sm} = \frac{h\,(2b + a)}{3\,(b + a)}$$

also genau dieselbe, in nebenstehender Antwort entwickelte Formel.

bierungspunkt seiner Diagonalen liegt, und zwar in der Entfernung $= \frac{1}{2}h$ von a.

Ferner erhält man ein Dreieck ADE, dessen Schwerpunkt S_2, nach Antwort auf Frage 85, in der Entfernung $= \frac{1}{3}h$ von a liegt. Verbindet man nun S_1 mit S_2, so schneidet die Verbindungslinie die Strecke OQ in S und dies ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Um nun zu beweisen, dass die Entfernung des Punktes S von AB

$$x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$$

ist, denke man sich das Trapez um $\overline{AB}$ gedreht und in horizontale Lage gebracht. Soll die Trapezfläche in dieser Lage erhalten werden, so muss in S_2 eine Kraft angreifen, welche der Dreiecksfläche das Gleichgewicht hält, ebenso in S_1 eine Kraft, welche der Fläche des Parallelogramms entspricht, oder in S eine einzige Kraft für das ganze Trapez.

Die Grundlinie $\overline{AE}$ des Dreiecks ist gleich $a - b$ und seine Höhe h, folglich sein Flächeninhalt $(a - b)\frac{h}{2}$

Denkt man sich die Schwere dieser Fläche in S_2 vereinigt, so ist das statische Moment des Dreiecks (da der Arm von $S_2 = \frac{1}{3}h$ beträgt), in Bezug auf die Drehachse AB

1). . . . $M_1 = (a - b)\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3}$

Die Fläche des Parallelogramms ist $b \, . \, h$, und der Arm seines Schwerpunkts $\frac{h}{2}$, somit das statische Moment des Parallelogramms:

2). . . . $M_2 = b \cdot h \cdot \frac{h}{2}$

ferner ist das Moment für das Trapez

3). . . . $M = \frac{a + b}{2} \cdot h \cdot x$

für den Fall des Gleichgewichts muss aber

$$M = M_1 + M_2$$

oder:

$$\frac{a + b}{2} \cdot h \cdot x = (a - b)\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} + b \cdot h \cdot \frac{h}{2}$$

sein.

Hilfsrechnung. Dividiert man jedes Glied der nebenstehenden Gleichung durch $\frac{1}{2}h$, so erhält man:

$$\frac{a+b}{2} \cdot 2x = (a-b) \cdot \frac{h}{3} + bh$$

oder:

$$x(a+b) = \frac{h}{3}(a-b) + bh$$

oder:

$$3x(a+b) = h(a-b) + 3bh$$

oder:

$$3x = \frac{ah - bh + 3bh}{a+b}$$

oder:

$$3x = \frac{ah + 2bh}{a+b}$$

oder:

$$3x = \frac{h(a+2b)}{a+b}$$

oder:

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{(a+2b)}{(a+b)}$$

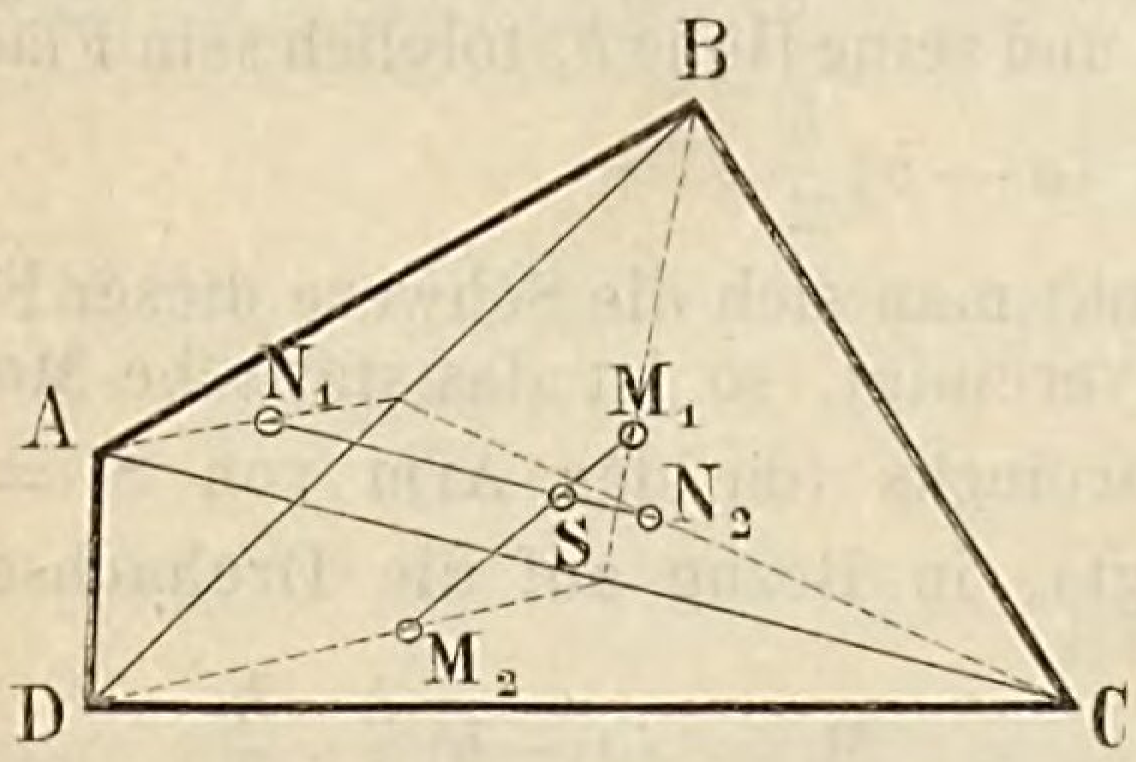
Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung für x:

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{(a+2b)}{(a+b)}$$

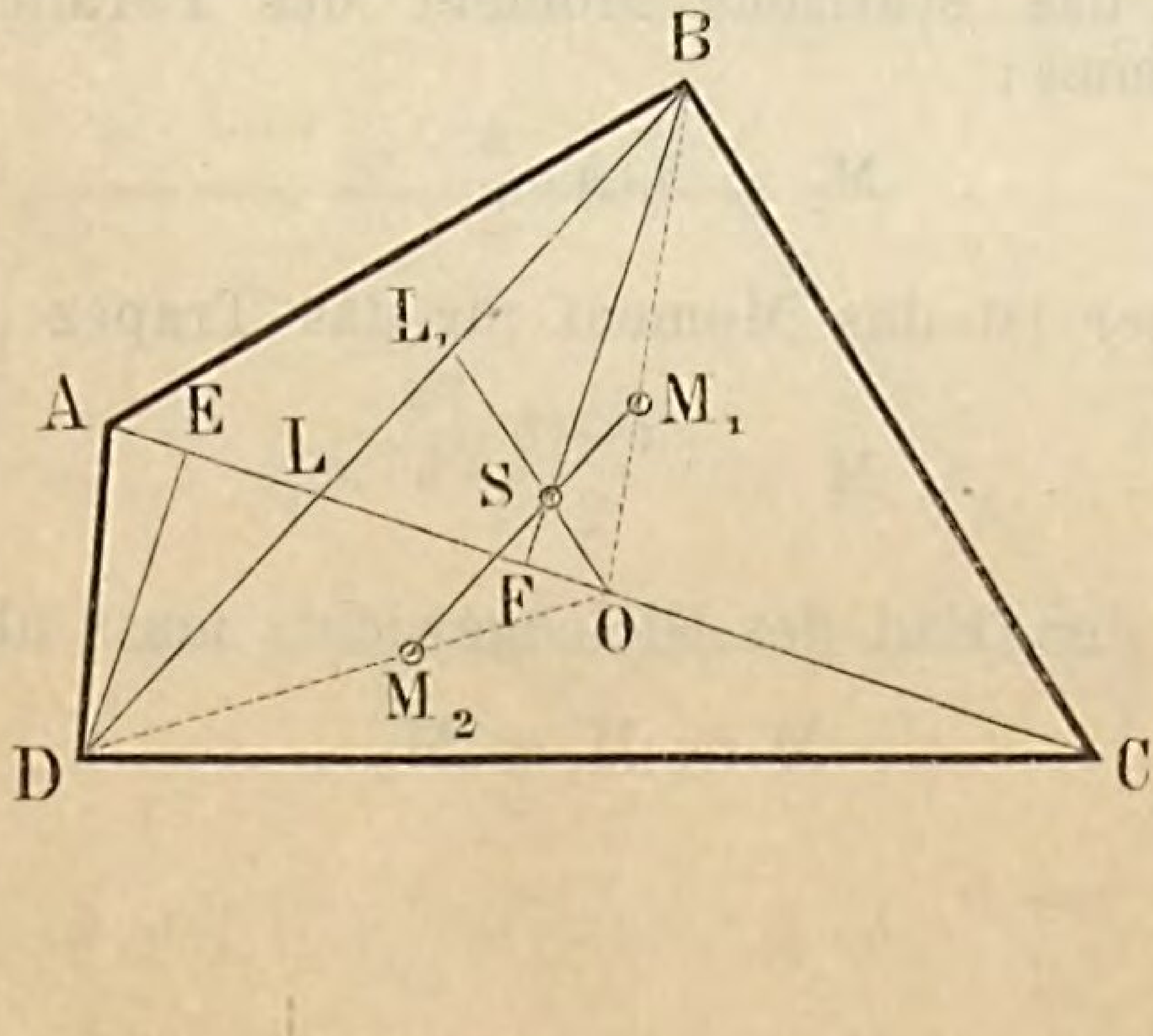
was zu beweisen war.

Frage 88. Wie bestimmt man die Lage des Schwerpunkts bei einem beliebig gestalteten Viereck?

Figur 145.



Figur 146.



Antwort. Die Lage des Schwerpunkts bei einem beliebig gestalteten Viereck kann man auf verschiedene Art bestimmen:

a). Es sei Fig. 145 ABCD das gegebene Viereck. Man zerlege dasselbe durch die Diagonale $\overline{AC}$ in zwei Dreiecke, bestimme deren Schwerpunkte M_1 und M_2 nach Antwort auf Frage 85, so ist $\overline{M_1M_2}$ Schwerlinie des Vierecks. Ebenso zerlege man das Viereck durch die Diagonale $\overline{BD}$ in zwei Dreiecke, bestimme deren Schwerpunkte N_1 und N_2, so ist auch $\overline{N_1N_2}$ Schwerlinie des Vierecks. Der Durchschnittspunkt S der beiden Schwerlinien ist daher Schwerpunkt des Vierecks.

b). Anstatt die zweite Schwerlinie zu bestimmen, kann man auch folgendermassen verfahren: s. Fig. 146. Der Schwerpunkt S liegt auf der Linie $\overline{M_1M_2}$ und zwar muss er diese Linie so teilen, dass sich die Abstände umgekehrt wie die zugehörigen Dreiecksflächen verhalten (siehe den Abschnitt über Parallelkräfte) also, dass sich

$$\overline{M_1S} : \overline{M_2S} = \triangle ADC : \triangle ABC$$

verhält. Die Dreiecke stehen aber im Verhältnis ihrer Höhen $\overline{DE}$ und $\overline{BF}$, daher kann man auch schreiben:

$$\overline{M_1S} : \overline{M_2S} = \overline{DE} : \overline{BF}$$

$$\text{und } \overline{DE} : \overline{BF} = \overline{DL} : \overline{BL}$$

Aus dem Grund machen wir

$$\overline{BL_1} = \overline{DL}$$

und verbinden L_1 mit O, so ist der Durchschnittspunkt S zwischen $\overline{L_1O}$ und $\overline{M_1M_2}$ der Schwerpunkt des Vierecks.

Frage 89. Wie bestimmt man die Lage des Schwerpunkts eines beliebig gestalteten Vielecks?

Antwort. 1). Der Schwerpunkt eines beliebig gestalteten Polygons oder Vielecks wird gefunden, indem man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, in den Schwerpunkten dieser Dreiecke sich die Gewichte derselben (also Parallelkräfte) angreifend denkt und die Resultante dieser Gewichte nach der Theorie der gleichgerichteten Parallelkräfte sucht. Der Angriffspunkt derselben ist der gesuchte Schwerpunkt. Da es hierbei nur auf das Verhältnis der Gewichte ankommt, so kann man dafür das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke setzen. Sind z. B. S_1, S_2, S_3 die Schwerpunkte der Diagonaldreiecke ABE resp. BCE resp. CDE (Fig. 147), so verbinde man S_1 mit S_2 und teile die Linie $\overline{S_1S_2}$ in O so, dass

$$\overline{S_1O} : \overline{OS_2} = \triangle BCE : \triangle ABE$$

ferner ziehe man $\overline{OS_3}$ und teile diese Linie $\overline{OS_3}$ in S so, dass

$$\overline{OS} : \overline{SS_3} = \triangle CDE : \triangle ABE + \triangle BCE$$

dann ist S der gesuchte Schwerpunkt.

2). Da aber das Zerlegen eines Vielecks in Dreiecke oder andere Figuren und die Verbindung der einzelnen Schwerpunkte derselben in der oben angegebenen Weise zuweilen sehr beschwerlich ist, so ist es oft vorteilhafter, das Vieleck in lauter Dreiecke zu zerlegen, von jedem einzelnen derselben den Inhalt zu berechnen und die Abstände ihrer Schwerpunkte von zwei in der Ebene der Figur beliebig gezogenen rechtwinkligen Koordinatenachsen zu messen. Wird dann die in Bezug auf jede dieser Linien gebildete Summe der Momente dieser Dreiecke durch die Summe ihrer Flächen dividiert, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts des Vielecks von jeder dieser Linien. Als Beispiel diene das Fünfeck ABCDE in Fig. 148. Von den Dreiecken ABC, ACD und ADE seien die drei Schwerpunkte S_1, S_2 und S_3 und der Schwerpunkt der ganzen Figur = S. Die drei Ordinaten auf die Achse $\overline{OX}$ seien:

$$\overline{S_1s_1} = y_1, \quad \overline{S_2s_2} = y_2, \quad \overline{S_3s_3} = y_3$$

und die gesuchte sei:

$$\overline{Ss} = y$$

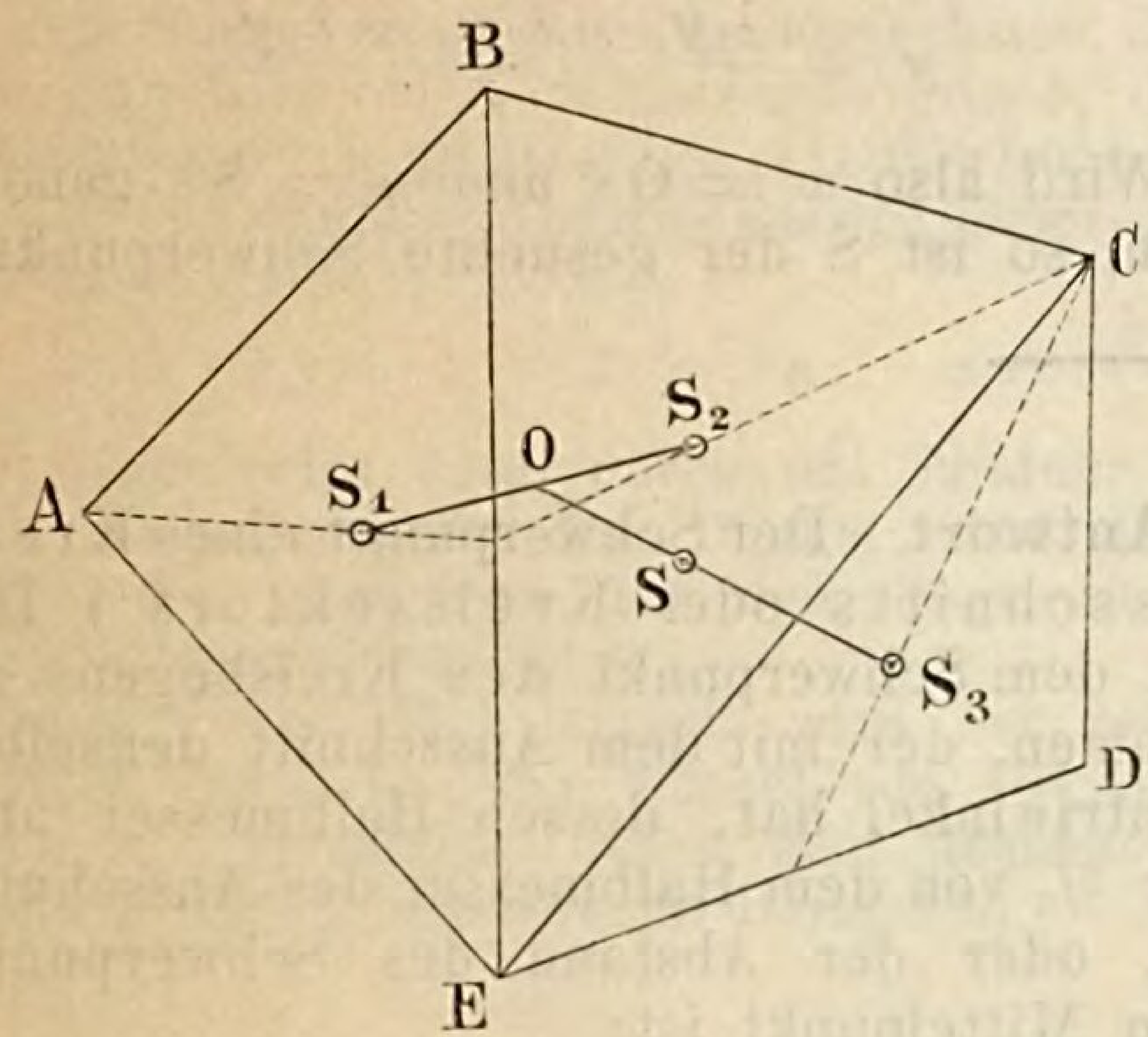
Ferner seien die drei Abscissen [1])

$$\overline{Os_1} = x_1, \quad \overline{Os_2} = x_2, \quad \overline{Os_3} = x_3$$

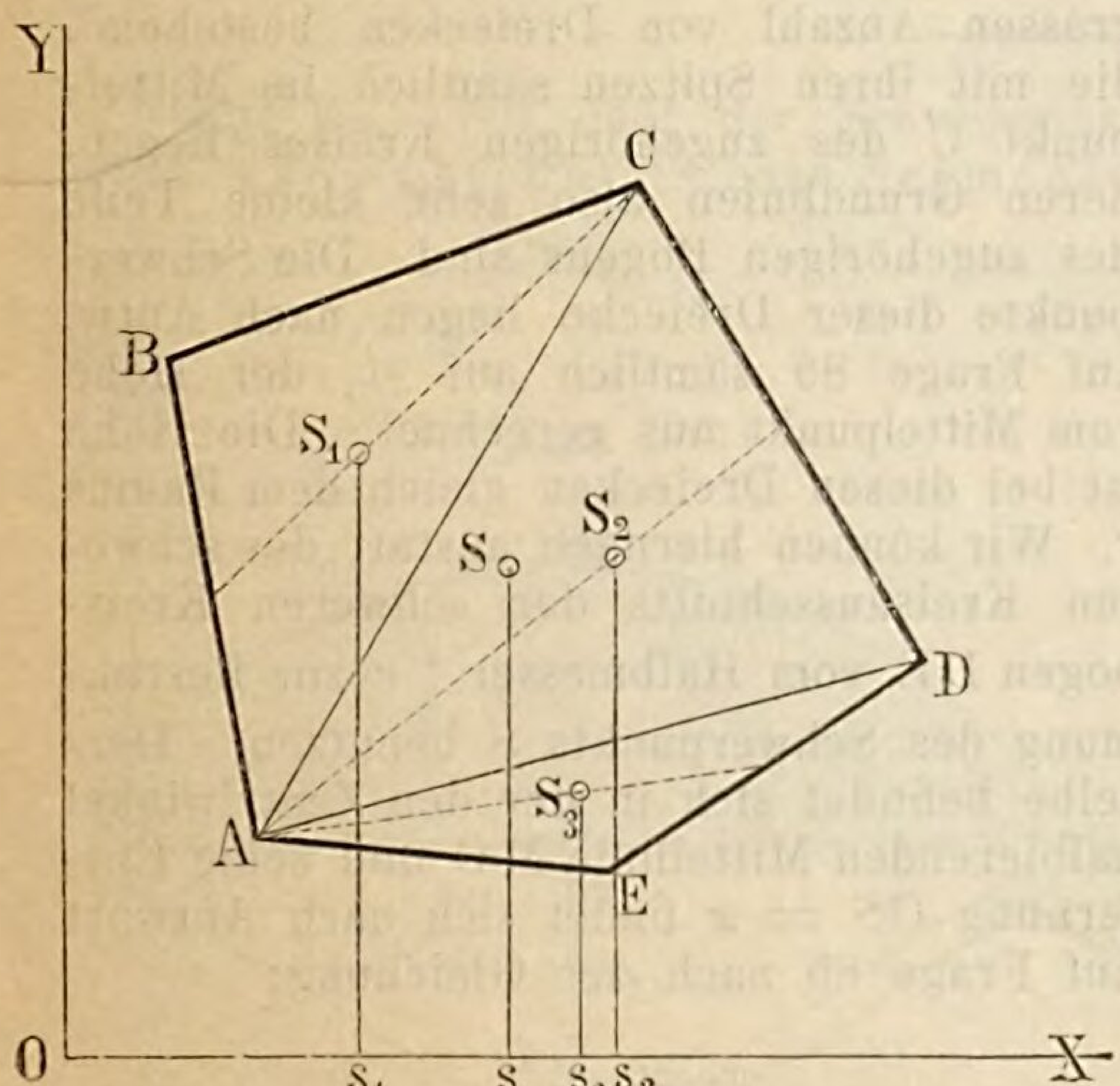
und die gesuchte

$$\overline{Os} = x$$

Figur 147.



Figur 148.



Erkl. 155. Bei Anwendung eines Koordinatensystems nennt man die auf der OX-Achse senkrecht stehenden Linien bezw. die Masszahlen, welche ihre Längen angeben, wie zum Beisp. in Fig. 148 die Linien S_1s_1, S_2s_2 ... Ordinaten (vom lat. ordĭnis, die Reihe, Ordnung), während die durch die Ordinaten auf der OX-Achse abgeschnittenen Stücke bezw. deren Masszahlen, wie z. B. in Fig. 148 die Linien Os_1, Os_2 ... die Abscissen (vom lat. abscindĕre, abschneiden, trennen) der ihnen zugehörigen Punkte genannt werden. Durch zwei solcher

[1]) Siehe Erkl. 155.

Längen oder durch Ordinate und Abscisse ist die Lage des entsprechenden Punktes unzweideutig angegeben. Da auf der OX-Achse die Abscissen der Punkte gemessen werden, so heisst diese Linie auch Abscissenachse; aus entsprechenden Gründen heisst die Linie OY die Ordinatenachse.

Ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$ABC = \lambda_1,\ ACD = \lambda_2,\ ADE = \lambda_3$$

und der Flächeninhalt des Fünfecks $= \lambda$, so ist:

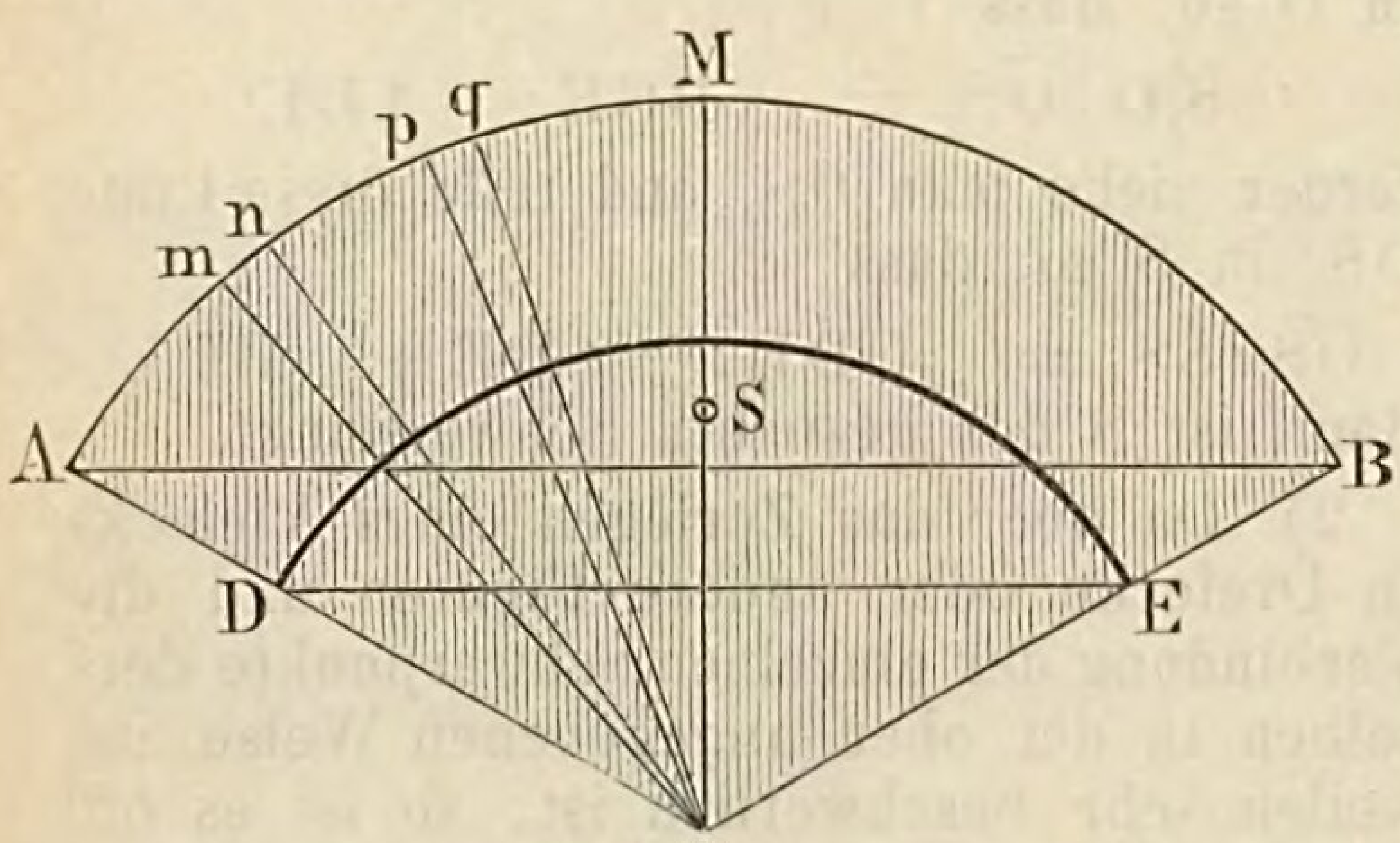
$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda}$$

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda}$$

Wird also $x = Os$ und $y = Ss$ genommen, so ist S der gesuchte Schwerpunkt.

Frage 90. Durch welchen Satz wird die Lage des Schwerpunkts eines Kreisausschnitts oder Kreis-Sektors bestimmt?

Figur 149.



Erkl. 156. Sector (vom lat. secāre, schneiden, zerschneiden, teilen) heisst eigentlich der Zerschneider; der Ausschnitt eines Kreises, Kreisausschnitt.

Erkl. 157. Für die Tabellen der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Tangente etc.) ist bekanntlich der in Grade, Minuten und Sekunden eingeteilte Quadrant als Winkeleinheit angenommen; in der Mechanik kommen aber sehr oft Uebergänge von den Kreisbogen auf die ihnen entsprechenden Winkel und umgekehrt von diesen auf jene vor, weshalb es hier für die Einfachheit der Ausdrücke notwendig wird, eine einfachere Bezeichnung zwischen der Bogenlänge, dem Halbmesser und dem entsprechenden Winkel festzustellen, als diejenige, nach welcher der Bogen durch

$$b = \frac{2 r \alpha . \pi}{360}$$

bezeichnet wird, wenn r den Radius und α den zum Bogen gehörigen Mittelpunktswinkel bezeichnet.

Da sich für gleiche Halbmesser r die Bogenlängen b und b_1 wie die entsprechenden Winkel α und α_1 verhalten, und die Bogen b und b_1 die demselben Winkel α_1 entsprechen aber verschiedenen Kreisen angehören, wie die Halbmesser r und r_1 derselben, so hat man:

Antwort. Der Schwerpunkt eines Kreisausschnitts oder Kreissektors[1]) fällt mit dem Schwerpunkt des Kreisbogens zusammen, der mit dem Ausschnitt denselben Zentriwinkel hat, dessen Halbmesser aber nur $^2/_3$ von dem Halbmesser des Ausschnitts ist, oder der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt ist:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$$

Beweis. Man denke sich den Kreisausschnitt, Figur 149, ABC aus einer sehr grossen Anzahl von Dreiecken bestehend, die mit ihren Spitzen sämtlich im Mittelpunkt C des zugehörigen Kreises liegen, deren Grundlinien also sehr kleine Teile des zugehörigen Bogens sind. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen nach Antw. auf Frage 85 sämtlich auf $^2/_3$ der Höhe vom Mittelpunkt aus gerechnet. Die Höhe ist bei diesen Dreiecken gleich dem Radius r. Wir können hiernach anstatt des schweren Kreisausschnitts den schweren Kreisbogen DE vom Halbmesser $\frac{2}{3} r$ zur Bestimmung des Schwerpunkts S benutzen. Derselbe befindet sich in der den Zentriwinkel halbierenden Mittellinie MC und seine Entfernung $CS = x$ findet sich nach Antwort auf Frage 85 nach der Gleichung:

$$x = \frac{r_1 s_1}{b_1}$$

worin r_1 den Radius des Bogens DE, s_1 die Sehne dieses Bogens und b_1 den Bogen selbst bedeutet.

Nun ist aber $r_1 = \frac{2}{3} r$, folglich auch

$$b_1 = \frac{2}{3} b \text{ und } s_1 = \frac{2}{3} s$$

Daher beträgt die Grösse von CS auch

$$x = \frac{\frac{2}{3} r \cdot \frac{2}{3} s}{\frac{2}{3} b}$$

[1]) Siehe Erkl. 156.

$$b : b_1 = \alpha : \alpha_1$$
$$b : b_1 = r : r_1$$
und demnach auch:
$$b : b_1 = \alpha r : \alpha_1 r_1$$

Da nun b und r auf die allgemeine Längeneinheit bezogen sind, so wird man noch für die Winkeleinheit eine passende Annahme treffen dürfen, und es ist offenbar am einfachsten, denjenigen Winkel α_1, dessen Bogen b_1 dem Halbmesser r_1 gleich ist, als Einheit für das Winkelmass anzunehmen; denn man hat dann einfach:

$$b : 1 = r\alpha : 1; \quad b = r\alpha; \quad \alpha = \frac{b}{r}$$

der Bogen wird dann durch das Produkt aus dem Halbmesser in den Winkel, und dieser durch den Quotienten aus dem Bogen durch den Halbmesser ausgedrückt.

Nach dieser Winkeleinheit wird der rechte Winkel durch $\frac{1}{2}\pi$, ein Winkel von 30^0 durch $\frac{1}{6}\pi$ u. s. f. gemessen. Setzt man dementsprechend in die nebenstehende Formel 3).:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

so erhält man für den Schwerpunktsabstand der Halbkreisfläche den Wert:

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

oder:

1). $x = \frac{2rs}{3b}$

was zu beweisen war.

Heisst der den Bogen messende Winkel im Bogenmass 2α, so erhält man nach Antwort auf Frage 83 die Proportion:

$$\frac{2}{3}r \,.\, 2\alpha : 2 \cdot \frac{2}{3}r \cdot \sin\alpha = \frac{2}{3}r : x$$

und hieraus ergibt sich für den Abstand des Schwerpunkts CS oder:

2). . . . $x = \frac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

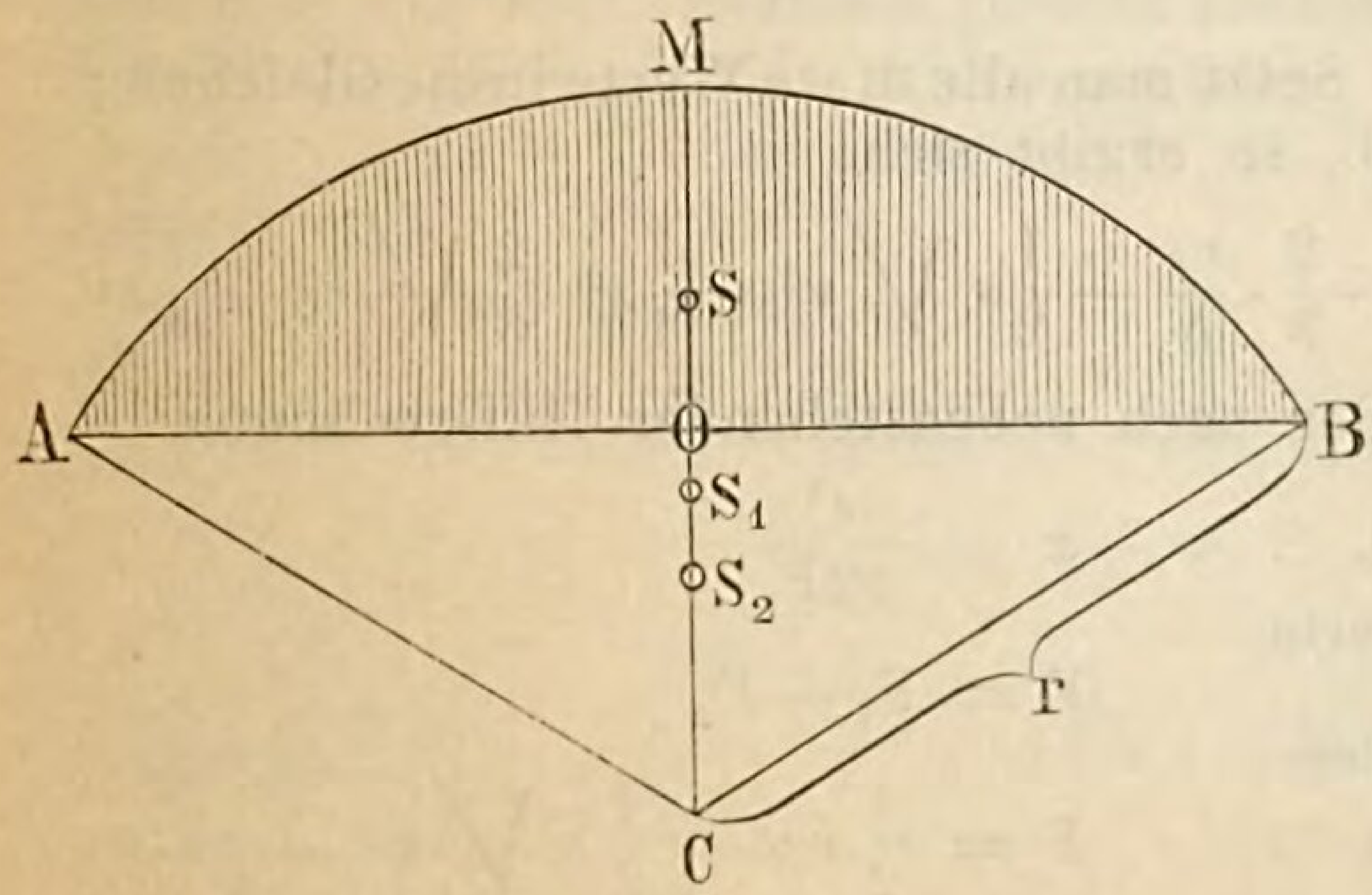
oder wenn α in Graden gegeben ist:

3). . . . $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180 \,.\, r \,.\, \sin\alpha}{\alpha \,.\, \pi}$ [1]).

[1]). Siehe Erkl. 157.

Frage 91. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisabschnitts oder Segments?

Figur 150.



Erkl. 158. Segmént, das, (vom lat. segméntum von secāre, schneiden), ist ein Schnitt, Abschnitt, besonders ein Kreisabschnitt.

Antwort. Der Schwerpunkt eines Kreisabschnitts oder Segments [1]) liegt auf dem halbierenden Radius in einer Entfernung x vom Mittelpunkt, so dass

$$x = \frac{S^3}{12\,F}$$

ist, wenn S die begrenzende Sehne und F der Flächeninhalt des Abschnitts ist.

Beweis. Es sei in Fig. 150:

S der Schwerpunkt, F der Flächeninhalt des Kreisabschnitts ABM,

S_1 der Schwerpunkt, F_1 der Flächeninhalt des Kreisausschnitts ACBM, und

S_2 der Schwerpunkt, F_2 der Flächeninhalt des Dreiecks ABC,

so ist nach dem Satz: „das Moment des Ganzen ist gleich der Summe der Momente seiner Teile“

$$F_1 x_1 = F x + F_2 x_2$$

worin x, x_1, x_2 die Abstände der resp. Schwerpunkte S, S_1 S_2 vom Mittelpunkt C bezeichnen; oder es ist:

1). . . . $F x = F_1 x_1 - F_2 x_2$

Nun ist der Flächeninhalt des Kreisausschnitts:

2). . . . $F_1 = \frac{1}{2} r b$

[1]) Siehe Erkl. 158.

wenn b den zugehörigen Bogen AB bezeichnet, denn es kann die Fläche des Kreisausschnitts angesehen werden als eine Dreiecksfläche von der Grundlinie AMB und der Höhe r.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist:

$$F_2 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{OC}$$

oder wenn man die Sehne $\overline{AB}$ mit s bezeichnet, so ist:

$$3). \quad F_2 = \frac{1}{2} s \cdot \overline{OC}$$

Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist aber:

$$\overline{OC}^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2} s\right)^2$$

oder:

$$\overline{OC} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

demnach ist:

$$4). \quad F_2 = \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

der Abstand $\overline{CS_1}$ oder:

$$5). \quad x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$$

nach Antwort auf die vorige Frage,

der Abstand $\overline{CS_2}$ oder:

$$6). \quad x_2 = \frac{2}{3} \overline{OC}$$

nach Antwort auf Frage 85.

Setzt man in diese letzte Gleichung den für $\overline{OC}$ oben berechneten Wert, so ist:

$$7). \quad x_2 = \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

Setzt man alle diese Werte in die Gleichung 1)., so ergibt sich:

$$Fx = \frac{1}{2} rb \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b} - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$8). \quad x = \frac{s^3}{12 F}$$

worin

$$F = F_1 - F_2$$

oder:

$$9). \quad F = \frac{1}{2} r b - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

bedeutet. Ist der Radius r und der Mittelpunktswinkel 2α gegeben, so ist nach trigonometrischer Bezeichnung der Bogen:

$$b = 2 r \alpha$$

und die Sehne:

$$s = 2 r . \sin \alpha$$

Es muss auch in diesem Fall:

$$Fx = F_1 x_1 - F_2 x_2$$

sein.

Hilfsrechnung.

$$\frac{1 . rb . 2rs}{2 \quad 3b} = \frac{r^2 s}{3}$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = r^2 - \frac{1}{4} s^2$$

$$\frac{1}{2} s \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(r^2 - \frac{1}{4} s^2\right) = \frac{s}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4} s^2\right)$$

$$r^2 \cdot \frac{s}{3} - \frac{s}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4} s^2\right) = \frac{s}{3} \left(r^2 - r^2 + \frac{1}{4} s^2\right)$$

$$Fx = \frac{s . 1 . s^2}{3 . 4}$$

oder:

$$Fx = \frac{s^3}{12}$$

und somit:

$$x = \frac{s^3}{12 F}$$

Hilfsrechnung. Nach einer goniometrischen Formel ist:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

demnach kann man für den Zähler in Gleichung 16). auch setzen:

$$\frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \cos\alpha$$

oder:

$$\frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha - \frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

da nun nach einer goniometrischen Formel

$$\cos^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha)$$

so kann man den Zähler auch folgendermassen ausdrücken:

$$\frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha - \frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha\,(1 - \sin^2\alpha)$$

oder:

$$\frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha\,(1 - 1 + \sin^2\alpha)$$

oder:

$$\frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha \cdot \sin^2\alpha$$

oder:

$$\frac{2}{3}r^3 \cdot \sin^3\alpha$$

oder:

$$\frac{2}{3}\left(r \cdot \sin\alpha\right)^3$$

Der Nenner in Gleichung 16). kann auch so geschrieben werden:

$$r^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

oder nach der oben erwähnten goniometrischen Formel:

$$r^2\left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha\right)$$

oder:

$$r^2(\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)$$

oder:

$$r^2\alpha - r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Da nun nach obiger Gleichung 2).

$$F_1 = \frac{1}{2}rb$$

ist, so erhält man, für b den entsprechenden Wert eingesetzt:

$$F_1 = \frac{1}{2}r \cdot 2r\alpha$$

oder:

10). . . $F_1 = r^2\alpha$

Ferner ist, siehe vorige Gleichung 5).:

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$$

oder die entsprechenden Werte für s und b eingesetzt:

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}r \cdot 2r \cdot \sin\alpha}{2r\alpha}$$

oder:

11). . . . $x_1 = \frac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

somit ist:

$$F_1x_1 = r^2\alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

oder:

12). . . $F_1x_1 = \frac{2}{3}r^3 \cdot \sin\alpha$

die Dreiecksfläche

13). . . . $F_2 = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 2\alpha$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie).

Nach Gleichung 6). ist:

$$x_2 = \frac{2}{3}\overline{OC}$$

oder da $\overline{OB} = r \cdot \cos\alpha$, so ist:

14). . . $x_2 = \frac{2}{3}r \cdot \cos\alpha$

und somit:

$$F_2x_2 = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \cos\alpha$$

Setzt man alle diese Werte in Gleichung 1)., so erhält man:

15). . . $Fx = r^2 \cdot \alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \cos\alpha$

da nun:

$$F = F_1 - F_2$$

oder nach Gleichung 10). und 13).

$$F = r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 2\alpha$$

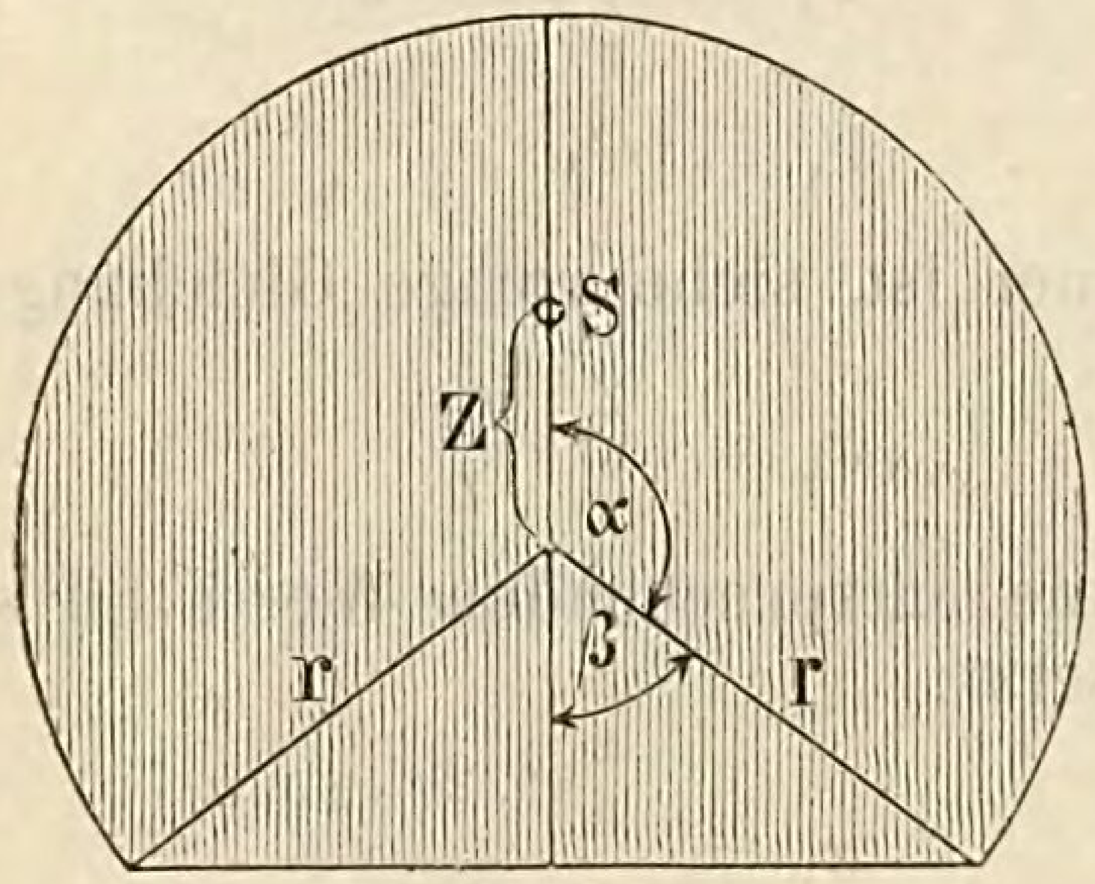
ist, so ist:

16). . . $x = \dfrac{r^2 \cdot \alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{2}{3}r \cdot \cos\alpha}{r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 2\alpha}$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$17). \quad x = \frac{2\,(r \cdot \sin\alpha)^3}{3\,(r^2\alpha - r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)}$$

Figur 151.



Ist die Fläche des Kreisabschnitts (Fig. 151) grösser als die des Halbkreises, so ist der Inhalt des Kreisabschnitts gleich der Summe aus dem Kreisausschnitt und dem zugehörigen Dreieck. Bei der Bildung der Summe dieser Momente ist jedoch der Arm des Dreiecks in Bezug auf den des Kreisausschnitts negativ zu setzen, da die beiden Flächen zu verschiedenen Seiten der Momentlinie liegen. Hiernach ist, wenn β das Supplement von α ist:

$$x = \frac{r^2\alpha \cdot \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\beta \cdot \frac{2}{3} r \cdot \cos\beta}{r^2\alpha + \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin\beta}$$

Setzen wir für:

$$2\beta = 4\mathrm{R} - 2\alpha$$
$$\sin 2\beta = -\sin 2\alpha$$
$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

so entsteht für x der oben (s. Gleichung 17). gefundene Ausdruck, d. h. die Entfernung des Schwerpunkts eines Kreisausschnitts vom Mittelpunkt des Kreises ist unabhängig von der Grösse der Fläche.

Frage 92. Wo liegt der Schwerpunkt eines Ringstücks?

Antwort. Der Schwerpunkt eines Ringstücks[1]) liegt auf dem halbierenden Radius in einer Entfernung x vom Mittelpunkt, so dass:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{r + \varrho}$$

ist, wenn der Mittelpunktswinkel 2α der grössere Radius r, der kleinere ϱ ist.

Erkl. 159. Unter einem Ringstück versteht man die zwischen zwei Kreisbogen von demselben Mittelpunkt liegende Fläche, siehe Fig. 152.

Beweis. Analog der Antwort auf die vorige Frage 91 betrachten wir das Ringstück als die Differenz zweier Kreisausschnitte. Ist F der Flächeninhalt des Ringstücks, F_1 der des grösseren und F_2 der des kleineren Kreisausschnitts, x der Schwerpunktsabstand des Ringstücks, x_1 der Schwerpunktsabstand des grösseren und x_2 der des kleineren Sektors, so muss wieder:

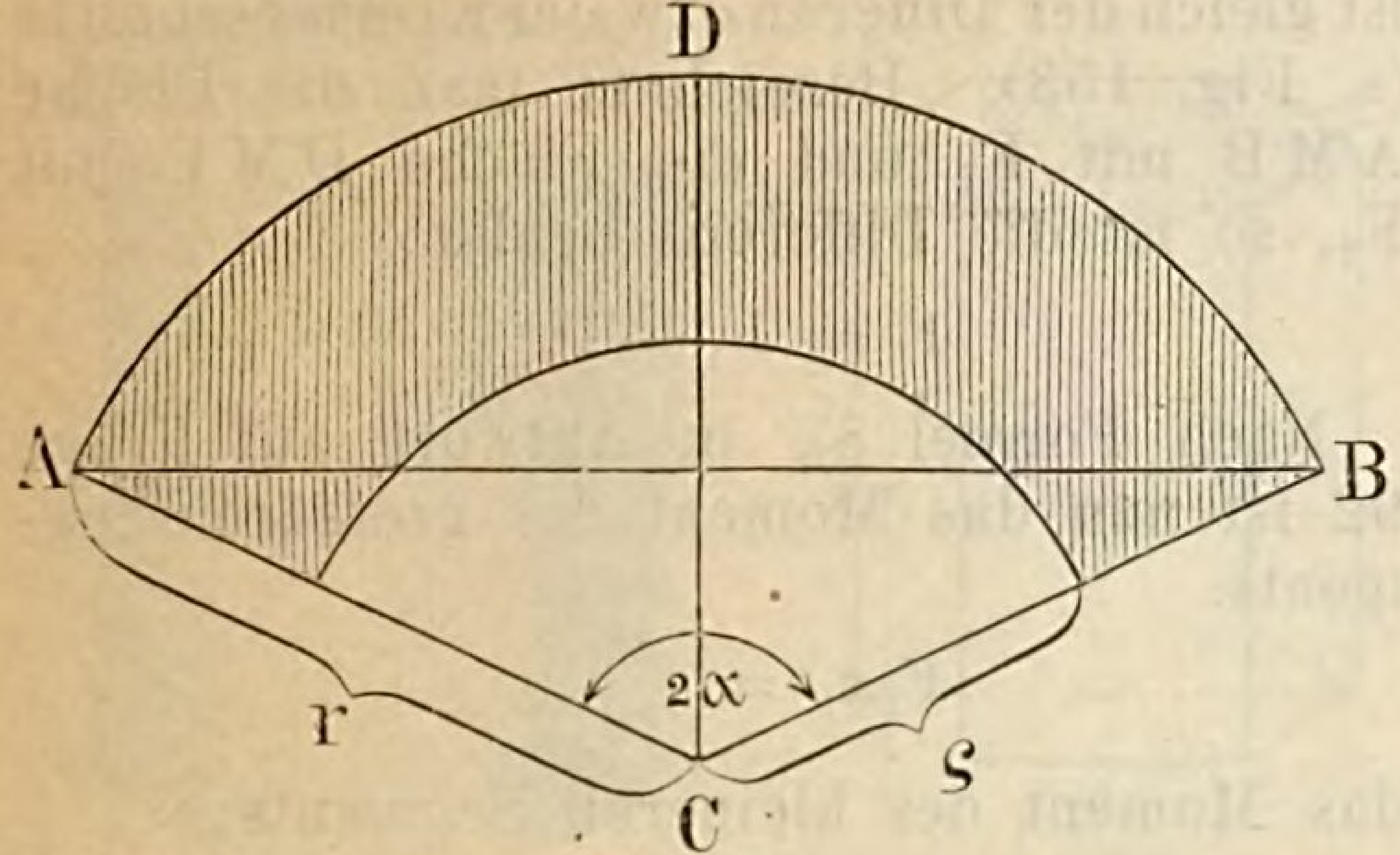
$$1). \quad . \; . \; . \quad F x = F_1 x_1 - F_2 x_2$$

sein [siehe Gleich. 1). in Antw. auf Frage 91].

Nach Gleichung 10). in Antwort auf Frage 91 ist:

[1]) Siehe Erkl. 159.

Figur 152.



Hilfsrechnung.

Für $r^3 - \varrho^3$ kann man setzen:

$$(r - \varrho)(r^2 + r\varrho + \varrho)$$

Für $r^2 - \varrho^2$ kann man setzen:

$$(r + \varrho)(r - \varrho)$$

und somit ist:

$$x = \frac{\frac{2}{3}\sin\alpha\,(r - \varrho)(r^2 + r\varrho + \varrho^2)}{\alpha\,(r + \varrho)(r - \varrho)}$$

Klammer $(r - \varrho)$ gehoben, gibt für x den nebenstehenden Wert.

$$F_1 = r^2\alpha$$
$$F_2 = \varrho^2\alpha$$

Nach Gleichung 11). in Antw. auf Frage 91 ist:

$$x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\varrho\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

und somit:

$$F_1 x_1 = \frac{2}{3} r^3 . \sin\alpha$$

$$F_2 x_2 = \frac{2}{3}\varrho^3 . \sin\alpha$$

(siehe Gleichung 12 in Antw. auf Frage 91).

Diese Werte in obige Gleichung 1). eingesetzt, gibt:

$$Fx = \frac{2}{3} r^3 . \sin\alpha - \frac{2}{3}\varrho^3 . \sin\alpha$$

oder:

$$Fx = \frac{2}{3}\sin\alpha\,(r^3 - \varrho^3)$$

Nun ist:

$$F = F_1 - F_2$$

oder: $F = r^2\alpha - \varrho^2\alpha$

oder: $F = \alpha\,(r^2 - \varrho^2)$

somit ist der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{\frac{2}{3}\sin\alpha\,(r^3 - \varrho^3)}{\alpha\,(r^2 - \varrho^2)}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$2). \quad . \quad . \quad x = \frac{2}{3} . \frac{\sin\alpha}{\alpha} . \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{r + \varrho}$$

Aus Gleichung 1). und 2). in Antwort auf Frage 90 folgt, dass:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{s}{b}$$

setzt man diesen Wert in die obige Gleichung 2)., so erhält man für:

$$3). \quad . \quad . \quad x = \frac{2}{3} . \frac{s}{b} . \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{r + \varrho}$$

Nach dieser Formel lässt sich also der Schwerpunktsabstand des Ringstücks berechnen, wenn die zugehörige Sehne $AB = s$ (s. Fig. 152), der Bogen $ADB = b$ und die Radien r und ϱ gegeben sind.

Frage 93. Wo liegt der Schwerpunkt eines zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks der Kreisfläche?

Antwort. Der Schwerpunkt eines zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche liegt auf der vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehnen s und σ gefällten Normalen, so dass sein Abstand vom Mittelpunkt:

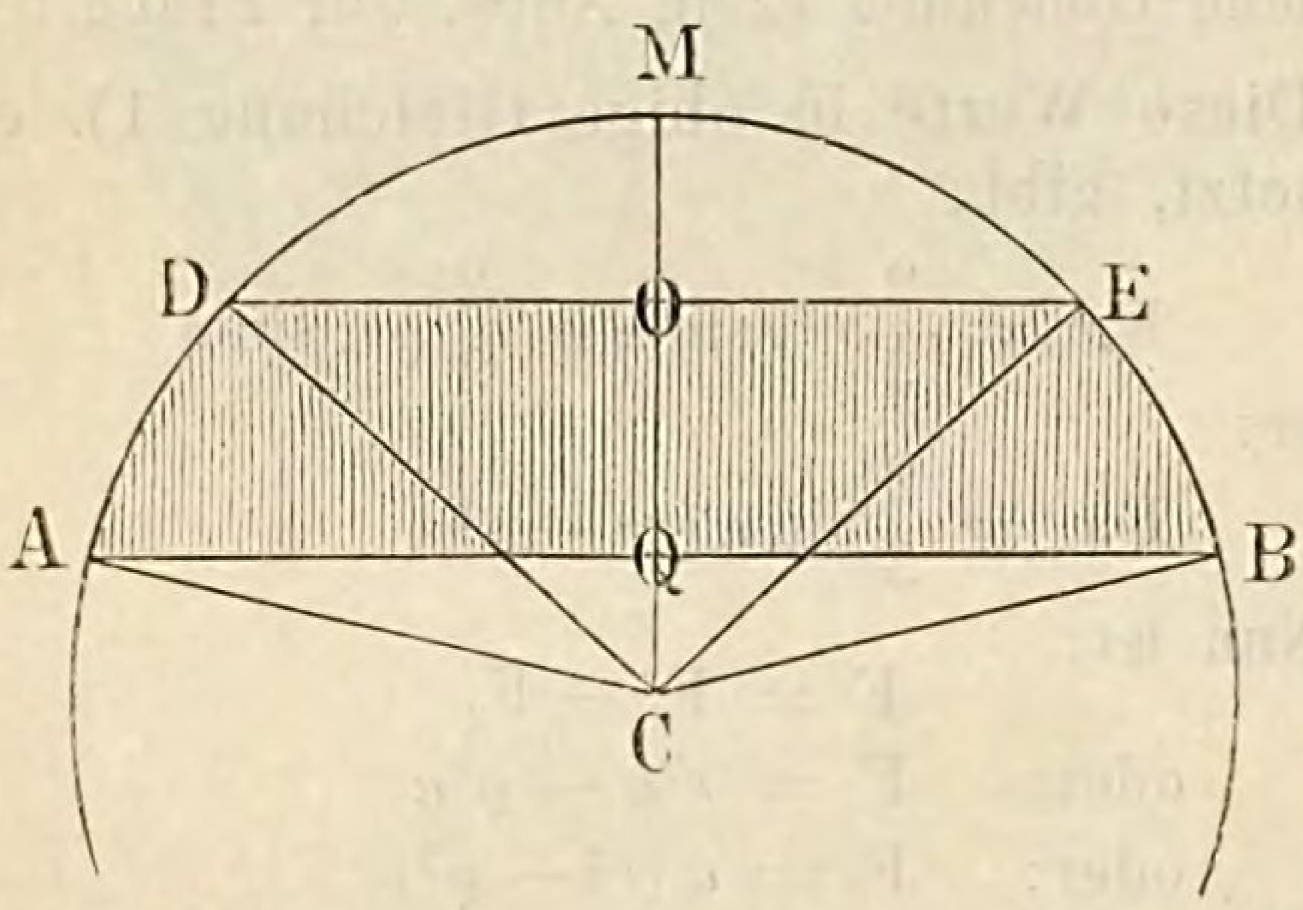
$$x = \frac{s^3 - \sigma^3}{12\,(F_1 - F_2)}$$

beträgt, worin F den Flächeninhalt der betreffenden Fläche, s die grössere und σ die kleinere Sehne bedeutet.

Beweis. Die in Betracht kommende Fläche ist gleich der Differenz zweier Kreisabschnitte (s. Fig. 153). Bezeichnet man die Fläche AMB mit F_1 und die Fläche DME mit F_2, so ist die Differenz beider:

$$F = F_1 - F_1$$

Figur 153.



Nach Formel 8). in Antwort auf Frage 92 ist nun das Moment des grösseren Segments:

$$F_1 x_1 = \frac{s^3}{12}$$

das Moment des kleineren Segments:

$$F_2 x_2 = \frac{\sigma^3}{12}$$

und folglich das Moment der Fläche ADEB:

$$F x = \frac{s^3 - \sigma^3}{12}$$

Da nun $F = F_1 - F_2$ ist, so erhält man für den Abstand des Schwerpunkts vom Zentrum:

$$x = \frac{s^3 - \sigma^3}{12\,(F_1 - F_2)}$$

Sind neben dem Radius r die beiden Zentriwinkel:

$$ACB = \alpha$$
$$DCE = \beta$$

gegeben, so ist nach Antwort auf Frage 91 das Moment des grösseren Segments:

$$F_1 x_2 = \frac{2}{3}\,(r \,.\, \sin\alpha)^3$$

das Moment des kleineren Segments:

$$F_2 x_2 = \frac{2}{3}\,(r \,.\, \sin\beta)^3$$

und folglich das Moment der Fläche:

$$F x = \frac{2}{3}\,(r \,.\, \sin\alpha)^3 - \frac{2}{3}\,(r \,.\, \sin\beta)^3$$

Nach Hilfsrechn. bei Antw. auf Frage 91 ist:

$$F_1 = r^2\,(\alpha - \sin\alpha \,.\, \cos\alpha)$$
$$F_2 = r^2\,(\beta - \sin\beta \,.\, \cos\beta)$$

folglich:

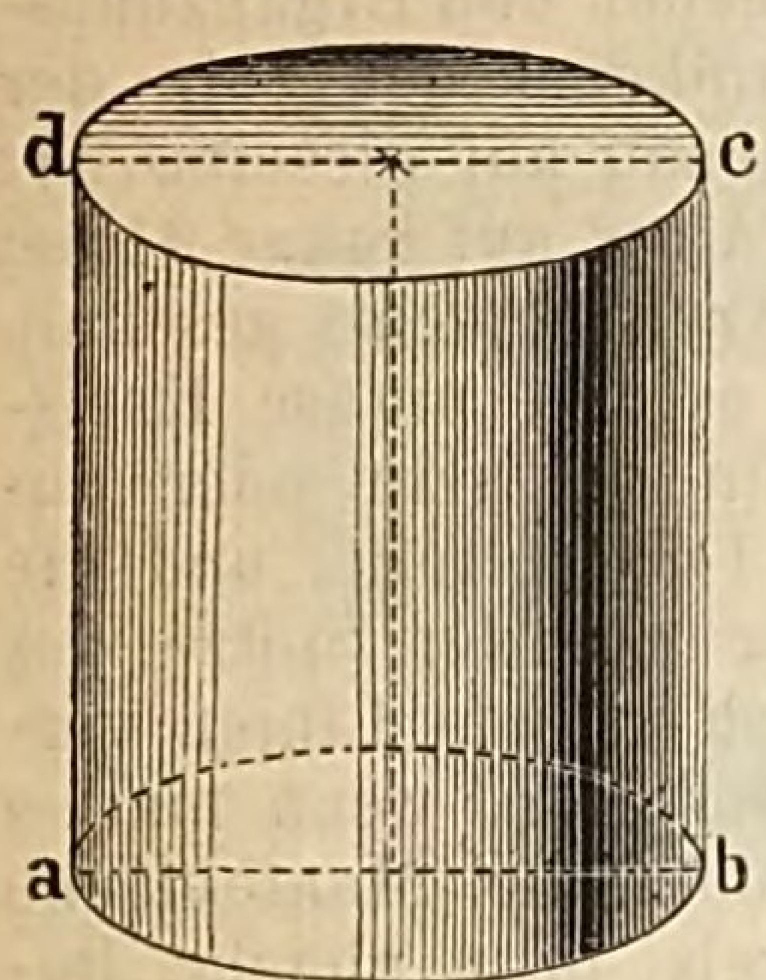
$$F = r^2\,(\alpha - \sin\alpha \,.\, \cos\alpha) - r^2\,(\beta - \sin\beta \,.\, \cos\beta)$$

und somit der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt:

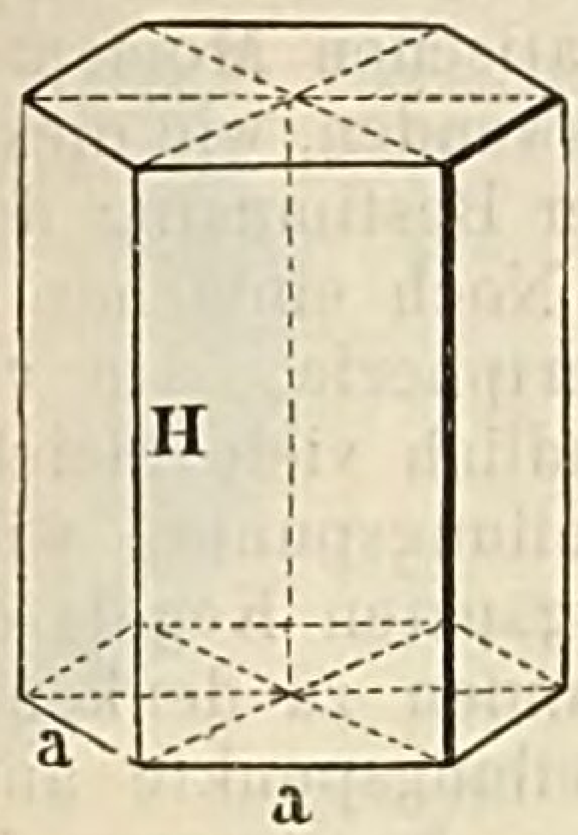
$$x = \frac{\frac{2}{3}\,(r \,.\, \sin\alpha)^3 - \frac{2}{3}\,(r \,.\, \sin\beta)^3}{r^2\,(\alpha - \sin\alpha \,.\, \cos\alpha) - r^2\,(\beta - \sin\beta \,.\, \cos\beta)}$$

Frage 94. Wo liegt der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche oder dem Mantel eines Cylinders und ebenso von der Umfläche eines Prismas?

Figur 154.



Figur 155.

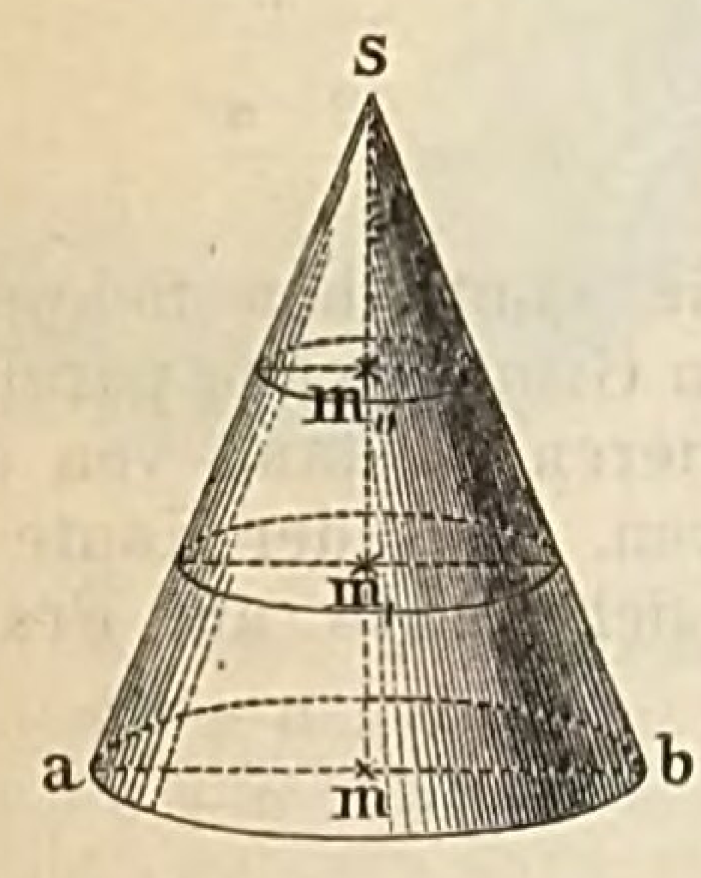


Antwort. Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines Cylinders, und ebenso von der Umfläche eines Prismas liegt im Mittelpunkt der die Schwerpunkte der beiden Endflächen verbindenden Geraden.

Beweis. Man denke sich (Fig. 154 und 155) die Oberfläche durch Schnitte, welche den Endflächen parallel sind, in unendlich schmale Streifen zerlegt. Nach Antwort auf Frage 81 liegt der Schwerpunkt jeder einzelnen dieser so erhaltenen Figuren in deren Zentrum. Sämtliche Schwerpunkte bilden eine homogene schwere Mittellinie, deren Schwerpunkt nach Antwort auf Frage 78 in ihrem Mittelpunkt liegt.

Frage 95. Wo liegt der Schwerpunkt von dem Mantel eines geraden Kegels?

Figur 156.

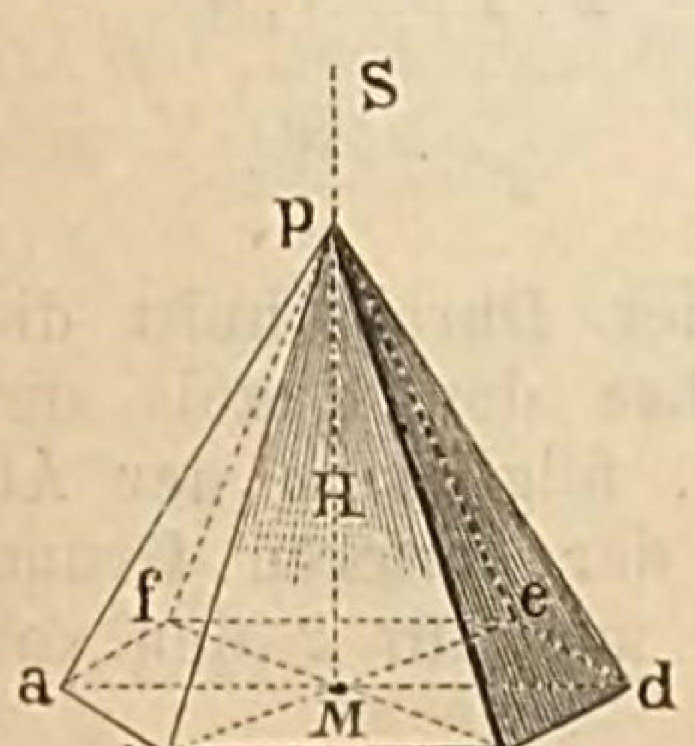


Antwort. Der Schwerpunkt von dem Mantel eines geraden Kegels liegt in der Achse des Kegels, um ein Drittel derselben von der Grundfläche entfernt.

Beweis. Man denke sich den Kegelmantel Fig. 156 durch gerade Linien von der Spitze nach dem Umfang des Grundkreises in unendlich viele gleiche Teile geteilt, so kann man diese als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen in dem Umfang eines Kreises, dessen Ebene um $^2/_3$ der Höhe des Kegels von seiner Spitze oder um $^1/_3$ von seiner Grundfläche entfernt ist; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schwerpunkt des Mantels.

Frage 96. Wo liegt der Schwerpunkt von dem Mantel einer geraden Pyramide?

Figur 157.

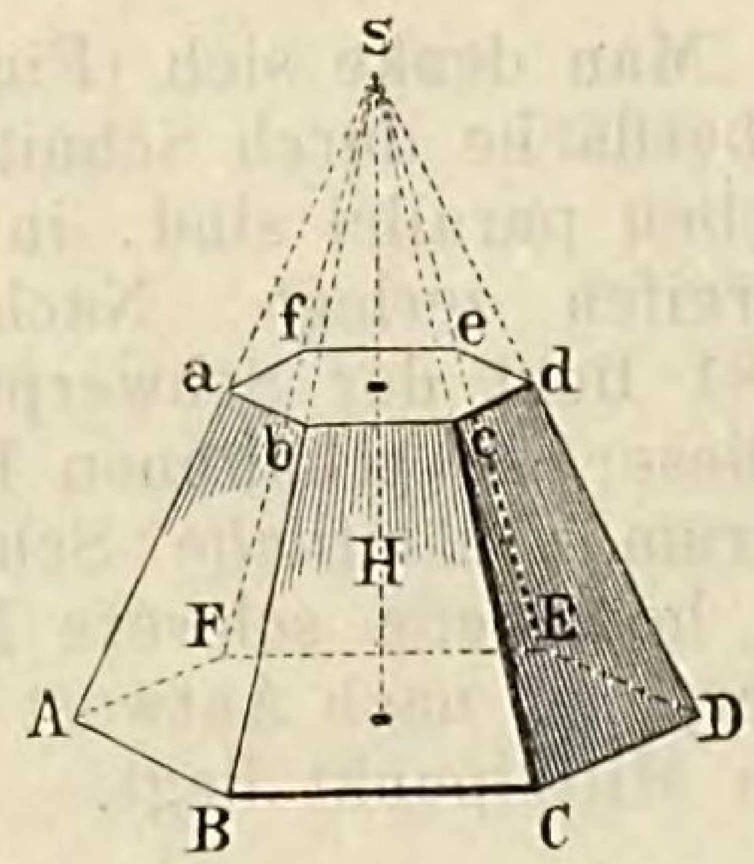


Antwort. Der Schwerpunkt von dem Mantel einer geraden Pyramide liegt in der von der Spitze nach dem Schwerpunkt des Umfangs der Grundfläche gehenden Geraden, um $^1/_3$ derselben von der Grundfläche entfernt.

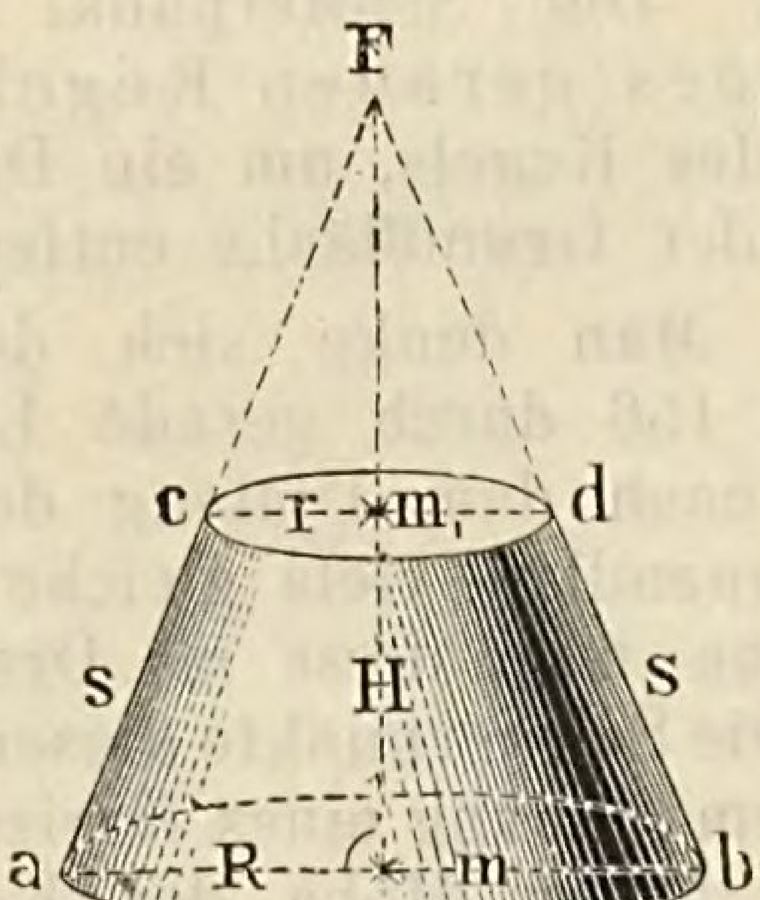
Beweis analog dem Beweis in Antwort auf die vorige Frage 95.

Frage 97. Wie findet man den Schwerpunkt der Mantelfläche eines mit der Basis parallel abgestutzten Kegels?

Figur 158.



Figur 159.



Erkl. 160. Setzt man in die nebenstehende Formel 1). die Durchmesser statt der Halbmesser und sind diese D und d, so ist auch:

$$x = \frac{1}{3} h \frac{D + 2d}{D + d}$$

und wie eine Vergleichung dieses Ausdrucks mit jenem in Antwort auf Frage 87 zeigt, so hat das durch einen Achsenschnitt des abgestuzten Kegels entstehende Paralleltrapez mit der hier in Rede stehenden Mantelfläche denselben Schwerpunkt.

Antwort. Um den Schwerpunkt der Mantelfläche eines mit der Basis parallel abgestutzten Kegels (oder auch einer abgestutzten Pyramide) zu finden, muss man den Kegel ergänzen, und auf diesen aus den beidenTeilen des gegebenen und Ergänzungskegels bestehenden Vollkegel den Satz der statischen Momente genau auf dieselbe Art anwenden, wie dies in Antw. auf Frage 91 bei der Bestimmung des Kreissegments geschah.

Noch einfacher ist es, die untere Kreisperipherie, wie vorhin, in sehr oder unendlich viele gleiche Teile geteilt, und die Teilungspunkte wieder mit der Spitze des ergänzten Kegels durch gerade Linien verbunden zu denken, wodurch, wenn man n Teilungspunkte annimmt, die Mantelfläche des abgestutzten Kegels in n gleiche Paralleltrapeze zerlegt wird. Sind R und r die Halbmesser der oberen und unteren Grundfläche, d und h die Kante und Höhe des Kegels, endlich a und b die Längen der parallelen Seiten eines dieser n Trapeze, also

$$a = \frac{2 R \pi}{n}$$

und

$$b = \frac{2 r \pi}{n}$$

so liegen die sämtlichen Schwerpunkte in einer mit den Grundflächen parallelen Kreisperipherie, deren Abstand von der unteren oder grösseren, nach der Kante des Kegels genommen (siehe Antw. auf Frage 87)

$$z = \frac{1}{3} d \frac{a + 2b}{a + b}$$

oder:

$$z = \frac{1}{3} d \frac{R + 2r}{R + r}$$

ist, wenn man nämlich für a und b die Werte setzt und abkürzt.

Ist x der Abstand dieser durch die Schwerpunkte gehenden Kreisebene von der unteren Grundfläche des Kegels, so ist wegen

$$x : z = h : d$$

sofort:

$$x = \frac{h}{d} z$$

daher, da der Durchschnitt dieser Ebene mit der Achse des Kegels der gesuchte Schwerpunkt, folglich x der Abstand desselben von der unteren Grundfläche ist, sofort, wenn man für z den vorigen Wert substituiert:

$$1) \quad . \; . \; . \quad x = \frac{1}{3} h \frac{R + 2r}{R + r}$$

Frage 98. Wo liegt der Schwerpunkt einer Kugelzone und einer Kugelschale?

Siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen I. Buch Seite 103 und folgende.

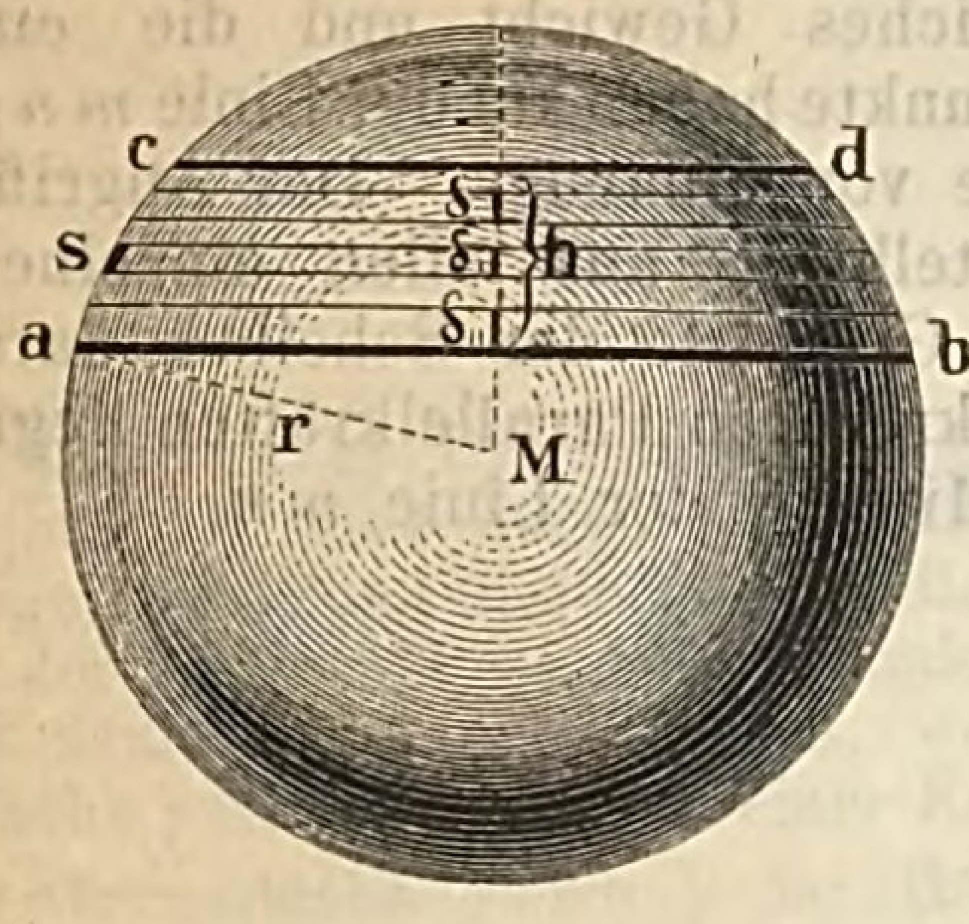
Antwort. Der Schwerpunkt einer Kugelzone[1]) liegt in dem Mittelpunkt ihrer Achse *h*, ebenso auch der einer Kugelschale, und der Abstand des Schwerpunkts einer Halbkugelfläche vom Mittelpunkt ist gleich der Hälfte des Halbmessers.

Beweis. Denkt man sich die Kugelzone *cdba* (Fig 160) durch Ebenen, die dem Grundkreis parallel sind, in unendlich viele Teile von gleicher Höhe geteilt, so haben alle diese Elementarzonen gleiche Flächeninhalte (indem jede davon gleich ist dem Produkt aus dem Umfang des grössten Kugelkreises in die Höhe der Zone) und können deshalb statt derselben auch die Flächeninhalte der korrespondierenden Cylinderzonen gesetzt werden. Die Schwerpunkte dieser einzelnen Zonen liegen in der Senkrechten, die im Mittelpunkt des Grundkreises auf diesem normal steht, das heisst in der Höhe *h* der Kugelzone. Da jeder dieser Schwerpunkte einer gleich grossen Masse entspricht, so ist der Halbierungspunkt der Höhe der Schwerpunkt der Kugelzone.

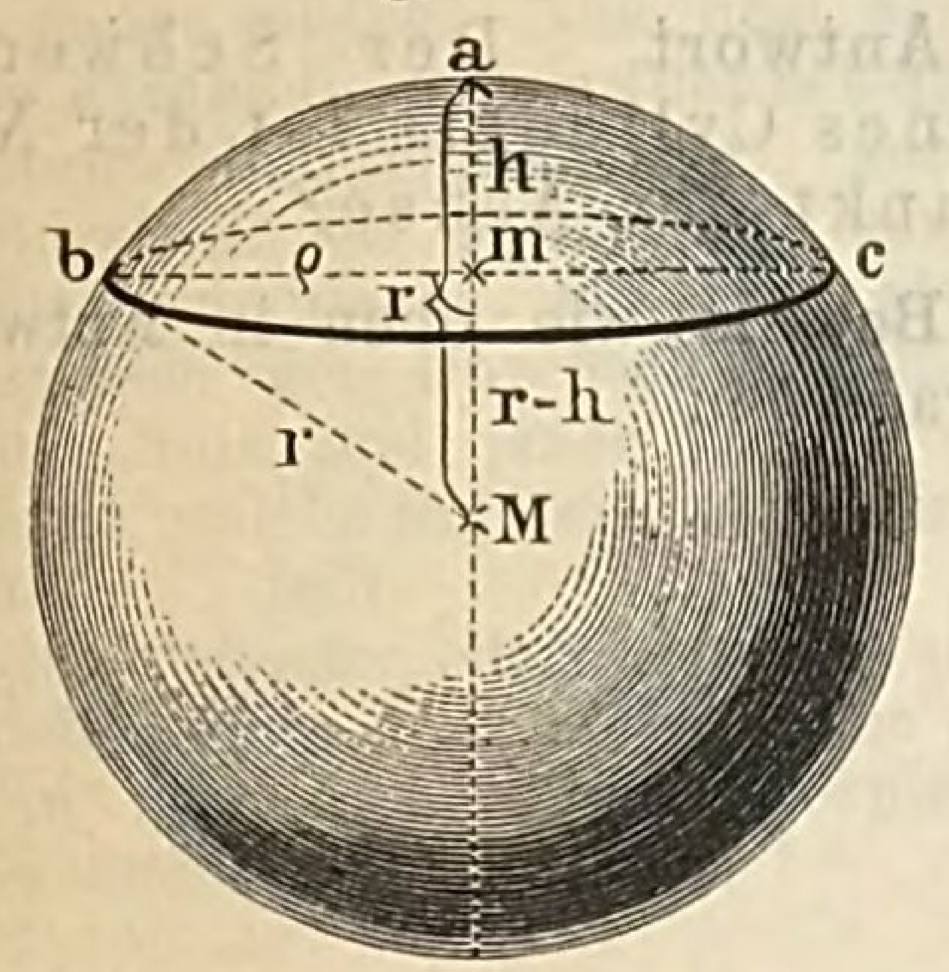
Dasselbe gilt von der Kugelschale oder Calotte (siehe Fig. 161).

[1]) Siehe Erkl. 161.

Figur 160.



Figur 161.



Erkl. 161. Wie die nebenstehenden Fälle beweisen, braucht der Schwerpunkt nicht immer in die eigentliche Masse oder das Fleisch des Körpers zu fallen, sondern kann auch, wie bei einem Ring oder einer Hohlkugel, ganz oder teilweise in einem von ihr umschlossenen Hohlraum liegen.

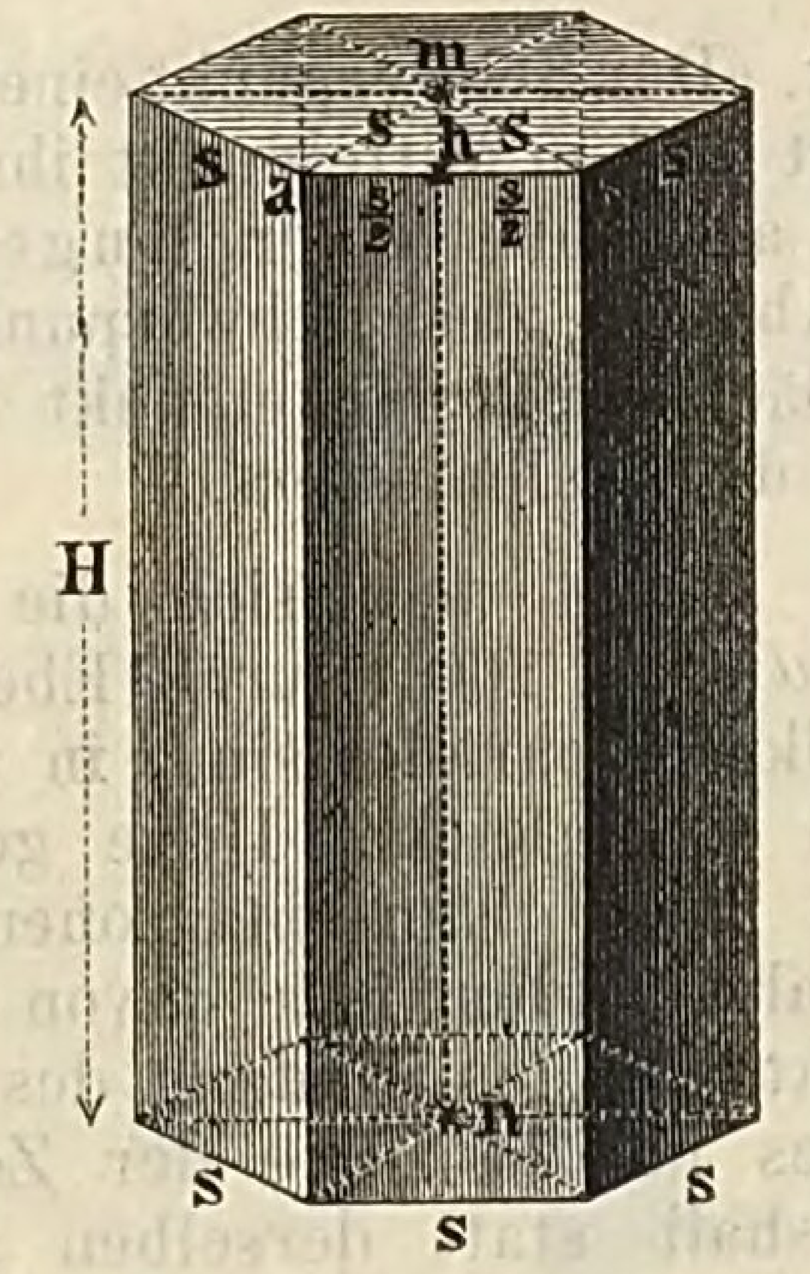
γ). Schwerpunkte von Körpern.

Frage 99. Wo liegt der Schwerpunkt eines beliebigen Prismas?

Antwort. Der Schwerpunkt eines **Prismas** liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen.

Beweis. Man denke sich das Prisma (Fig. 162) durch Ebenen, die mit der Grundfläche parallel gezogen sind, in so dünne Scheiben zerlegt, dass man dieselben als Ebenen ansehen kann. Bestimmt man nun die Schwerpunkte aller dieser unter sich und mit den Grundflächen gleichen ebenen Durchschnitte,

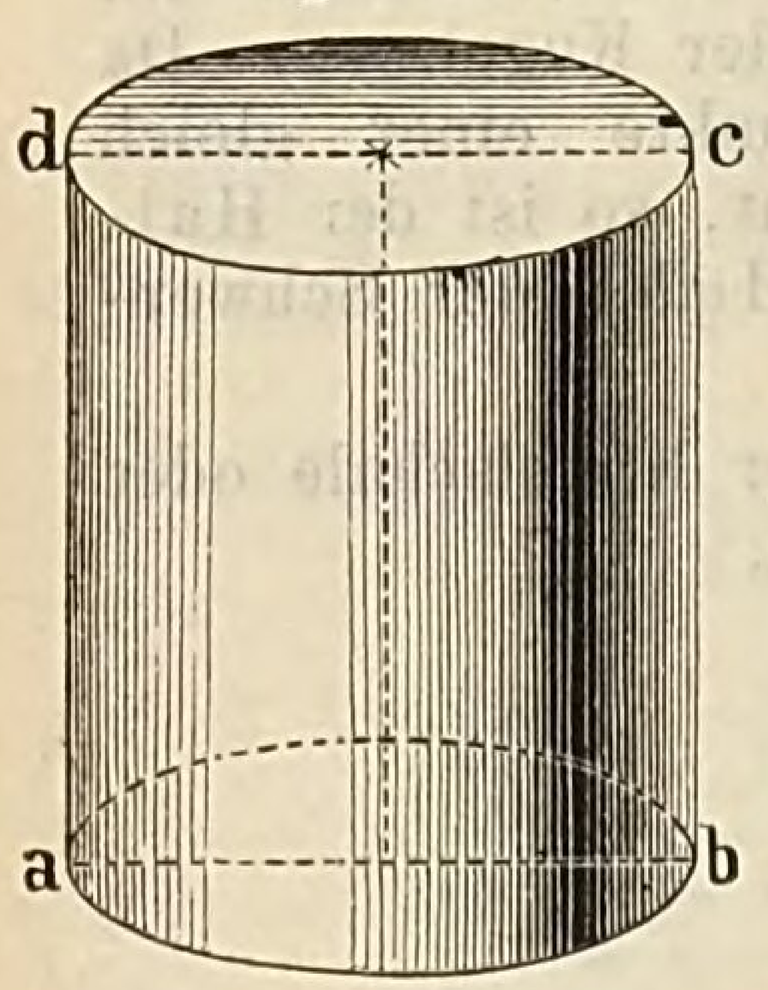
Figur 162.



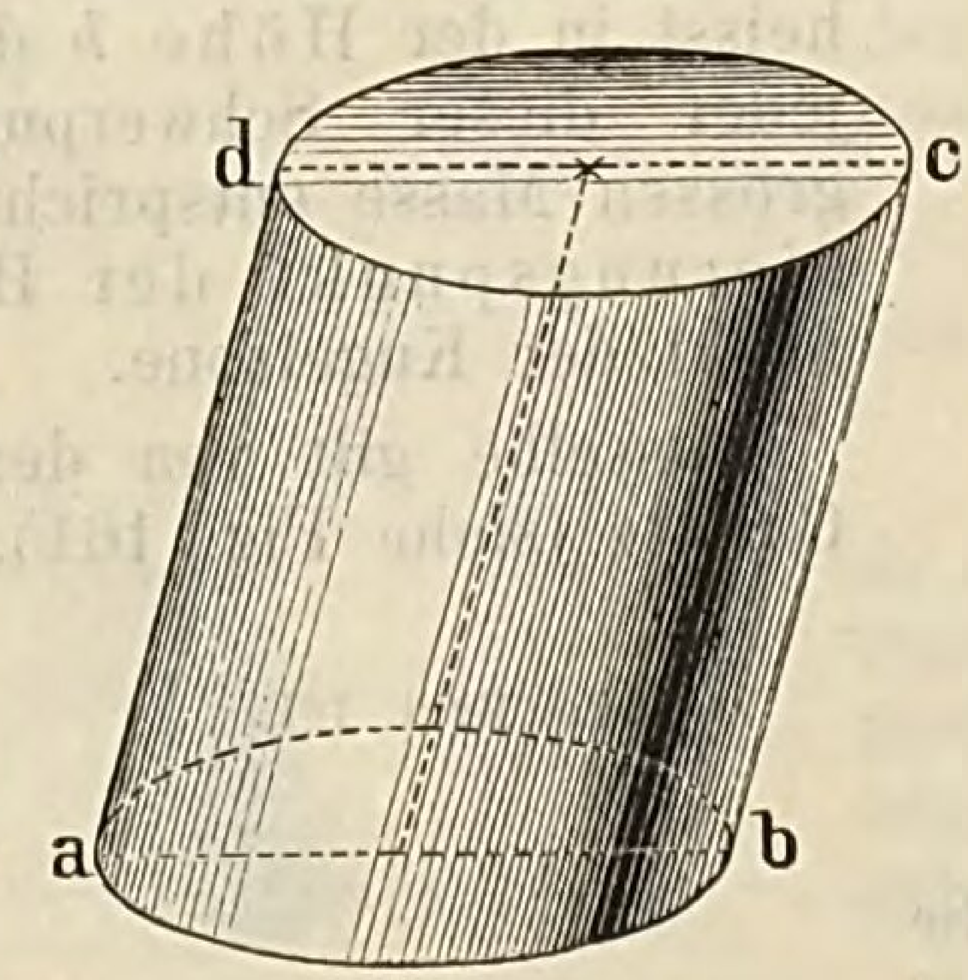
so findet man leicht, dass sie sämtlich in der Linie *mn* liegen müssen, welche die Schwerpunkte *m* und *n* der beiden Grundflächen verbindet. Nimmt man die einzelnen Scheiben als gleich dick und in gleicher Entfernung von einander an, so haben sie alle gleiches Gewicht und die einzelnen Schwerpunkte haben auf der Linie *mn* gleiche Abstände von einander. Der Angriffspunkt der Mittelkraft aus allen einzelnen, die gleichen Gewichte der Scheiben darstellenden, senkrechten Parallelkräften liegt daher in der Mitte S der Linie *mn*.

Frage 100. Wo liegt der Schwerpunkt eines Cylinders?

Figur 163.



Figur 164.

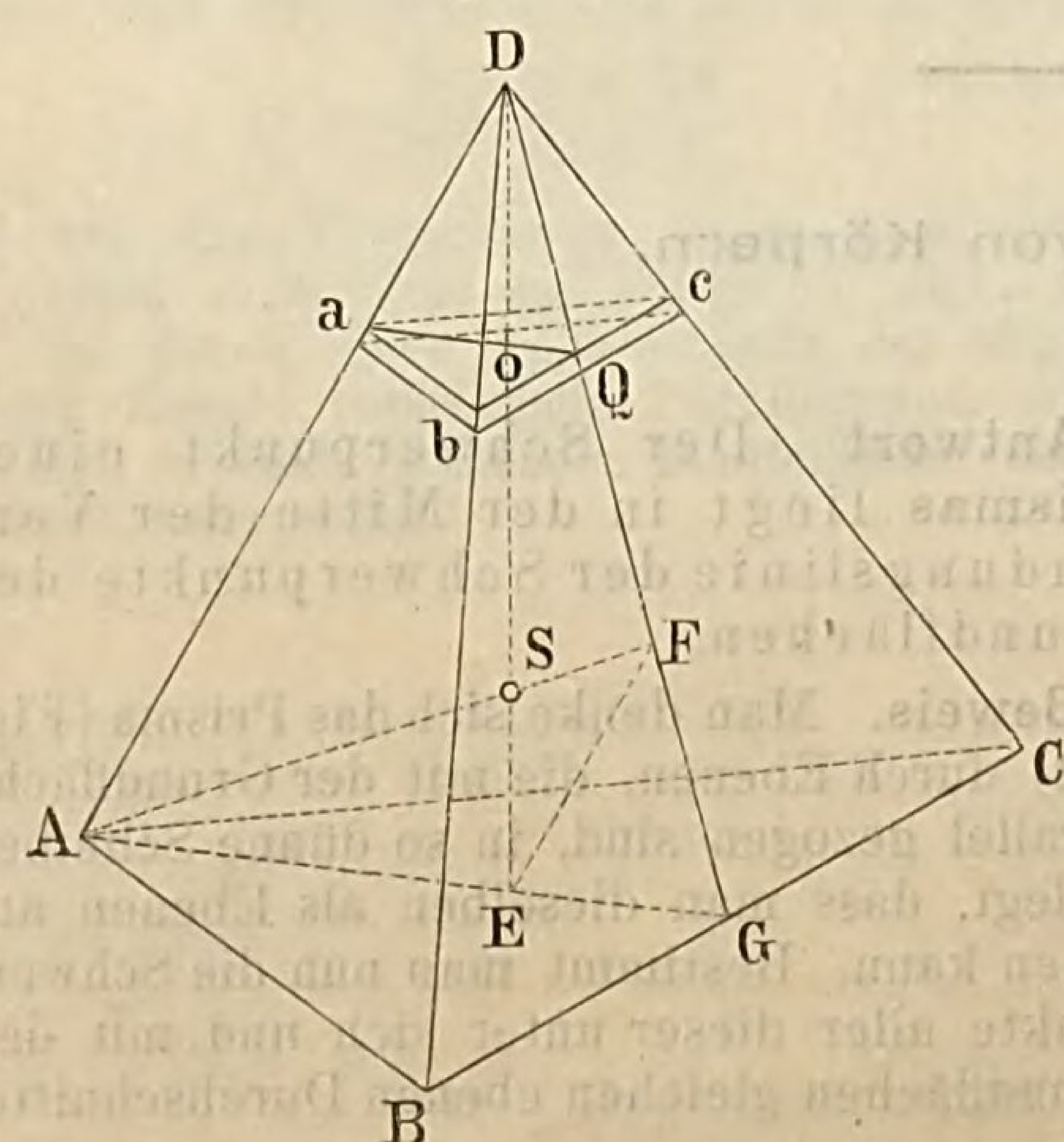


Antwort. Der Schwerpunkt eines Cylinders ist der Mittelpunkt der Achse?

Beweis wie oben in Antwort auf Frage 99.

Frage 101. Wo liegt der Schwerpunkt einer Pyramide?

Figur 165.



Antwort. Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche und ist der Punkt, welcher diese Verbindungslinie von der Grundfläche nach der Spitze hin im Verhältnis 1 : 3 teilt.

Beweis. Die Pyramide sei zunächst eine dreiseitige mit der Grundfläche ABC und der Spitze D. Wenn (Fig. 165) $BG = GC$ und $EG = \frac{1}{2} EA$, so ist E der Schwerpunkt der Grundfläche.

Denken wir uns die Pyramide durch unendlich viele Ebenen parallel zur Grundfläche ABC in unendlich dünne Scheiben geteilt, so liegen die Schwerpunkte derselben sämtlich auf DE. Ist z. B. *abc* eine solche dünne Durchschnittsscheibe, *o* der Durchschnitt mit DE, dann muss, wenn

Erkl. 162. Ist die Pyramide eine mehrseitige, so teile man dieselbe durch Diagonalebenen in dreiseitige Pyramiden und bestimme die Schwerpunkte derselben. Diese Schwerpunkte liegen offenbar sämtlich in einer Ebene, welche der Grundfläche parallel ist und in einer Entfernung von der Grundfläche gleich $\frac{1}{4}$ der Höhe liegt. Daher liegt auch der Schwerpunkt dieser Schwerpunkte, d. h. der Schwerpunkt der ganzen Pyramide in dieser Ebene. Nun liegt der Schwerpunkt der Pyramide, wie eine der nebenstehenden ganz analoge Betrachtung zeigt, auch in der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche, der gesuchte Schwerpunkt ist also der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie und jener parallelen Durchschnittsfigur, welche die Verbindungslinie in dem Verhältnis 1 : 3 teilt.

Da jedes Polyeder oder Vielflach sich durch Diagonalebenen in Pyramiden teilen lässt, so kann man nun auch den Schwerpunkt jedes Polyeders finden.

Erkl. 163. Mit Benutzung des aus Fig. 142 abgeleiteten Satzes erhält man für den Abstand des Schwerpunkts einer dreiseitigen Pyramide von einer bestimmten Ebene unter Berücksichtigung der Fig. 166 die Gleichung:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{1}{4}\left[x_4 - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)\right]$$

oder:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

d. h. der Schwerpunktsabstand ist gleich dem arithmetischen Mittel von den Abständen der vier Eckpunkte der dreiseitigen Pyramide.

ao bis zum Durchschnitt mit bc gezogen, ferner D mit Q und Q mit G verbunden wird, D Q G eine Gerade sein, da D Q und Q G gleichzeitig in der Ebene B D C und in der Ebene A D G liegen; ferner ist, weil $a\mathrm{Q} \parallel \mathrm{AG}$ ist:

$$\overline{\mathrm{Q}o} : \overline{oa} = \overline{\mathrm{GE}} : \overline{\mathrm{EA}} = 1 : 2$$

und

$$\overline{b\mathrm{Q}} : \overline{\mathrm{Q}c} = \overline{\mathrm{BG}} : \overline{\mathrm{GC}} = 1 : 1$$

also ist o der Schwerpunkt von abc. Der Schwerpunkt aller auf D E gelegenen Schwerpunkte, d. h. der Schwerpunkt der Pyramide liegt also auch auf $\overline{\mathrm{DE}}$. Ebenso kann man sich die Pyramide durch Ebenen, die zur Seitenfläche B C D parallel gelegt werden, in unendlich viele dünne Scheiben geteilt denken und man erhält dann in der Linie A F, welche die Ecke A mit dem Schwerpunkt F der Seitenfläche verbindet, eine zweite Schwerlinie der Pyramide. Der Schwerpunkt der Pyramide liegt daher in dem Punkt S, wo sich die beiden Schwerlinien D E und A F schneiden. Zieht man F E, so ist, weil:

$$\overline{\mathrm{GF}} : \overline{\mathrm{FD}} = \overline{\mathrm{GE}} : \overline{\mathrm{EA}} = 1 : 2$$

ist:

$$\overline{\mathrm{EF}} \parallel \overline{\mathrm{AD}}$$

folglich:

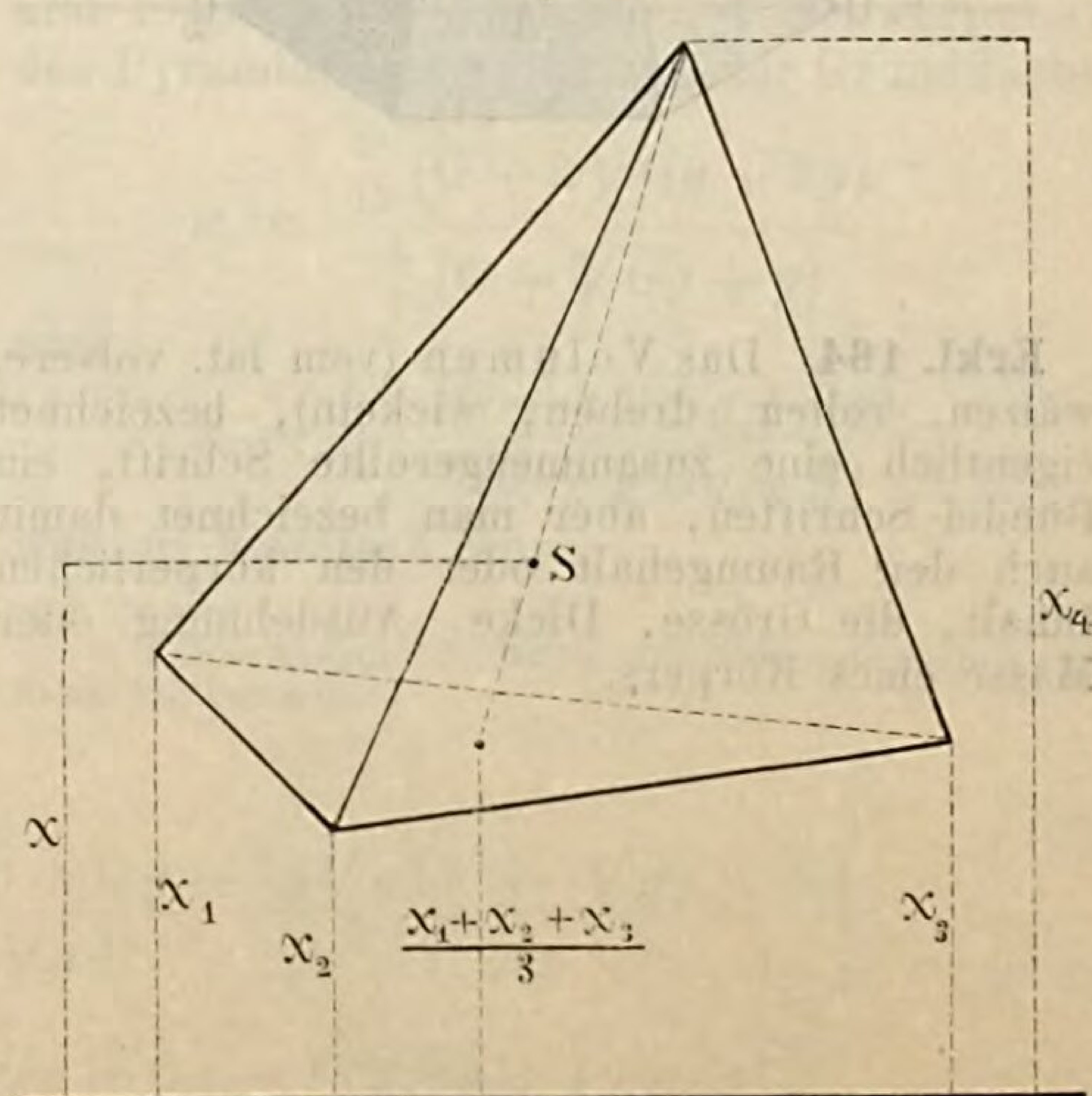
$$\overline{\mathrm{EF}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{ES}} : \overline{\mathrm{SD}}$$

Da aber: $\overline{\mathrm{EF}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{GE}} : \overline{\mathrm{GA}}$

so folgt: $\overline{\mathrm{ES}} : \overline{\mathrm{SD}} = \overline{\mathrm{GE}} : \overline{\mathrm{GA}}$

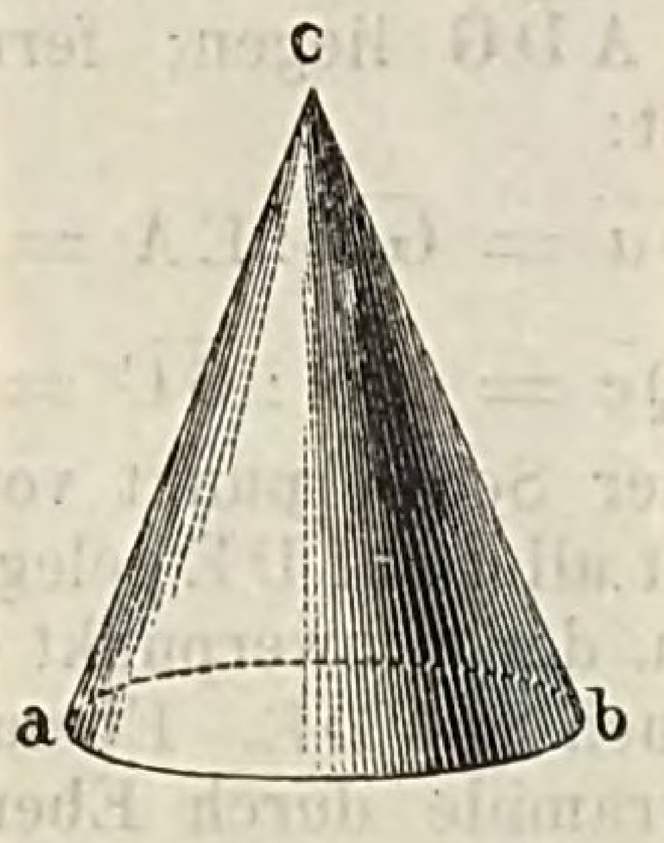
oder: $\overline{\mathrm{ES}} : \overline{\mathrm{SD}} = 1 : 3$

Figur 166.



Frage 102. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kegels?

Figur 167.

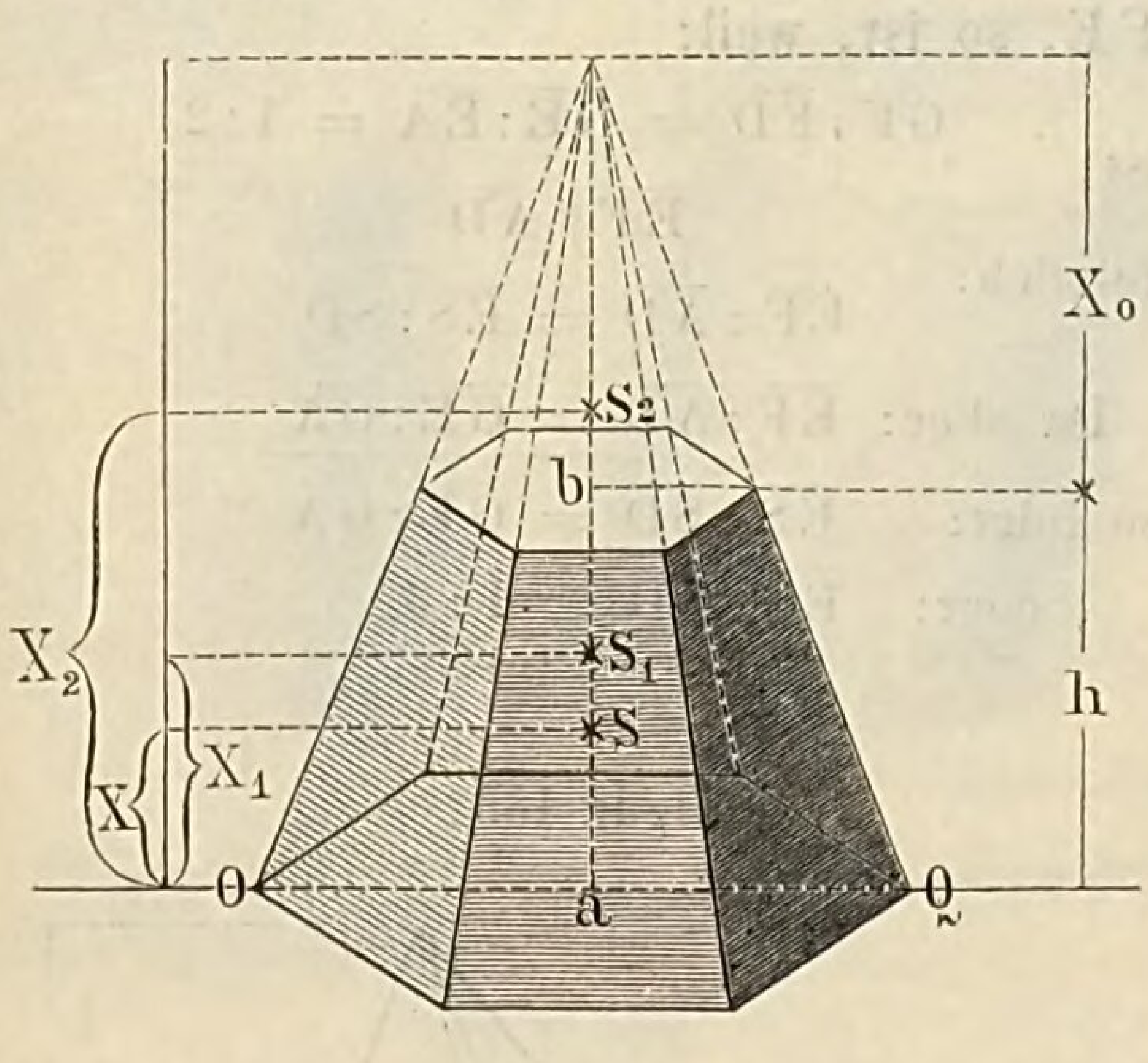


Antwort. Der Schwerpunkt eines Kegels, siehe Fig. 167, liegt auf der Achse und teilt dieselbe von der Grundfläche nach der Spitze hin im Verhältnis 1 : 3.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Auffassung des Kegels als Pyramide (s. Antwort auf Frage 101).

Frage 103. Wo liegt der Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes?

Figur 168.



Erkl. 164. Das Volumen (vom lat. volvĕre, wälzen, rollen, drehen, wickeln), bezeichnet eigentlich eine zusammengerollte Schrift, ein Bündel Schriften, aber man bezeichnet damit auch den Raumgehalt oder den körperlichen Inhalt, die Grösse, Dicke, Ausdehnung oder Masse eines Körpers.

Antwort. Der Schwerpunkt eines **Pyramidenstumpfes**[1]) liegt in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen und zwar so, dass sein Abstand von der Grundfläche:

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)}{(G + \sqrt{Gg} + g)}$$

beträgt, wenn h die Höhe, G die untere und g die obere Fläche des Pyramidenstumpfes bedeutet.

Beweis. Denkt man sich durch den Schwerpunkt a der Grundfläche eine Drehachse O Q gelegt, so muss die Summe der statischen Momente des Stumpfes und der Ergänzungsspitze gleich dem statischen Moment der ganzen Pyramide sein. Es findet sich also in diesem Fall die Lage des Schwerpunkts in ganz analoger Weise wie in Antwort auf Frage 91 aus der Gleichung:

$$V_1 x_1 = V x + V_2 x_2$$

oder:

$$V x = V_1 x_1 - V_2 x_2$$

worin:

V das Volumen[2]) des Pyramidenstumpfes und x den Schwerpunktsabstand desselben,
V_1 das Volumen der ganzen Pyramide und x_1 deren Schwerpunktsabstand,
V_2 das Volumen der Ergänzungsspitze und x_2 den Schwerpunktsabstand derselben

bedeutet.

Nun ist[3]) das Volumen einer Pyramide gleich dem dritten Teil aus Grundfläche mal Höhe. Ist also die Grundfläche G, die Höhe $(h + x_0)$, siehe Fig. 168, dann ist:

[1]) Siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen I. Buch, Seite 33 und folgende.
[2]) Siehe Erkl. 164.
[3]) Siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen I. Buch, Seite 38—40.

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad V_1 = \frac{G(h+x_0)}{3}$$

und nach Antwort auf Frage 101 ist der Abstand des Schwerpunkts der Pyramide:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad x_1 = \frac{h+x_0}{4}$$

folglich das Moment der Pyramide:

$$3). \quad . \quad . \quad V_1 x_1 = \frac{1}{12} G(h+x_0)^2$$

Aus gleichen Gründen ist:

$$4). \quad . \quad . \quad . \quad V_2 = \frac{1}{3} g x$$

und der Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche $g = \frac{1}{4} x_0$, also der Schwerpunktsabstand von der Drehachse:

$$5). \quad . \quad . \quad . \quad x_2 = h + \frac{1}{4} x^0$$

folglich das Moment der Ergänzungsspitze:

$$V_2 x_2 = \frac{1}{3} g x \left(\frac{4h+x_0}{4}\right)$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$V x = V_1 x_1 - V_2 x_2$$

die soeben für $V_1 x_1$ und $V_2 x_2$ ermittelten Werte, so ist:

$$6). \quad . \quad . \quad . \quad V x = \frac{G(h+x_0)^2 - g x (4h+x)}{12}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$7). \quad . \quad . \quad . \quad V x = \frac{h^2}{12}\left(G + 2\sqrt{Gg} + 3g\right)$$

Nun ist das Volumen des Pyramidenstumpfes[1]):

$$8). \quad . \quad . \quad . \quad V = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{Gg} + g\right)$$

und folglich der Abstand des Schwerpunkts des Pyramidenstumpfes von der Grundfläche:

$$x = \frac{\frac{h^2}{12}(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)}{\frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)}$$

oder:

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)}{(G + \sqrt{Gg} + g)}$$

was zu beweisen war.

[1]) Siehe Kleyers I. Buch der Körperberechnungen Seite 38, Formel 3.

Hilfsrechnung.

Nach nebenstehender Gleichung 6). ist:

$$V x = \frac{G(h^2 + 2hx_0 + x_0^2) - 4ghx_0 - gx_0^2}{12}$$

oder auch:

$$V x = \frac{Gh^2 + 2Ghx_0 + Gx_0^2 - 4ghx_0 - gx_0^2}{12}$$

Nun ist aber (nach Kleyers Lehrbuch I. der Körperberechnungen, Seite 39):

$$x_0 = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Setzen wir diesen Wert für x_0 ein, so ist:

$$V x = \frac{1}{12}\left[Gh^2 + \frac{2Gh^2\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} + G\left(\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right)^2 - \frac{4gh^2\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} - g\left(\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right)^2\right]$$

oder:

$$V x = \frac{1}{12}\left[Gh^2 + \frac{2Gh^2\sqrt{g}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})} + \frac{Gh^2 g}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2} - \frac{4gh^2\sqrt{g}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})} - \frac{gh^2 g}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2}\right]$$

oder:

$$V x = \frac{h^2}{12}\left[G + \frac{2G\sqrt{g}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})} + \frac{Gg}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2} - \frac{4g\sqrt{g}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})} - \frac{g^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2}\right]$$

oder:

$$V x = \frac{h^2}{12}\left[\frac{G(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2 + 2G\sqrt{g}(\sqrt{G}-\sqrt{g}) + Gg - 4g\sqrt{g}(\sqrt{G}-\sqrt{g}) - g^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2}\right]$$

oder:

$$V x = \frac{h^2}{12}\left[\frac{G(G - 2\sqrt{Gg} + g) + 2G\sqrt{Gg} - 2Gg + Gg - 4g\sqrt{Gg} + 4g^2 - g^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2}\right]$$

oder:

$$Vx = \frac{h^2}{12}\left[\frac{G^2 - 2G\sqrt{Gg} + Gg + 2G\sqrt{Gg} - 2Gg + Gg - 4g\sqrt{Gg} + 4g^2 - g^2}{(\sqrt{G} - \sqrt{g})^2}\right]$$

oder:

$$Vx = \frac{h^2}{12}\left[\frac{G^2 - 4g\sqrt{Gg} + 3g^2}{(\sqrt{G} - \sqrt{g})^2}\right]$$

oder:

$$Vx = \frac{h^2}{12}\left[\frac{G^2 - 4g\sqrt{Gg} + 3g^2}{G - 2\sqrt{Gg} + g}\right]$$

Es ist aber die Klammer

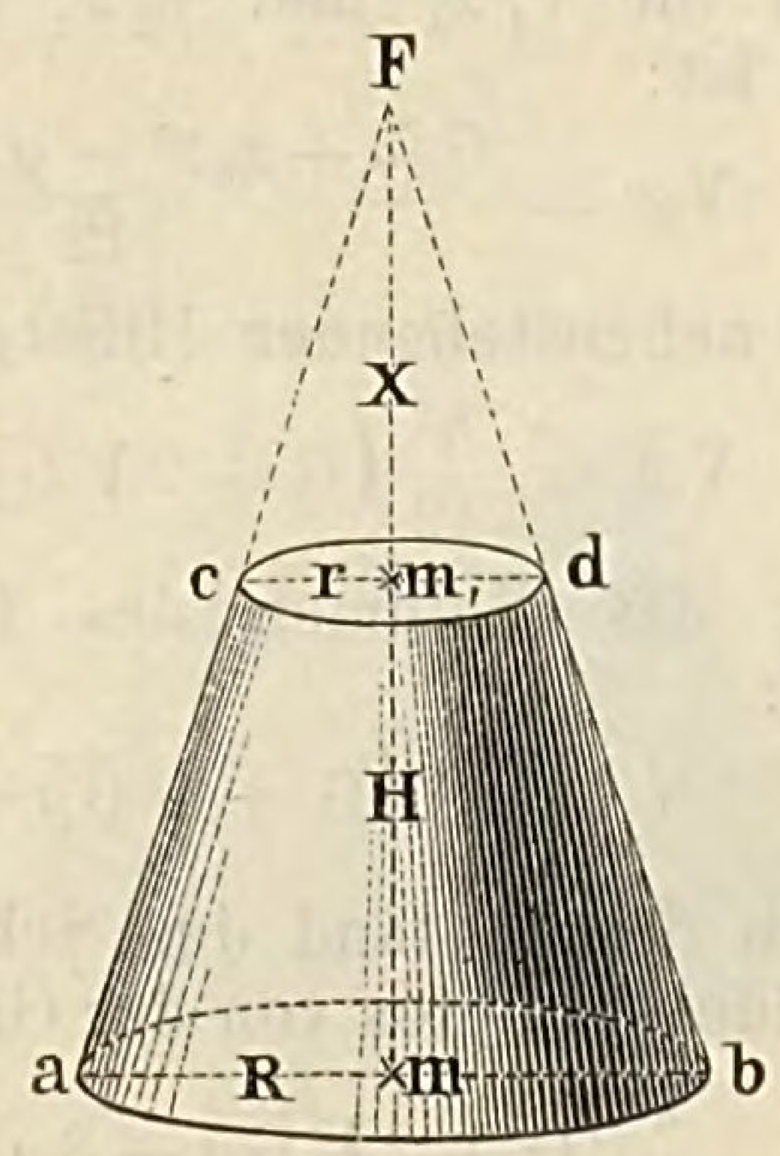
$$(G - 2\sqrt{Gg} + g) : (G^2 - 4g\sqrt{Gg} + 3g^2) = G + 2\sqrt{Gg} + 3g$$

$$\begin{array}{r} -G^2 + 2G\sqrt{Gg} - Gg \\ \hline 2G\sqrt{Gg} - 4g\sqrt{Gg} - Gg + 3g^2 \\ -2G\sqrt{Gg} - 2g\sqrt{Gg} + 4Gg \\ \hline -6g\sqrt{Gg} + 3Gg + 3g^2 \\ +6g\sqrt{Gg} - 3Gg - 3g^2 \\ \hline \end{array}$$

folglich: $Vx = \frac{h^2}{12}\left(G + 2\sqrt{Gg} + 3g\right)$

Frage 104. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kegelstumpfs?

Figur 169.



Antwort. Für den Schwerpunktsabstand eines Kegelstumpfs oder abgekürzten Kegels gilt dieselbe Bestimmung wie für die abgekürzte Pyramide (siehe Antwort auf die vorige Frage 103). Im letzteren Fall sind dann, wenn r der Radius der grösseren, ϱ der Radius der kleineren Fläche ist, die beiden Flächen:

$$G = r^2\pi$$

$$g = \varrho^2\pi$$

weshalb man auch erhält:

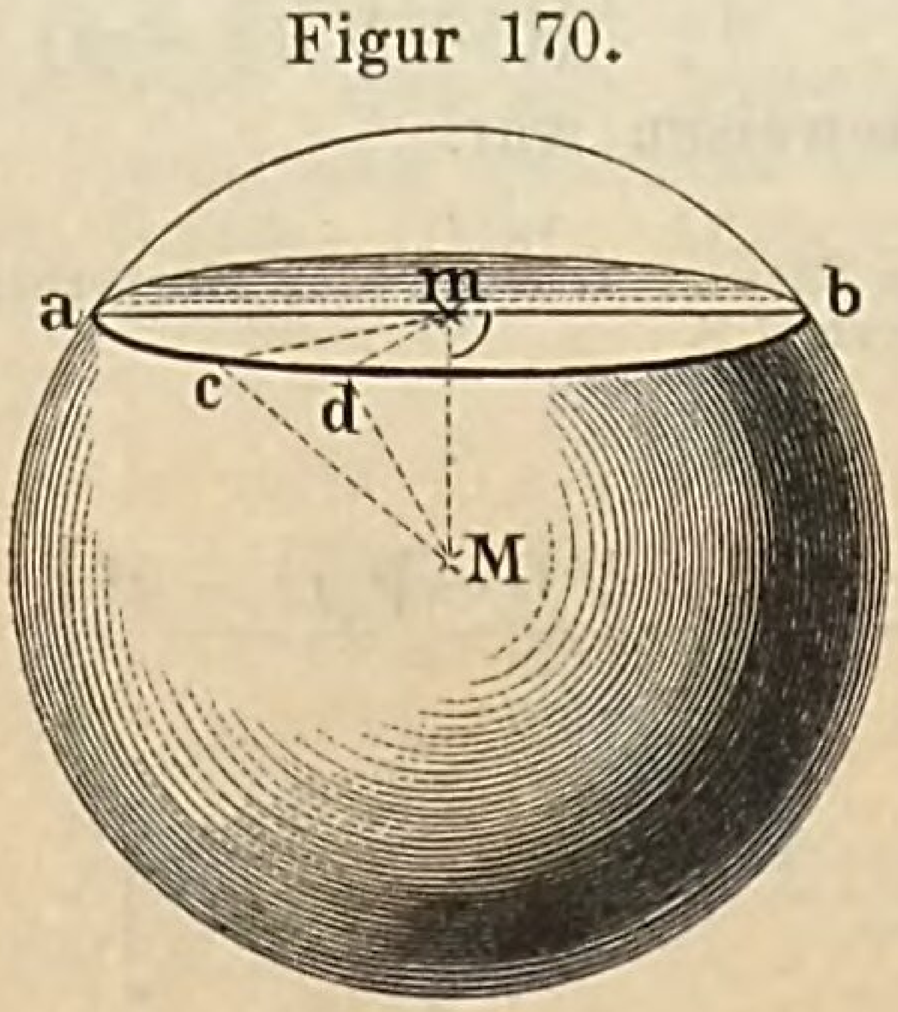
$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2\pi + 2\sqrt{r^2\pi\varrho^2\pi} + 3\varrho^2\pi}{r^2\pi + \sqrt{r^2\pi\varrho^2\pi} + \varrho^2\pi}$$

oder:

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2r\varrho + 3\varrho^2}{r^2 + r\varrho + \varrho^2}$$

Frage 105. Wo liegt der Schwerpunkt einer Kugel?

Figur 170.



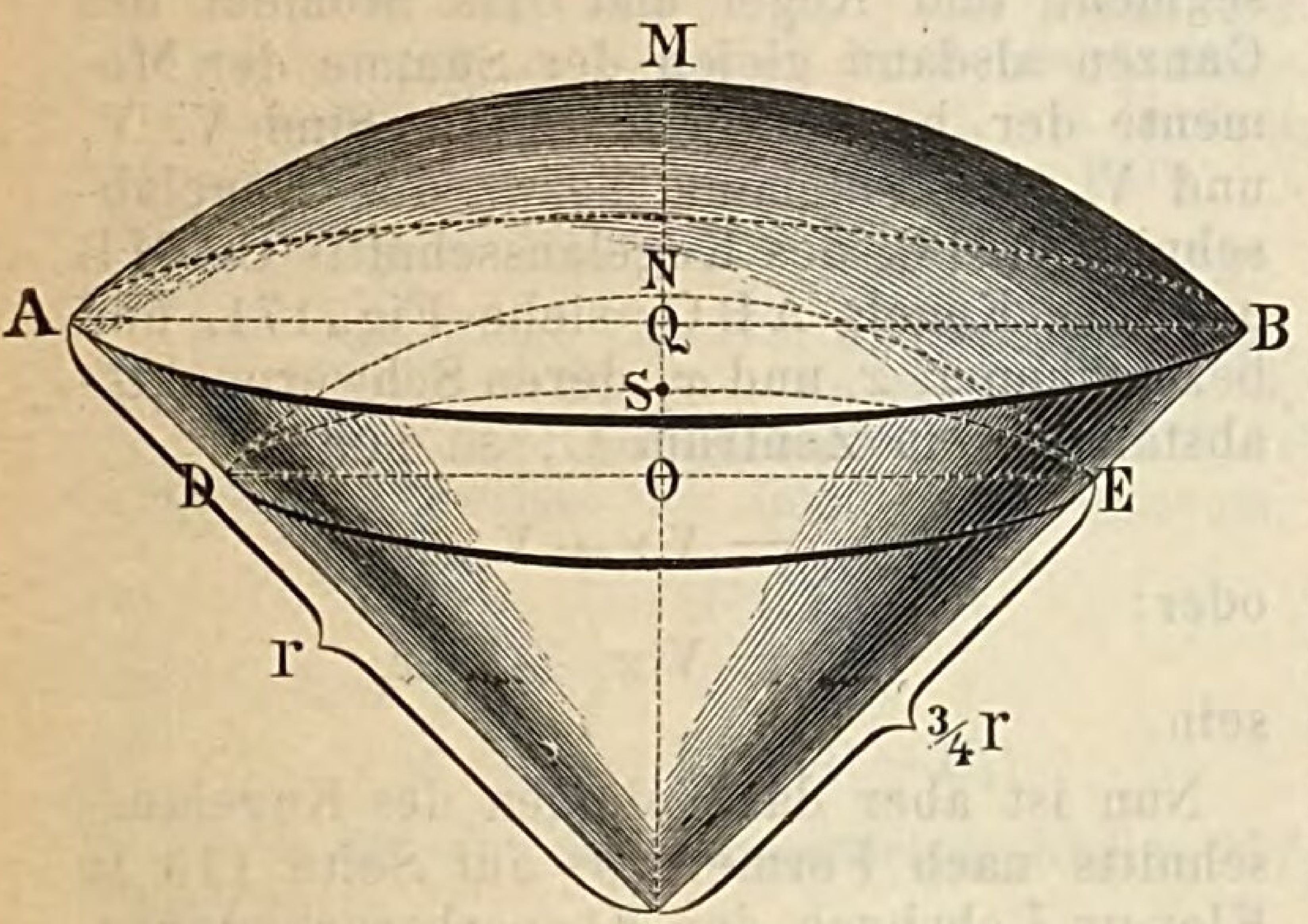
Antwort. Der Schwerpunkt einer Kugel und der Kugeloberfläche ist der Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. Die Schwerpunkte aller parallelen Kugelkreise, sowie ihrer Umfänge, aus denen man sich die Kugel, resp. ihre Oberfläche bestehend denken kann, liegen auf der Achse Mm dieser Parallelkreise; daher liegt auch der Schwerpunkt der Kugel und der Oberfläche auf dieser Achse. Da dasselbe natürlich für jede Schar oder Gruppe von Parallelkreisen gilt, so ist der Schwerpunkt der Durchschnittspunkt aller Achsen von Parallelkreisen, d. h. der Mittelpunkt M der Kugel.

Frage 106. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kugelausschnitts oder Kugelsektors?

Antwort. Der Schwerpunkt eines Kugelausschnitts[1]) fällt mit dem Schwerpunkt einer Kugelhaube zusammen, deren Halbmesser $= \frac{3}{4}$ von dem des Kreisausschnitts ist und die zu demselben Zentriwinkel gehört.

Figur 171.



Beweis. Man denke sich den Kugelausschnitt aus sehr vielen Pyramiden bestehend, die mit ihren Spitzen im Mittelpunkt C der Kugel und mit ihren unendlich kleinen Grundflächen in der Oberfläche der Kugel liegen. Die Höhe einer solchen Pyramide ist dann dem Halbmesser r der Kugel gleich (siehe Fig. 171). Da nun der Schwerpunkt jeder dieser Elementarpyramiden in deren Höhe und zwar nach Antwort auf Frage 101 in der Entfernung $\frac{3}{4}r$ von der Spitze, d. heisst vom Mittelpunkt der Kugel liegt, so finden sich die Schwerpunkte sämtlicher Pyramiden in der Kugelschale DNE vom Halbmesser $\frac{3}{4}r$. Diese Kugelschale enthält die Schwere des ganzen Kugelausschnitts, und ihr Schwerpunkt ist somit auch der des vorliegenden Kugelsektors CAMB. Der Schwerpunkt der Kugelschale DNE liegt aber nach Antwort auf Frage 98 in der Mitte S ihrer Höhe $\overline{NO}$, und da

$$\overline{NO} = \frac{3}{4}\overline{MQ} = \frac{3}{4}h$$

ist, so ergibt sich für den Abstand:

$$\overline{SC} = x$$

des Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Kugel die Gleichung:

$$x = \frac{3}{4}r - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}h$$

oder:

$$x = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$$

oder:

$$x = \frac{3}{8}(2r - h)$$

[1]) Siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen I. Buch Seite 114.

Erkl. 165. Setzt man in der nebenstehenden Gleichung $h = r$, so erhält man für den Schwerpunktsabstand der Halbkugel vom Mittelpunkt den Wert:

$$x = \frac{3}{8}(2r - r)$$

oder:

$$x = \frac{3}{8}r$$

Frage 107. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kugelabschnitts oder Kugelsegments?

Antwort. Der Schwerpunkt eines Kugelabschnitts liegt auf dem Halbmesser des Mittelpunkts desselben in einer Entfernung vom Mittelpunkt der zugehörigen Kugel, so, dass

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$$

Erkl. 166. Bezeichnet man den Halbmesser AQ = QB (Fig. 171) der Grundfläche durch R, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck ACQ:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{QC}^2$$

d. i.:

$$r^2 = R^2 + (r-h)^2$$

oder:

$$r^2 = R^2 + r^2 - 2rh + h^2$$

und daraus:

$$R^2 = 2rh - h^2$$

oder:

$$r = \frac{R^2 + h^2}{2h}$$

Wird dieser Wert in der nebenstehenden Formel für r substituiert oder eingesetzt und gleichzeitig der Abstand des Schwerpunkts von der Basis AB mit y bezeichnet, so erhält man:

$$y = x - \overline{CQ}$$

oder:

$$y = x - (r - h)$$

oder da nach nebenstehendem Beweis:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$$

so ist:

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h} - (r-h)$$

hieraus erhält man nach einfacher Reduktion:

$$y = \frac{h}{4} \cdot \frac{(4r-h)}{3r-h}$$

Setzen wir nun in diese letzte Gleichung den oben für r ermittelten Wert, so ergibt sich:

$$y = \frac{h\left(4 \cdot \frac{R^2+h^2}{2h} - h\right)}{4\left(3 \cdot \frac{R^2+h^2}{2h} - h\right)}$$

oder diese Gleichung passend umgewandelt und reduziert:

$$y = \frac{1}{2} h \frac{2R^2 + h^2}{3R^2 + h^2}$$

welche Formel für den praktischen Gebrauch bequemer ist als die nebenstehende.

Für die Halbkugel wird $h = r$; also:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{2r} = \frac{3}{8} r \quad \text{wie zuvor.}$$

Hilfsrechnung.

Für

$$Vx = \frac{2}{3} r^2 \pi h \cdot \frac{3}{8} (2r - h) - \frac{1}{3} \pi h (2r - h) \cdot (r-h) \cdot \frac{3}{4} (r-h)$$

kann man auch setzen:

$$Vx = \frac{1}{4} r^2 \pi h (2r-h) - \frac{1}{4} \pi h (2r-h)(r-h)^2$$

oder:

$$Vx = \frac{1}{4} \pi h \Big(r^2(2r-h) - (2r-h)(r^2 - 2hr + h^2)\Big)$$

oder:

$$Vx = \frac{1}{4} \pi h \Big((2r-h)(r^2 - r^2 + 2hr - h^2)\Big)$$

oder:

$$Vx = \frac{1}{4} \pi h \Big((2r-h) . h . (2r-h)\Big)$$

oder:

$$Vx = \frac{1}{4} \pi h^2 (2r-h)^2$$

ist, wenn r der Halbmesser der Kugel und h die Höhe des Abschnitts ist.

Beweis. Zur Bestimmung des Schwerpunktsabstands benutzt man in diesem Fall dieselbe Methode, welche in Antwort auf Frage 91 bei der Schwerpunktsbestimmung des Kreissegments bereits Anwendung fand, indem man den Kugelsektor zerlegt in Kugelsegment und Kegel und das Moment des Ganzen alsdann gleich der Summe der Momente der beiden Teile setzt. Sind V, V_1 und V_2 die Volumina bezw. des Kugelabschnitts AMB, des Kugelausschnitts CAMB und des Kegels ABC, siehe Fig. 171, und bezeichnen x, x_1 und x_2 deren Schwerpunktsabstände vom Zentrum C, so muss:

$$V_1 x_1 = Vx + V_2 x_2$$

oder:

$$Vx = V_1 x_1 - V_2 x_2$$

sein.

Nun ist aber das Volumen des Kugelausschnitts nach Formel 10ª auf Seite 115 in Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen, I. Buch:

$$V_1 = \frac{2}{3} r^2 \pi h$$

und dessen Schwerpunktsabstand nach Antwort auf Frage 106:

$$x_1 = \frac{3}{8}(2r - h)$$

also ist:

$$V_1 x_1 = \frac{2}{3} r^2 \pi h \cdot \frac{3}{8}(2r-h)$$

Das Volumen des Kegels ABC ist:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi h (2r - h)(r - h)$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen, I. Buch Seite 116)

und der Schwerpunktsabstand desselben nach Antwort auf Frage 102:

$$x_2 = \frac{3}{4}(r-h)$$

und somit:

$$V_2 x_2 = \frac{1}{3} \pi h (2r-h)(r-h) \cdot \frac{3}{4}(r-h)$$

folglich ist:

$$Vx = \frac{2}{3} r^2 \pi h \cdot \frac{3}{8}(2r-h) - \frac{1}{3} \pi h (2r-h) \cdot (r-h) \cdot \frac{3}{4}(r-h)$$

oder:

$$Vx = \frac{1}{4} \pi h^2 (2r-h)^2$$

(siehe nebenstehende Hilfsrechnung)

Erkl. 167. Soll der Schwerpunkt einer körperlichen Kugelzone oder Kugelschicht (siehe Fig. 172) ermittelt werden, so schlage man dasselbe Verfahren ein, welches in nebenstehender Antwort zur Ermittelung des Schwerpunkts eines Kugelabschnitts angewandt wurde.

Es sei Z der körperliche Inhalt der Kugelzone und y der gesuchte Schwerpunktsabstand derselben von ihrer Grundfläche agb, V der Inhalt des Kugelabschnitts afb und y_1 dessen Schwerpunktsabstand von g, v der Inhalt des Kugelabschnitts cfd und y_2 der Schwerpunktsabstand desselben von g, dann ist, wie in dem in nebenstehender Antwort erörterten Fall:

$$Zy + vy_2 = Vy_1 \quad \text{oder} \quad Zy = Vy_1 - vy_2$$

Setzt man (siehe Fig. 172) $gb = \varrho$, $id = \varrho_1$, $gf = H$, $if = H_1$ und $gi = H - H_1 = h$, so ist, nach der in nebenstehender Antwort enthaltenen Formel der Inhalt des Segments:

$$1) \ldots V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H)$$

und

$$2) \ldots v = \frac{1}{3}\pi H_1^2 (3R - H_1)$$

worin R den der Kugel zugehörigen Radius Mf bezeichnet.

Da aber (nach dem pythagor. Lehrsatz):

$$R = \frac{\varrho^2 + H^2}{2H} \quad \text{und} \quad R = \frac{\varrho_1^2 + H_1^2}{2H_1}$$

ist, so ist auch:

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 \left(\frac{3(\varrho^2 + H^2)}{2H} - H\right)$$

oder:

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 \left(\frac{3\varrho^2 + 3H^2 - 2H^2}{2H}\right)$$

oder:

$$3) \ldots V = \frac{1}{6}\pi H \left(3\varrho^2 + H^2\right)$$

ebenso erhält man:

$$4) \ldots v = \frac{1}{6}\pi H_1 \left(3\varrho_1^2 + H_1^2\right)$$

und somit ist, da $Z = V - v$ ist:

$$Z = \frac{1}{6}\pi H (3\varrho^2 + H^2) - \frac{1}{6}\pi H_1 (3\varrho_1^2 + H_1^2)$$

oder:

$$5) \ldots Z = \frac{1}{6}\pi \left(H(3\varrho^2 + H^2) - H_1(3\varrho_1^2 + H_1^2)\right)$$

da aber

$$R = \frac{\varrho^2 + H^2}{2H} = \frac{\varrho_1^2 + H_1^2}{2H_1}$$

und deshalb

$$H_1(\varrho^2 + H^2) = H(\varrho_1^2 + H_1^2)$$

oder auch

$$3H_1(\varrho^2 + H^2) = 3H(\varrho_1^2 + H_1^2)$$

so bleibt die Gleich. 5). unverändert, wenn man $3H_1(\varrho^2 + H^2)$ dazu addiert, und $3H(\varrho_1^2 + H_1^2)$ davon subtrahiert. Hierdurch ergibt sich:

$$Z = \frac{1}{6}\pi \left(H(3\varrho^2 + H^2) - H_1(3\varrho_1^2 + H_1^2) - 3H_1(\varrho^2 + H^2) + 3H(\varrho^2 + H_1^2)\right)$$

Hieraus erhält man aber durch schickliche Transformationen oder Verwandlungen und indem man für $H - H_1 = h$ einsetzt, schliesslich:

Da nun, nach Formel 11 Seite 116 in Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen, I. Buch, der Inhalt des Kugelsegments:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$$

ist, so erhalten wir für den Schwerpunktsabstand dieses Segments:

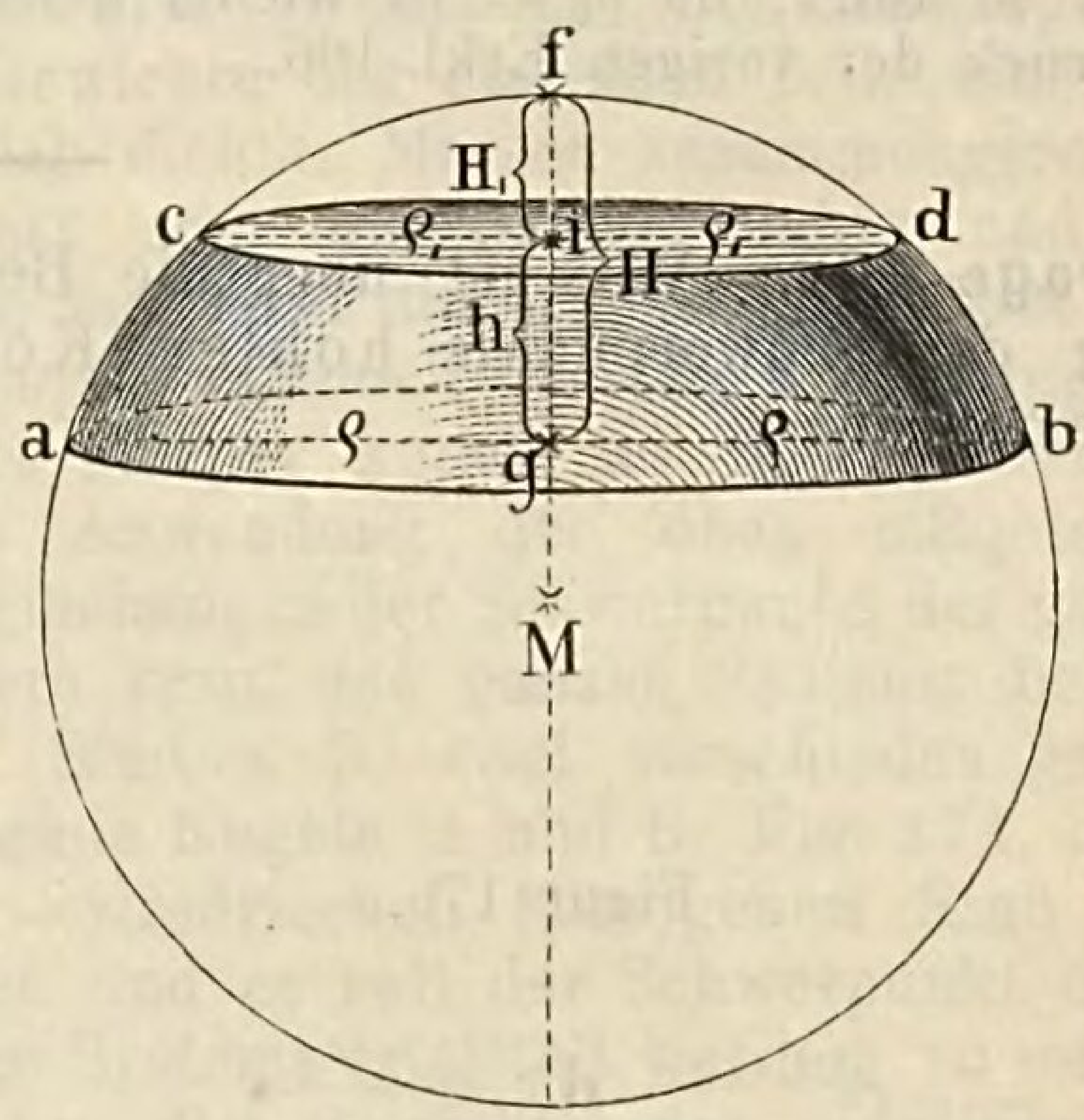
$$x = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2}{\frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)}$$

oder:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$$

was zu beweisen war.

Figur 172.



$$Z = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + 3\varrho_1{}^2 + h^2)$$

Ferner ist nach der vorigen Erkl. 166 der Schwerpunktsabstand des Kugelsegments vom Volumen V:

$$y_1 = \frac{1}{2}\mathrm{H}\left(\frac{2\varrho^2 + \mathrm{H}^2}{3\varrho^2 + \mathrm{H}^2}\right)$$

und

$$y_2 = h + \frac{1}{2}\mathrm{H}_1\left(\frac{2\varrho_1{}^2 + \mathrm{H}_1{}^2}{3\varrho^2 + \mathrm{H}_1{}^2}\right)$$

Setzt man nun alle diese Werte in die Gleichung

$$Zy = \mathrm{V}y_1 - vy_2$$

oder:

$$y = \frac{\mathrm{V}y_1 - vy_2}{\mathrm{Z}}$$

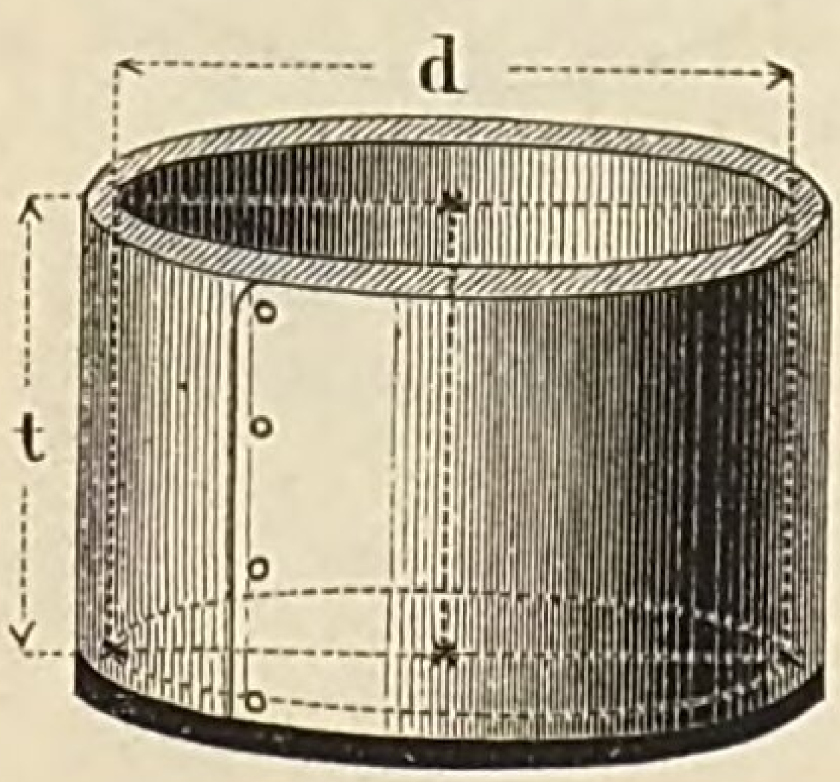
so findet man nach mehreren Reduktionen und abermaligen Transformationen, mit Benutzung der oben angegebenen Werte von R endlich:

$$6). \ldots y = \frac{1}{2}h\,\frac{2\varrho^2 + 4\varrho_1{}^2 + h^2}{3\varrho^2 + 3\varrho_1{}^2 + h^2}$$

Geht die Zone in einen Kugelabschnitt vom Halbmesser $gb = \varrho$ und der Höhe $gf = \mathrm{H}$ über, so folgt, da $\varrho_1 = 0$, wieder genau der Ausdruck der vorigen Erkl. 166.

Frage 108. Was ist über die Bestimmung des Schwerpunkts **hohler Körper** zu bemerken?

Figur 173.



Antwort. Es wird selten gefordert, den Schwerpunkt **hohler Körper** zu bestimmen und deshalb dürfte es als genügend erscheinen, bloss diejenigen Bestimmungen hier aufzunehmen, die sich auf eine durchaus gleichmässige Dicke und Dichtigkeit der einschliessenden Wände beziehen, in welchem Fall die Aufgabe auf die Bestimmung des Schwerpunkts der Flächen zurückkommt. Bei einem jeden hohlen Prisma und Cylinder mit parallelen Endflächen liegt der Schwerpunkt der ganzen Oberfläche in der Mitte einer Linie, welche die Schwerpunkte beider Endflächen verbindet (siehe auch Antwort auf Frage 94).

Ein Hohlmass, siehe Fig. 173, besteht aus einer ringförmigen Fläche, deren Inhalt:

$$\mathrm{F}_1 = 2r\pi h$$

ist, wenn r den Halbmesser und h die Höhe bezeichnet, und aus einem Boden, dessen Flächeninhalt:

$$\mathrm{F}_2 = r^2\pi$$

ist. Der Schwerpunktsabstand des Ringes ist:

$$x_1 = \frac{1}{2}h$$

und demnach das Moment des Ringes:

$$\mathrm{F}_1 x_1 = 2r\pi h \cdot \frac{1}{2}h$$

oder:

$$\mathrm{F}_1 x_1 = r\pi h^2$$

Der Schwerpunktsabstand des Bodens ist:

$$x_2 = 0$$

folglich das Moment des Bodens:

$$\mathrm{F}_2 x_2 = r^2\pi \,.\, 0 = 0$$

Folglich ist die Summe der Momente der Flächen:

1). . . . $Fx = r\pi h^2$

und die Summe der Flächen:

$$F = 2r\pi h + r^2\pi$$

oder:

2). . . . $F = r\pi(2h + r)$

Gleichung 1). durch Gleichung 2). dividiert, gibt den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Bodenfläche in der Achse:

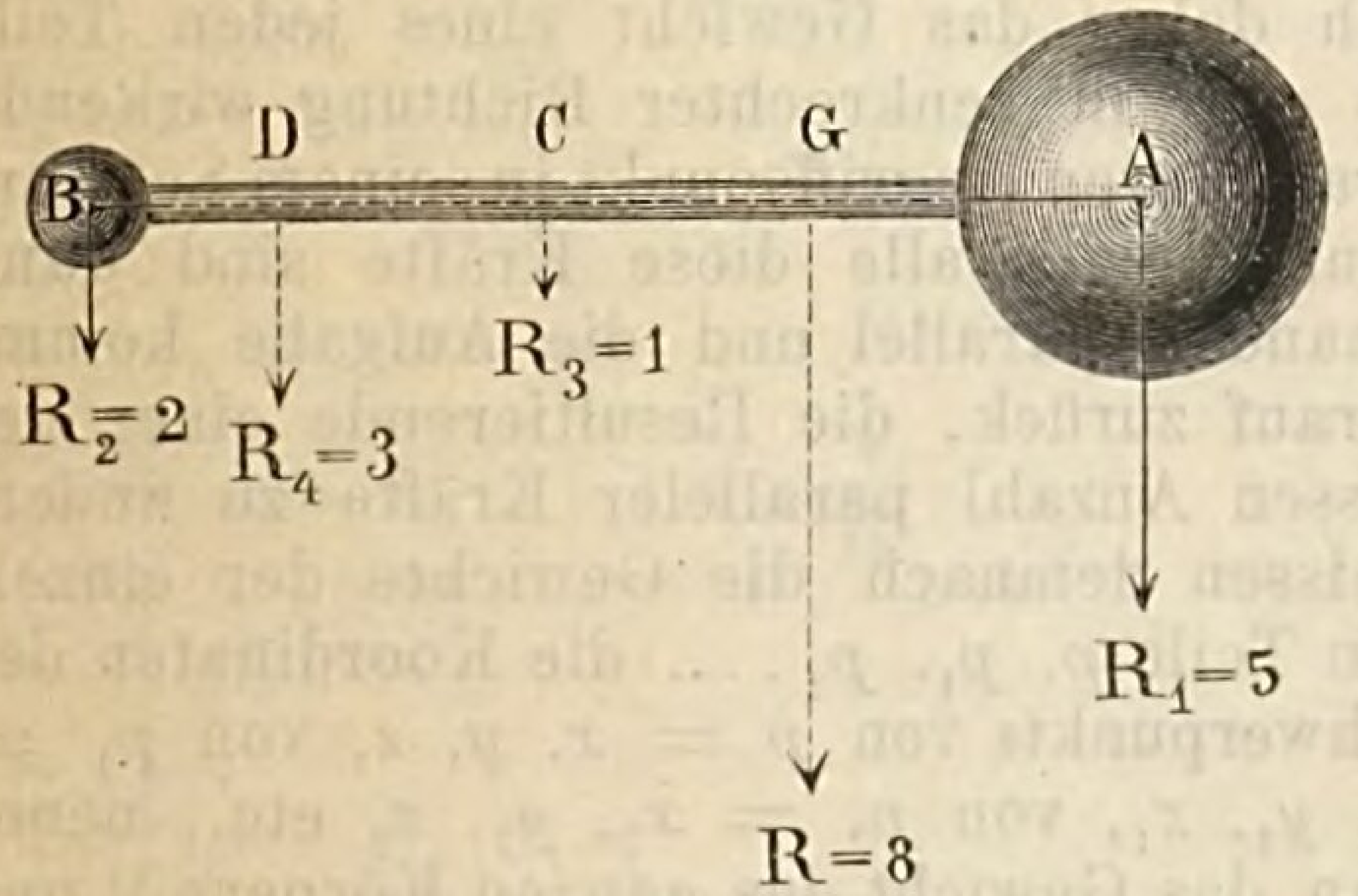
$$x = \frac{r\pi h^2}{r\pi(2h + r)}$$

oder:

$$x = \frac{h^2}{2h + r}$$

Frage 109. Wie lässt sich der Schwerpunkt eines aus mehreren verschiedenartigen Teilen zusammengesetzten Körpers oder der gemeinschaftliche Schwerpunkt mehrerer auf irgend eine Weise verbundener ungleich grosser und ungleich dichter Körper bestimmen?

Figur 174.



Erkl. 168. Archimedes (der grösste Mathematiker und Physiker des Altertums, geb. 287 v. Chr. zu Syrakus, gest. 212), der eigentliche Begründer der Mechanik, ist auch der Entdecker des Satzes, dass jeder schwere Körper einen bestimmten Punkt, den Schwerpunkt, hat, in dem man sich das Gewicht des Körpers vereinigt denken kann. In seinen beiden Büchern „vom Gleichgewicht der Ebenen“ handelt es sich um Schwerpunktsbestimmungen, welche auf Grund des Satzes gefunden werden, dass der Schwerpunkt einer aus zwei gleich schweren, nicht denselben Schwerpunkt besitzenden Grössen zusammengesetzten Grösse in der Mitte derjenigen geraden Linie liegen muss, welche die Schwerpunkte der beiden Teile verbindet, zu welchem der andere, bereits in der Mechanik des Aristoteles enthaltene Satz kommt, dass zwei schwere Körper im Gleichgewicht stehen, sobald sie ihren Entfernungen von dem Stützpunkt der geraden Stange (dem Hebel), an welcher

Antwort. Wenn man die Schwerpunkte und Gewichte der einzelnen Teile eines aus ungleich dichten Massen zusammengesetzten Körpers oder die Schwerpunkte und Gewichte mehrerer auf irgend eine Weise verbundener, ungleich grosser und ungleich dichter Körper kennt, so lässt sich leicht durch Anwendung der oben mitgeteilten Untersuchungen der Schwerpunkt des ganzen Körpers resp. des ganzen Systems bestimmen.' Sind z. B. zwei verschieden grosse, homogene Kugeln A und B, Fig. 174, durch einen cylindrischen homogenen Stab verbunden und es soll der Schwerpunkt dieses ganzen Systems ermittelt werden, so müssen zunächst die Gewichte der einzelnen mit einander verbundenen Körper bekannt sein. Wiegt z. B. die Kugel A = 5 kg, B = 2 kg und der Stab 1 kg, so findet sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt durch folgende Betrachtung:

Die Resultante der einzelnen Molekulargewichte der Kugel A beträgt 5 kg und greift im Mittelpunkt A an; die Resultante der Molekulargewichte der Kugel B beträgt 2 kg und greift im Mittelpunkt B an, während die Resultierende der Molekulargewichte der Stange DG 1 kg beträgt und im Mittelpunkt C der Stange angreift. Alle diese Kräfte laufen einander parallel, nämlich senkrecht, und sind zu einer einzigen Resultante zu vereinigen. Zu diesem Zweck setze man zuerst $R_2 = 2$ kg und $R_3 = 1$ kg zu einer Mittelkraft von $R_4 = 3$ kg zusammen, deren Angriffspunkt D auf der Linie BC so bestimmt wird, dass:

$$\overline{DB} : \overline{DC} = R_3 : R_2$$

sie wirkend gedacht sind, umgekehrt proportional sind. So findet Archimedes den Schwerpunkt eines Parallelogramms, eines Dreiecks, eines Paralleltrapezes.

Die Lehre von dem Schwerpunkt war derjenige Teil der Archimedischen Entdeckungen, welchen seine Nachfolger noch am meisten kultivierten. Pappus (Ende des 4. Jahrh.) und andere lösten mehrere hierher gehörige Probleme auf und Commandinus schrieb 1565 sein De Centro Gravitatis Solidorum. Solche Abhandlungen enthielten meistens nur mathematische Folgerungen des Archim. Problems. Indes behielt man doch auch den festen Begriff der mechanischen Eigenschaft des Schwerpunktes bei, nach welchem nämlich das Gewicht des ganzen Körpers in diesem Punkt vereinigt gedacht werden kann, ohne dadurch das mechanische Resultat zu ändern.

Hierauf setze man diese neue Resultante R_4 mit R_1 zu einer Mittelkraft $R = 8$ kg zusammen, deren Angriffspunkt G durch die Proportion:

$$\overline{GD} : \overline{GA} = R_1 : R_4$$

bestimmt wird. Der so erhaltene Punkt G ist der gemeinschaftliche Schwerpunkt des ganzen Systems.

Frage 110. Wie lässt sich die Aufgabe, den Schwerpunkt irgend eines (nichtgeometrischen) Körpers zu finden, im allgemeinen lösen?

Antwort. Die Aufgabe, den Schwerpunkt irgend eines nichtgeometrischen Körpers zu finden, kommt bei ihrer Allgemeinheit darauf hinaus, denselben in eine beliebige Anzahl Teile geteilt vorzustellen, deren Schwerpunkte bekannt sind, und dann diese insgesamt in einen einzigen zu vereinigen. Man denke sich daher das Gewicht eines jeden Teils als eine in senkrechter Richtung wirkende Kraft, deren Angriffspunkt in seinem Schwerpunkt liegt; alle diese Kräfte sind dann einander parallel und die Aufgabe kommt darauf zurück, die Resultierende einer gewissen Anzahl paralleler Kräfte zu finden. Heissen demnach die Gewichte der einzelnen Teile p, p_1, $p_2 \ldots$, die Koordinaten des Schwerpunkts von $p = x, y, z$, von $p_1 = x_1, y_1, z_1$, von $p_2 = x_2, y_2, z_2$ etc., nennt man das Gewicht des ganzen Körpers P und seine Koordinaten X, Y, Z, so erhält man:

$$PX = px + p_1 x_1 + p_2 x_2 \ldots$$
$$PY = py + p_1 y_1 + p_2 y_2 \ldots$$
$$PZ = pz + p_1 z_1 + p_2 z_2 \ldots$$

Befinden sich alle einzelnen Schwerpunkte in einer einzigen Ebene, so muss auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt in derselben liegen, und ebendies findet auch bei der geraden Linie statt.

Erkl. 169. Die Ungleichheit der Schwere an den verschiedenen Orten der Erde hat auf die in nebenstehender Antwort erwähnten Untersuchungen keinen Einfluss, und wenn der Körper überall von gleicher Dichte ist, so kann man statt der einzelnen Gewichte p, p_1, $p_2 \ldots$ auch die Volumina V, V_1, $V_2 \ldots$ und somit statt P auch V ohne weitere Veränderung des Ausdrucks setzen.

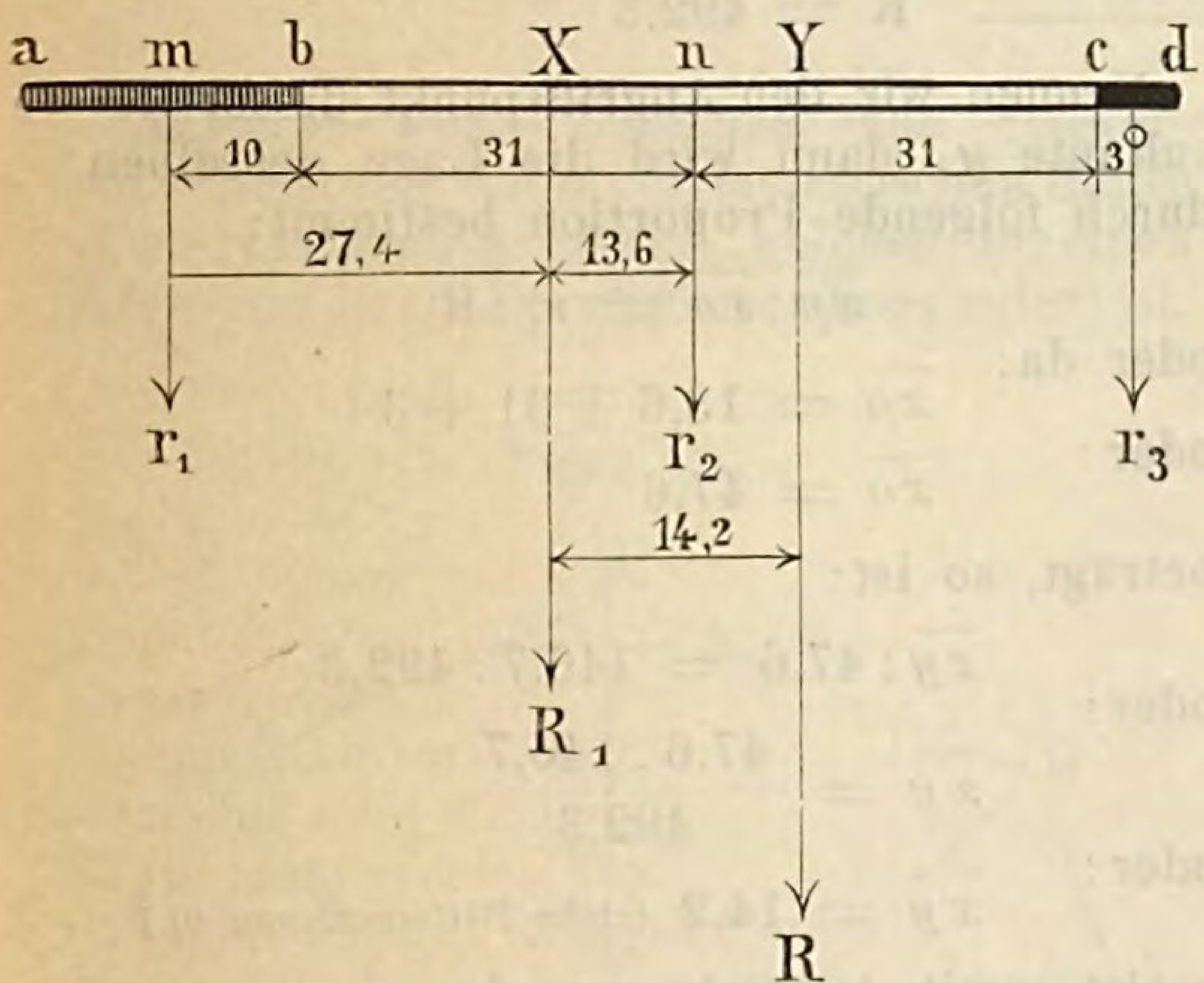
Frage 111. Wo findet die Lehre vom Schwerpunkt eine sehr nützliche Anwendung?

Antwort. Die Lehre vom Schwerpunkt findet eine sehr nützliche Anwendung bei den Inhaltsbestimmungen von Rotationsflächen und Rotationskörpern, wie aus dem XII. Abschnitt von Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen II. Buch Seite 472 des Weiteren ersichtlich ist.

δ). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 138. Ein 62 cm langer cylindrischer Stab aus Ebenholz trägt an seinem einen Ende einen gleich dicken Elfenbeingriff von 20 cm Länge und an seinem andern Ende eine Eisenzwinge von 6 cm Länge. Wo liegt der Schwerpunkt dieses Stabes, wenn der Durchmesser seiner sämtlichen Stücke 2 cm beträgt und das spezifische Gewicht von Ebenholz = 1,187, von Elfenbein = 1,825 und von Eisen = 7,788 beträgt?

Figur 175.



Hilfsrechnungen.

1). . . 1,825 . 62,8
14600
3650
10950
114,6100

2). . . 3,14 . 62
628
1884
194,68

3). . . 194,68 . 1,187
136276
155744
19468
19468
231,08516

4). . . 18,84 . 7,788
15072
15072
13188
13188
146,72592

Auflösung. Bei 2 cm Durchmesser beträgt die Querschnittsfläche des Stabes:

$$Q = 1 \,.\, 1 \,.\, 3{,}14$$

oder:

$$Q = 3{,}14 \text{ qcm}$$

(denn der Flächeninhalt eines Kreises ist $= r^2\pi$)

Es sei (Fig. 175) $a\,b$ das Elfenbeinstück von 20 cm Länge, dann ist sein Volumen:

$$V = 3{,}14 \,.\, 20 \text{ ccm}$$

oder:

$$V = 62{,}8 \text{ ccm}$$

1 ccm Wasser wiegt 1 Gramm, also 1 ccm Elfenbein 1,825 gr, folglich wiegt der Elfenbeingriff:

$$r_1 = 62{,}8 \,.\, 1{,}825 \text{ gr}$$

oder:

$$r_1 = 114{,}6 \text{ gr}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

dieses Gewicht können wir uns im Mittelpunkt m des Stabes $a\,b$ angreifend denken.

Der Holzstab $b\,c$ hat ein Volumen:

$$V = 3{,}14 \,.\, 62 \text{ ccm}$$

oder:

$$V = 194{,}68 \text{ ccm}$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

und da jeder Kubikcentimeter Ebenholz 1,187 gr wiegt, so wiegt der Holzstab:

$$r_2 = 194{,}68 \,.\, 1{,}187 \text{ gr}$$

oder:

$$r_2 = 231 \text{ gr}$$ (siehe Hilfsrechn. 3)

diese Kraft denken wir uns im Mittelpunkt n des Stabes $b\,c$ angreifend.

Das Eisenstück $c\,o$ hat das Volumen:

$$V = 3{,}14 \,.\, 6$$

oder:

$$V = 18{,}84$$

und da jeder Kubikcentimeter Eisen 7,788 gr wiegt, das Gewicht:

$$r_3 = 18{,}84 \,.\, 7{,}788 \text{ gr}$$

oder:

$$r_3 = 146{,}7 \text{ gr}$$ (siehe Hilfsrechn. 4)

welches in der Mitte O des Stabes $c\,d$ wirkend gedacht werden kann.

Wir haben also den Angriffspunkt der Resultante der drei Parallelkräfte r_1, r_2, r_3 zu ermitteln. Die Resultante von r_1 und r_2 ist:

$$R_1 = r_1 + r_2$$

oder:

$$R_1 = 114{,}6 + 231$$

oder:

$$R_1 = 345{,}6$$

und ihr Angriffspunkt liegt näher an der grösseren Kraft r_2 derart, dass:

$$\overline{mx} : \overline{mn} = r_2 : R_1$$

oder da:

$$\overline{mn} = 10 + 31 \text{ cm}$$

oder:

$$\overline{mn} = 41 \text{ cm}$$

beträgt, so ist:

$$\overline{mx} : 41 = 231 : 345{,}6$$

oder:

$$\overline{mx} = \frac{41 \,.\, 231}{345{,}6}$$

oder:

$$\overline{mx} = 27{,}4 \text{ cm}$$ [s. Hilfsrechnung 5).]

Endlich ist R_1 und r_3 zur Gesamtresultante R zu vereinigen, dieselbe ist:

$$R = R_1 + r_3$$

oder:

$$R = 345{,}6 + 146{,}7$$

oder:

$$R = 492{,}3$$

Nennen wir den Angriffspunkt dieser Resultante y, dann wird die Lage desselben durch folgende Proportion bestimmt:

$$\overline{xy} : \overline{xo} = r_3 : R$$

oder da:

$$\overline{xo} = 13{,}6 + 31 + 3$$

oder:

$$\overline{xo} = 47{,}6$$

beträgt, so ist:

$$\overline{xy} : 47{,}6 = 146{,}7 : 492{,}3$$

oder:

$$\overline{xy} = \frac{47{,}6 \,.\, 146{,}7}{492{,}3}$$

oder:

$$\overline{xy} = 14{,}2$$ [siehe Hilfsrechnung 6).]

es ist somit der Schwerpunkt y:

$$10 + 27{,}4 + 14{,}2 = 51{,}6 \text{ cm}$$

vom Ende a oder:

$$88 - 51{,}6 = 36{,}4 \text{ cm}$$

vom Endpunkt d entfernt.

Hilfsrechnungen:

```
5). . . . .  231 . 41
             231
             924
             94710 : 3456 = 27,4
             6912
             25590
             24192
             13980

6). . . .    146,7 . 47,6
               8802
             10269
             5868
             69829,2 : 4923 = 14,2
             4923
             20599
             19692
               9072
```

Aufgabe 139. Die drei Seiten eines Dreiecks seien $a = 13{,}6$, $b = 10$ und $c = 7$ cm. Wie gross ist der Schwerpunktsabstand x dieses Dreiecks, d. h. wie gross ist der Radius eines in dasjenige Dreieck beschriebenen Kreises, welches man durch die Verbindung der Halbierungspunkte der gegebenen Seiten erhält?

Auflösung. Nach Erkl. 145 ist der gesuchte Halbmesser:

$$x = \frac{F}{U}$$

worin F den Flächeninhalt, U den Umfang des gegebenen Dreiecks bedeutet.

Nach einer trigonometrischen Formel ist der Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten berechnet:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}U\left(\frac{1}{2}U - a\right)\left(\frac{1}{2}U - b\right)\left(\frac{1}{2}U - c\right)}$$

Hilfsrechnung.

$$F = \sqrt{15 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 8}$$

oder:

$$F = \sqrt{1200}$$

oder:

$$\log F = \frac{1}{2} \cdot \log 1200$$

$$\log 1200 = 3{,}0791812$$
$$\cdot \frac{1}{2}$$
$$\log F = 1{,}5395906$$

oder:

num-log F oder $F = 34{,}64$

Nun ist:

$$U = 13 + 10 + 7$$

oder:

$$U = 30$$

folglich:

$$F = \sqrt{15\,(15-13)\,(15-10)\,(15-7)}$$

oder:

$$F = \sqrt{15 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 8}$$

oder:

$$F = 34{,}64 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

Somit ist:

$$x = \frac{34{,}64}{30}$$

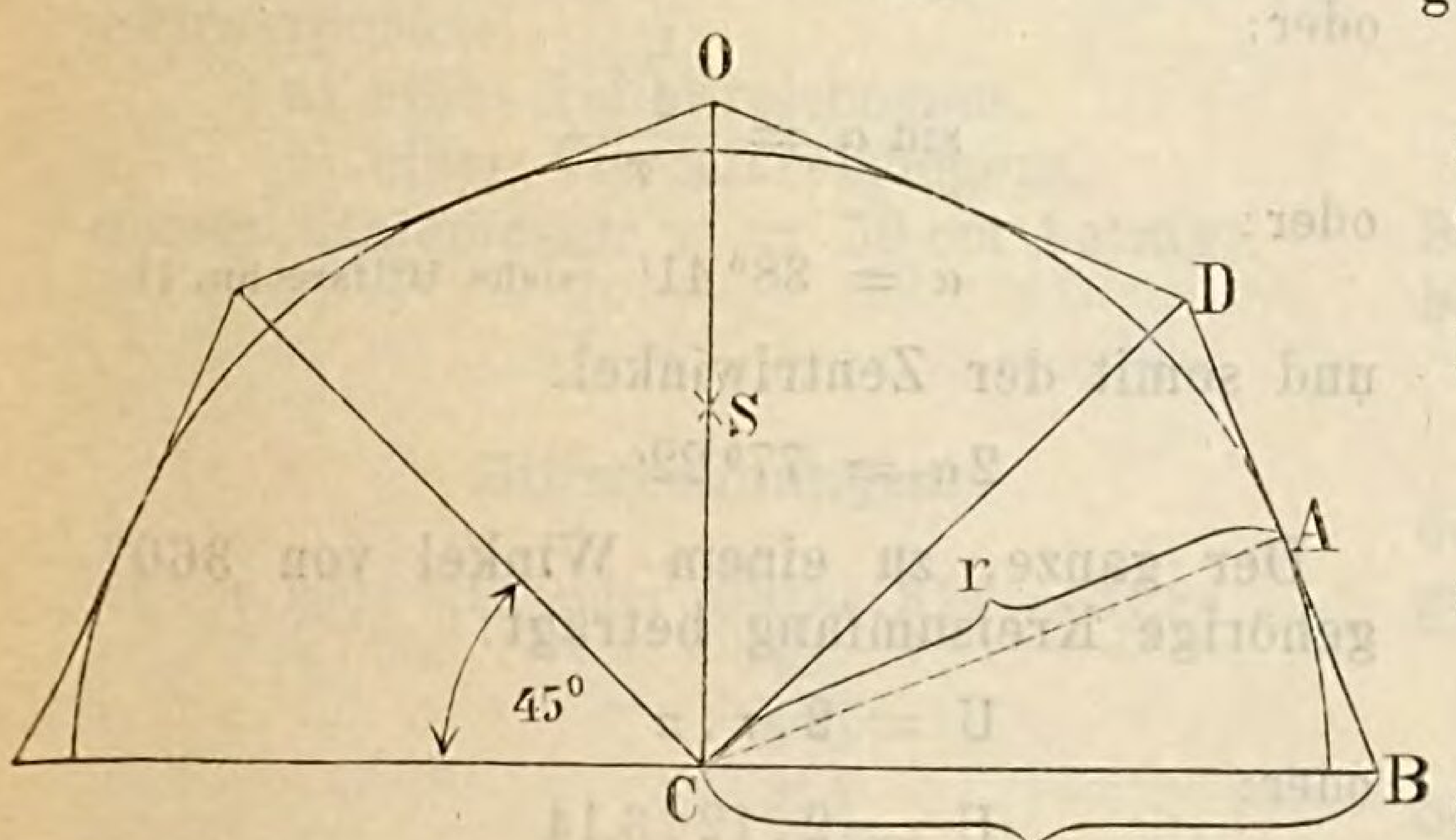
oder:

$$x = 1{,}15$$

d. h. der gesuchte Radius des Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, beträgt 1,15 cm.

Aufgabe 140. Berechne den Schwerpunktsabstand von der symmetrischen Hälfte eines regulären Achtecks, welches um einen Kreis von 10 cm Durchmesser konstruiert ist.

Figur 176.



Hilfsrechnungen:

1). . . $\log \frac{1}{2} s = \log 5 - \log \cos 22\frac{1}{2}^0$

$$\log 5 = 0{,}6989700$$
$$-\log \cos 22\tfrac{1}{2}^0 = -9{,}9656153$$
$$\log \tfrac{1}{2} s = 0{,}7333547$$

mithin:

num-log $\frac{1}{2}s$ oder $\frac{1}{2}s = 5{,}412$

2). . . $\log \overline{BD} = \log 10 + \log \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^0$

$$\log 10 = 1{,}0000000$$
$$\log \operatorname{tg} 22\tfrac{1}{2}^0 = 9{,}6172243$$
$$\log \overline{BD} = 0{,}6172243$$

mithin:

num-log $\overline{BD}$ oder $\overline{BD} = 4{,}142$

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 82 ist der Schwerpunktsabstand:

$$Z = \frac{rs}{u}$$

worin r der Radius des dem Polygon eingeschriebenen Kreises, also in diesem Fall

$$r = 5 \text{ cm}$$

s die zugehörige Sehne und u der Umfang des vorliegenden Polygonstücks ist.

Die zugehörige Sehne findet sich aus dem Dreieck ACB (Fig. 176). In demselben ist:

$$\frac{1}{2}s = \frac{r}{\cos \frac{1}{2} C}$$

oder:

$$\frac{1}{2}s = \frac{5}{\cos 22\frac{1}{2}^0}$$

oder:

$$\frac{1}{2}s = 5{,}412 \text{ (siehe Hilfsrechn. 1)}$$

oder:

$$s = 10{,}824$$

Eine Seite BD (Fig. 176) ist nach einer trigonometrischen Formel

$$\overline{BD} = 2r \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$$

oder:

$$\overline{BD} = 10 \,.\, \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^0$$

oder:

$$\overline{BD} = 4{,}142 \text{ (siehe Hilfsrechn. 2)}$$

und somit:

$$u = 4 \,.\, 4{,}142$$

oder:

$$u = 16{,}568$$

Setzt man die so ermittelten Zahlenwerte in die obige Bestimmungsgleichung, so ergibt sich für

3). 10,824 . 5
54,120 : 16,568

oder: 54120 : 16568 = 3,27
49704
44160
33136
110240

$$Z = \frac{5 . 10,824}{16,568}$$

oder nach Hilfsrechnung 3).:

$$Z = 3,27$$

d. h. der Schwerpunkt findet sich in der Senkrechten $\overline{CO}$ und zwar in einer Entfernung von 3,27 cm von C entfernt.

Aufgabe 141. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens, dessen Radius $r = 12$ cm und dessen Sehne $s = 15$ cm beträgt?

Auflösung. Nach der Gleichung 1). in Antwort auf Frage 83 ist der Abstand des Schwerpunkts vom Zentrum:

$$Z = \frac{r s}{b}$$

Die Grössen r und s sind gegeben, der zugehörige Bogen b muss aber erst berechnet werden, und zu diesem Zweck ist es nötig, den Zentriwinkel zu wissen.

Bezeichnet man den Zentriwinkel mit 2α, so ist im Dreieck SMB (siehe Fig. 177):

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{MB}} = \sin\alpha$$

oder:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2} s}{r}$$

oder:

$$\alpha = 38^0 41'$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

und somit der Zentriwinkel:

$$2\alpha = 77^0 22'$$

Der ganze, zu einem Winkel von 360° gehörige Kreisumfang beträgt:

$$U = 2 . r . \pi$$

oder:

$$U = 2 . 12 . 3,14$$

oder:

$$U = 75,36$$ (siehe Hilfsrechn. 2)

und somit beträgt der zu einem Winkel von 77° 22′ oder $77\frac{11}{30}{}^0$ gehörige Bogen:

$$b = \frac{75,36 . 2321}{360 . 30}$$

oder:

$$b = 16,2$$ (siehe Hilfsrechn. 3)

Setzen wir nun die entsprechenden Zahlenwerte in die Bestimmungsgleichung ein, so ist:

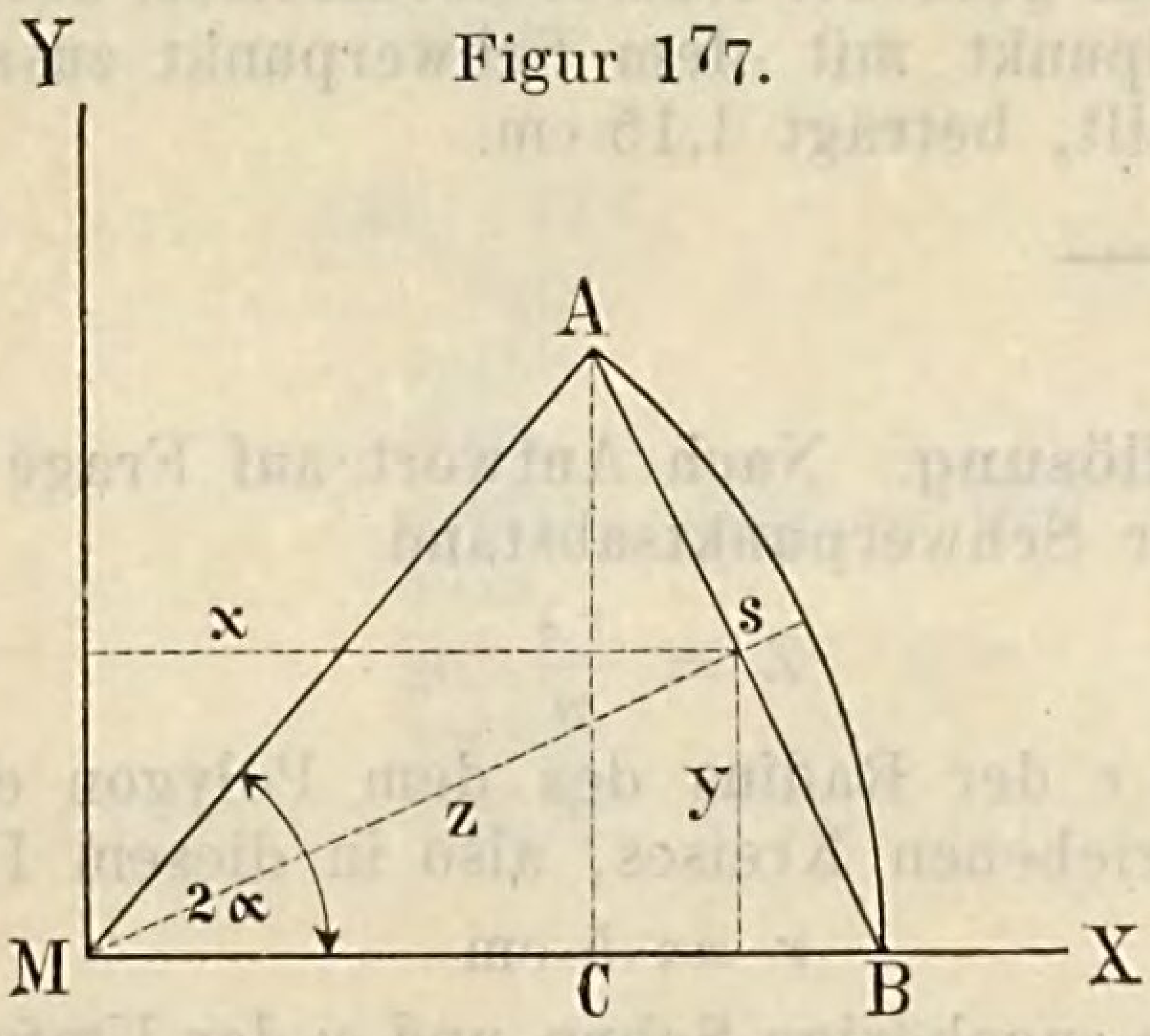
$$Z = \frac{12 . 15}{16,2}$$

oder:

$$Z = 11,11$$ (siehe Hilfsrechn. 4)

d. h. der Abstand des Schwerpunkts vom Kreismittelpunkt beträgt 11,11 cm.

Figur 177.



Hilfsrechnungen.

1). . . $\log\sin\alpha = \log\frac{1}{2}s - \log r$

oder: $\log\sin\alpha = \log 7^1/_2 - \log 12$

$\log 7^1/_2$ oder $7,5 = 0,8750613$
$- \log 12 = -1,0791812$
$\log\sin\alpha = 9,7958801 - 10$

mithin: num-log sin α oder $\alpha = 38^0 41'$
$2\alpha = 2 . 38^0 41'$
$2\alpha = 77^0 22'$

2). . . 2 . 12 . 3,14
= 24 . 3,14
= 1256
628
75,36

77 . 30
2310
+11
2321/30

3). . . 75,36 . 2321
7536
15072
22608
15072
1749,1056 : 108 = 16,2
108
669
648
211

360 . 30
= 10800

4). . . 12 . 15 = 180; 180 : 16,2 = 11,11
162
180
162
180 etc.

Aufgabe 142. Wo liegt der Schwerpunkt eines schweren Kreisbogens von dem Halbmesser $r = 12$ cm und dem Zentriwinkel $2\alpha = 34^0\,7'$?

Hilfsrechnung.

$\log Z = \log 180 + \log 12 + \log \sin 17^0\,3'\,30'' -$
$(\log 3{,}14159 + 17^0\,3^1/_2{}')$

Für $17^0\,3^1/_2{}'$ oder $17^7/_{120}$ setze man die Dezimalzahl 17,058.

$$\begin{array}{rl} \log 180 = & 2{,}2552725 \\ +\log 12 = & 1{,}0791812 \\ +\log\sin 17^0\,3^1/_2{}' = & 9{,}4673789-10 \\ \hline & 2{,}8018326 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 3{,}14159 = & 0{,}4971371 \\ & 124 \\ +\log 17{,}058 = & 1{,}2319281 \\ \hline & 1{,}7290776 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \log 2{,}8018326 \\ & -\log 1{,}7290776 \\ \hline \log Z = & 1{,}0727550 \end{array}$$

mithin: num-log Z oder $Z = 11{,}82$

Auflösung. Nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 83 ist der Schwerpunktsabstand:

$$Z = \frac{180 \cdot r \cdot \sin\alpha}{\pi\,\alpha}$$

oder:

$$Z = \frac{180 \cdot 12 \cdot \sin 17^0\,3'\,30''}{3{,}14159 \cdot 34^0\,7'}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$Z = 11{,}82$$

d. h. der Schwerpunkt befindet sich auf der durch den Mittelpunkt gehenden Halbierungslinie des Kreisbogens in 11,82 cm Entfernung vom Mittelpunkt.

Aufgabe 143. Berechne die Lage des Schwerpunkts

a) eines Halbkreisbogens,

b) eines Viertelkreisbogens,

dessen Halbmesser $r = 50$ cm beträgt.

Hilfsrechnungen:

1). . . 100 : 3,14 oder 10000 : 314 = 31,84

$$\begin{array}{r} 942 \\ \hline 580 \\ 314 \\ \hline 2660 \\ 2512 \\ \hline 1480 \end{array}$$

2). . . . $\dfrac{100 \cdot \sqrt{2}}{3{,}14} = \dfrac{100 \cdot 1{,}414}{3{,}14}$

141,4 : 3,14 oder 14140 : 314 = 45

$$\begin{array}{r} 1256 \\ \hline 1580 \\ 1570 \\ \hline \end{array}$$

Auflösung. a). Nach Erkl. 150 ist der Schwerpunktsabstand für den Halbkreisbogen:

$$Z = \frac{2r}{\pi}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Z = \frac{2 \cdot 50}{3{,}14}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$Z = 31{,}84$$

b). Nach Erkl. 150 ist der Schwerpunktsabstand für den Viertelkreisbogen:

$$Z = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Z = \frac{2 \cdot 50 \cdot \sqrt{2}}{3{,}14}$$

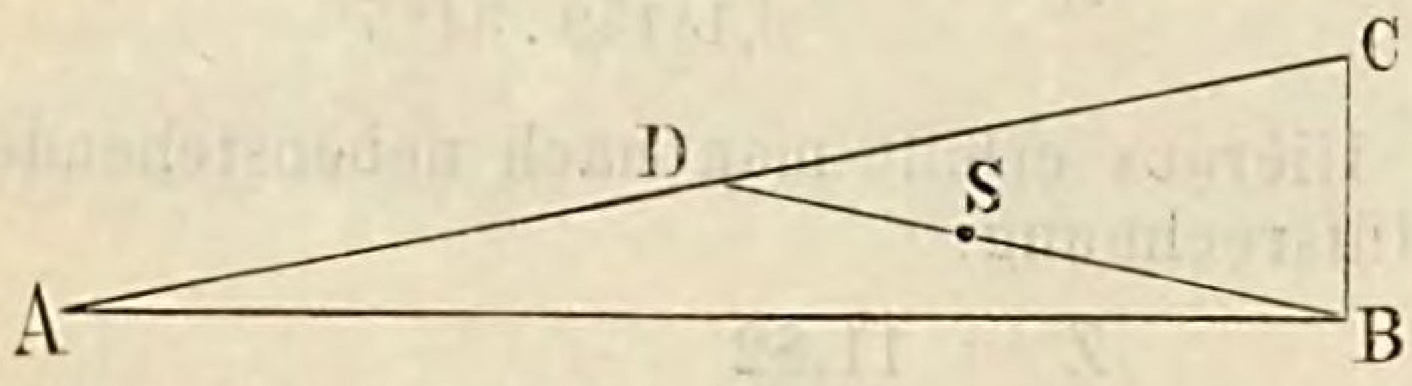
oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$Z = 45$$

d. h. es befindet sich der Schwerpunkt in der Halbierungslinie des gegebenen Bogens und zwar beim Halbkreis 31,84 cm und beim Viertelkreis 45 cm vom Mittelpunkt entfernt.

Aufgabe 144. Berechne die Lage des Schwerpunkts einer rechtwinkligen Dreiecksfläche, deren drei Seiten resp. 760, 30 und 761 cm gross sind.

Figur 178.



Auflösung. Es sei (Fig. 178) ABC das gegebene Dreieck. Halbiert man die Hypotenuse $\overline{AC}$ und verbindet den Halbierungspunkt D mit B, dann ist nach einem Satz aus der Planimetrie:

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$$

und somit die Transversale:

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 761$$

oder:

$$\overline{BD} = 380{,}5$$

Nach Antwort auf Frage 85 liegt nun der Schwerpunkt der Dreiecksfläche ABC auf der Linie $\overline{BD}$ so, dass

$$\overline{DS} : \overline{DB} = 1 : 3$$

oder:

$$\overline{DS} = \frac{1}{3} \overline{DB}$$

oder:

$$\overline{DS} = \frac{1}{3} \cdot 380{,}5$$

oder:

$$\overline{DS} = 126{,}83$$

Aufgabe 145. Eine dreieckige Steinplatte von der Form der Fig. 178 wird von drei Arbeitern, die an den drei Ecken A, B und C angreifen, fortgetragen. Wieviel Last hat jeder zu tragen, wenn die Platte 2 Zentner wiegt?

Auflösung. Die Last von 2 Zentner kann man sich im Schwerpunkt S vereinigt denken. Da nun

$$\overline{DS} = \frac{1}{3} \overline{DB}$$

ist, so lässt sich die Last in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine in B wirkend halb so gross als die andere in D wirkende sein muss. Demnach wirkt im Punkt D eine Last von $^2/_3 . 2$ Zentner und in B eine Last von $^1/_3 . 2$ Zentner, so dass der in B angreifende Arbeiter $^1/_3 . 2$ Zentner oder $66^2/_3$ Pfund zu tragen hat.

Die in D wirkende doppelt so grosse Last von $133^1/_3$ Pfund verteilt sich auf die beiden Punkte A und C, und zwar zu gleichen Teilen, denn $\overline{AD} = \overline{CD}$; folglich hat jeder der beiden Arbeiter, die in A und C angreifen, $^1/_2 . 133^1/_3$ oder gleichfalls $66^2/_3$ Pfund zu tragen.

Daraus folgt, dass die Gestalt des Dreiecks ganz ohne Einfluss auf den in den einzelnen Eckpunkten wirkenden Druck ist. Das Dreieck mag eine Form und Schwere haben, welche es will, immer hat jeder Eckpunkt $^1/_3$ der Last zu tragen, vorausgesetzt, dass die Platte homogen ist.

Aufgabe 146. Wie weit liegt der Schwerpunkt eines Paralleltrapezes von der Seite a entfernt, wenn die beiden Parallelen $a = 27$, $b = 20$ cm und die Höhe $h = 14$ cm beträgt?

Hilfsrechnung:

$$27 + 40 = 107$$
$$27 + 20 = 47$$

$$\frac{67 \,.\, 14}{47 \,.\, 3} = \frac{67 \,.\, 14}{}$$

```
 268
  67
 938 : 141 = 6,65
 846
  920
  846
   740
```

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 87 ist der Schwerpunktsabstand von der Seite a:

$$x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte, so ist:

$$x = \frac{27 + 2 \,.\, 20}{27 + 20} \cdot \frac{14}{3}$$

oder:

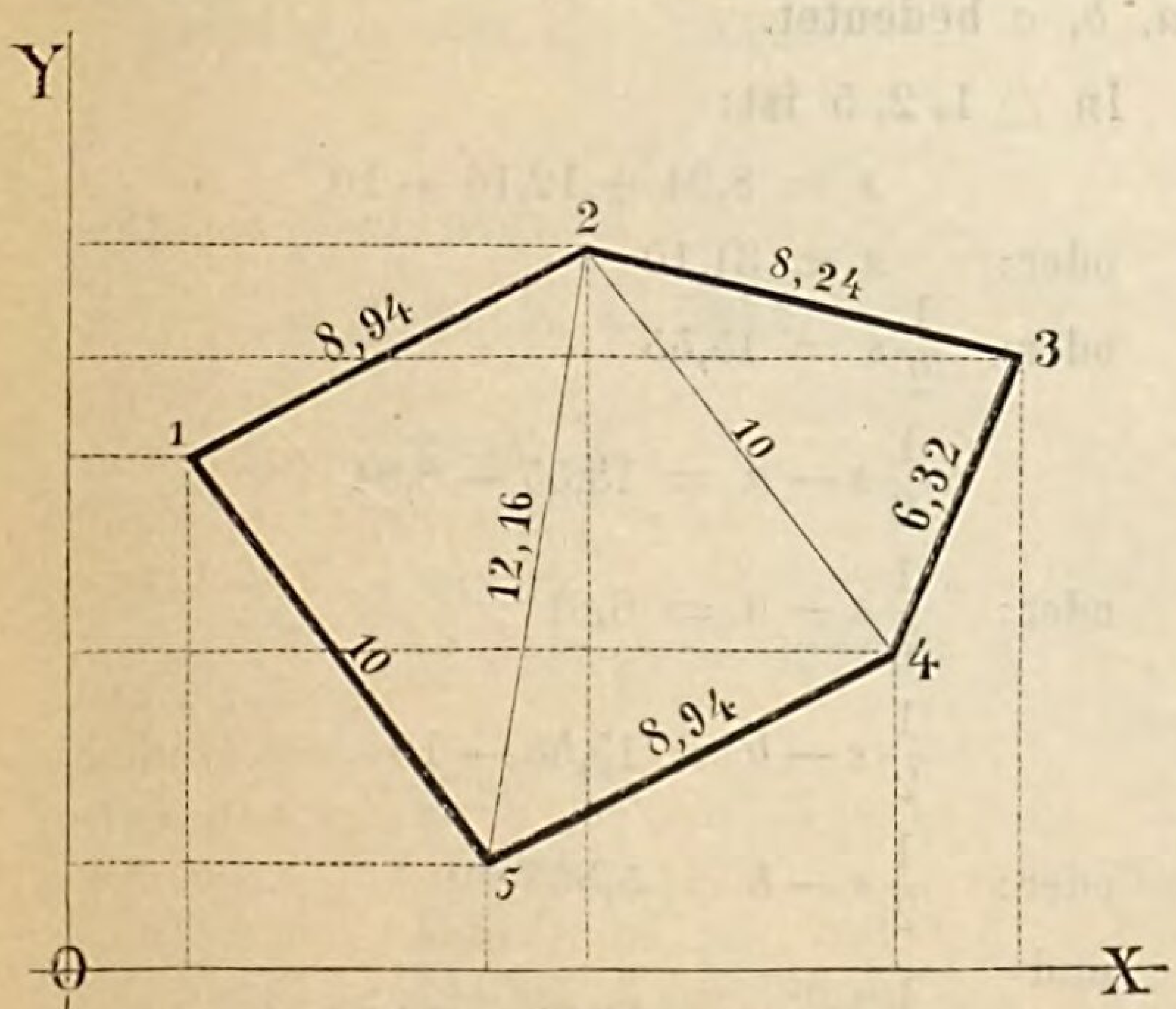
$$x = 6{,}65$$

d. h. der Schwerpunkt ist 6,65 cm von der Seite a entfernt.

Aufgabe 147. Bestimme den Schwerpunkt S des unregelmässigen Fünfecks (Fig. 179), welches durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben ist:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 18, \quad x_4 = 16, \quad x_5 = 8$$
$$y_1 = 10, \quad y_2 = 14, \quad y_3 = 12, \quad y_4 = 6, \quad y_5 = 2$$

Figur 179.



Auflösung. In Antw. auf Frage 89 ist unter 2). das hier einzuschlagende Verfahren angegeben, wonach die Koordinaten x und y des Schwerpunkts gefunden werden nach den Gleichungen:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda}$$

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda}$$

Um aber diese Gleichungen anwenden zu können, müssen zunächst die Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke berechnet werden, die man durch Zerlegen des Fünfecks erhält, und zu diesem Zweck muss man zunächst wissen, wie gross die einzelnen Dreiecksseiten sind. Es lässt sich nun jede dieser Seiten ansehen als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten resp. mit der OX- und OY-Achse parallel laufen und deren Grösse durch die entsprechenden Koordinaten gegeben ist.

Soll z. B. in Fig. 179 die Seite $\overline{1–2}$ berechnet werden, so ist die zu dieser Hypotenuse gehörige eine Kathete $= y_2 - y_1$, die andere Kathete $= x_2 - x_1$, oder die eine Kathete ist:

$$y_2 - y_1 = 14 - 10$$

die andere:

$$x_2 - x_1 = 10 - 2$$

und somit die Hypotenuse:

$$\overline{1–2} = \sqrt{4^2 + 8^2}$$

oder:

Hilfsrechnungen:

1). . . $\sqrt{80} = 8{,}94$

64
16 | 1600
1521
178 | 7900

2). . . $8 . 8 = 64$ $\quad 6 . 6 = 36$

$+36$

$\sqrt{100} = 10$

3). . . Linie $\overline{2\text{–}5} = \sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2}$

„ $\overline{2\text{–}5} = \sqrt{(10-8)^2 + (14-2)^2}$

„ $\overline{2\text{–}5} = \sqrt{2^2 + 12^2}$

„ $\overline{2\text{–}5} = \sqrt{4 + 144}$

„ $\overline{2\text{–}5} = \sqrt{148} = 12{,}16$

2 | 48
44
24 | 400
241
242 | 15900

4). . . Linie $\overline{2\text{–}4} = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_2 - y_4)^2}$

oder: „ $\overline{2\text{–}4} = \sqrt{(16-10)^2 + (14-6)^2}$

oder: „ $\overline{2\text{–}4} = \sqrt{6 . 6 + 8 . 8}$

oder: „ $\overline{2\text{–}4} = \sqrt{100} = 10$

5). . . Linie $\overline{5\text{–}4} = \sqrt{x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2}$

„ $\overline{5\text{–}4} = \sqrt{(16-8)^2 + (6-2)^2}$

„ $\overline{5\text{–}4} = \sqrt{64 + 16}$

„ $\overline{5\text{–}4} = \sqrt{80}$ (siehe Hilfsrechn. 1)

6). . . Linie $\overline{2\text{–}3} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}$

„ $\overline{2\text{–}3} = \sqrt{(18-10)^2 + (14-12)^2}$

„ $\overline{2\text{–}3} = \sqrt{64 + 4}$

„ $\overline{2\text{–}3} = \sqrt{68} = 8{,}24$

64
16 | 400
324
164 | 7600

7). . . Linie $\overline{4\text{–}3} = \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}$

„ $\overline{4\text{–}3} = \sqrt{(18-16)^2 + (12-6)^2}$

„ $\overline{4\text{–}3} = \sqrt{4 + 36}$

„ $\overline{4\text{–}3} = \sqrt{40} = 6{,}32$

36
12 | 400
369
126 | 3100

Linie $\overline{1\text{–}2} = \sqrt{16 + 64}$

oder:

Linie $\overline{1\text{–}2} = \sqrt{80}$

oder:

Linie $\overline{1\text{–}2} = 8{,}94$ (siehe Hilfsrechn. 1)

ebenso ist die

Linie $\overline{1\text{–}5} = \sqrt{(y_1 - y_5)^2 + (x_5 - x_1)^2}$

oder:

„ $\overline{1\text{–}5} = \sqrt{(10-2)^2 + (8-2)^2}$

oder:

„ $\overline{1\text{–}5} = \sqrt{8^2 + 6^2}$

oder:

„ $\overline{1\text{–}5} = 10$ (siehe Hilfsrechn. 2)

in gleicher Weise findet man:

Linie $\overline{2\text{–}5} = 12{,}16$ (siehe Hilfsrechn. 3)

„ $\overline{2\text{–}4} = 10$ („ „ 4)

„ $\overline{5\text{–}4} = 8{,}94$ („ „ 5)

„ $\overline{2\text{–}3} = 8{,}24$ („ „ 6)

„ $\overline{4\text{–}3} = 6{,}32$ („ „ 7)

Da nun die Seiten der sämtlichen Dreiecke bekannt sind, so lassen sich daraus auch die Dreiecksflächen berechnen unter Anwendung der trigonometrischen Formel:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}s\left(\frac{1}{2}s - a\right)\left(\frac{1}{2}s - b\right)\left(\frac{1}{2}s - c\right)}$$

worin s die Summe der drei Dreiecksseiten a, b, c bedeutet.

In $\triangle$ 1, 2, 5 ist:

$s = 8{,}94 + 12{,}16 + 10$

oder: $s = 31{,}10$

oder: $\frac{1}{2}s = 15{,}55$

$\frac{1}{2}s - a = 15{,}55 - 8{,}94$

oder: $\frac{1}{2}s - a = 6{,}61$

$\frac{1}{2}s - b = 15{,}55 - 10$

oder: $\frac{1}{2}s - b = 5{,}55$

und $\frac{1}{2}s - c = 15{,}55 - 12{,}16$

oder: $\frac{1}{2}s - c = 3{,}39$

folglich ist:

$\triangle 1, 2, 5 = \sqrt{15{,}55 . 6{,}61 . 5{,}55 . 3{,}39}$

oder:

$\triangle 1, 2, 5 = 43{,}976$ (siehe Hilfsrechn. 8)

oder:

$\lambda_1 = 43{,}976$

Hilfsrechnungen:

8). $\sqrt{15{,}55 \,.\, 6{,}61 \,.\, 5{,}55 \,.\, 3{,}39} = \frac{1}{2}\big(\log 15{,}55 + \log 6{,}61 + \log 5{,}55 + \log 3{,}39\big)$

$\log 15{,}55 = 1{,}1917304$
$\log 6{,}61 = 0{,}8202015$
$\log 5{,}55 = 0{,}7442930$
$\log 3{,}39 = 0{,}5301997$

$\frac{1}{2} \cdot 3{,}2864246$

$\log \lambda_1 = 1{,}6432123$

mithin:
num-log λ_1 oder $\lambda_1 = 43{,}976$

9). $\sqrt{12{,}28 \,.\, 2{,}28 \,.\, 4{,}03 \,.\, 5{,}96} = \frac{1}{2}\big(\log 12{,}28 + \log 2{,}28 + \log 4{,}03 + \log 5{,}96\big)$

$\log 12{,}28 = 1{,}0891984$
$\log 2{,}28 = 0{,}3579348$
$\log 4{,}03 = 0{,}6053050$
$\log 5{,}96 = 0{,}7752463$

$\frac{1}{2} \cdot 2{,}8276845$

$\log \lambda_3 = 1{,}4138423$

mithin:
num-log λ_3 oder $\lambda_3 = 25{,}933$

10). . . $43{,}976 \cdot \frac{20}{3}$

$= 3 : 879{,}52 = 293{,}17$

$43{,}976 \cdot \frac{34}{3}$

175904
131928
1495184 : 3 = 498,395

$25{,}93 \cdot \frac{44}{3}$

10372
10372
114092 : 3 = 380,30

In gleicher Weise findet man den Flächeninhalt des Dreiecks 2, 4, 5; dasselbe ist in dem gegebenen Fall dem oben berechneten Dreieck 1, 2, 5 flächen-gleich, also:

$$\lambda_2 = 43{,}976$$

Ferner ist in $\triangle$ 2, 3, 4:

$$s = 10 + 8{,}24 + 6{,}32$$

oder:

$$s = 24{,}57$$

oder:

$$\frac{1}{2}s = 12{,}28$$

und

$$\frac{1}{2}s - a = 12{,}28 - 10$$

oder:

$$\frac{1}{2}s - a = 2{,}28$$

$$\frac{1}{2}s - b = 12{,}28 - 8{,}24$$

oder:

$$\frac{1}{2}s - b = 4{,}03$$

$$\frac{1}{2}s - c = 12{,}28 - 6{,}32$$

oder:

$$\frac{1}{2}s - c = 5{,}96$$

und somit:

$$\lambda_3 = \sqrt{12{,}28 \,.\, 2{,}28 \,.\, 4{,}03 \,.\, 5{,}96}$$

oder nach Hilfsrechnung 9).:

$$\lambda_3 = 25{,}933$$

Zur Bestimmung der Schwerpunkte dieser einzelnen Dreiecksflächen benutzen wir die im Beweis c). unter Antwort auf Frage 85 angegebene Formel. Danach sind die Koordinaten des Schwerpunkts vom Dreieck 1, 2, 5 oder $\triangle \lambda_1$:

$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_5 + x_2}{3} \text{ und } v_1 = \frac{y_1 + y_5 + y_2}{3}$$

oder:

$$\xi_1 = \frac{1}{3}(2+8+10) \text{ und } v_1 = \frac{1}{3}(10+2+14)$$

oder:

$$\xi_1 = 6\frac{2}{3} \text{ und } v_1 = 8\frac{2}{3}$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts vom Dreieck 2, 4, 5 oder λ_2 sind:

$$\xi_2 = \frac{x_2 + x_4 + x_5}{3} \text{ und } v_2 = \frac{y_2 + y_4 + y_5}{3}$$

oder:

$$\xi_2 = \frac{1}{3}(10+6+8) \text{ und } v_2 = \frac{1}{3}(14+6+2)$$

oder:

$$\xi_2 = 11\frac{1}{3} \text{ und } v_2 = 7\frac{1}{3}$$

Hilfsrechnungen:

11). . . 293,17
498,395
380,30
1171,865 : 113,885 = 10,3
1138,85
330150

12). . . $43{,}976 \cdot \frac{26}{3}$
263856
87952
1143,376 : 3 = 381,12

$43{,}976 \cdot \frac{22}{3}$
87952
87952
967472 : 3 = 322,49

13). . . $25{,}93 \cdot \frac{32}{3}$
5186
7779
829,76 : 3 = 276,59
113,885 : 980,200 = 8,6
911080
691200
683310

Die Koordinaten des Schwerpunkts vom Dreieck 2, 3, 4 oder λ_3 sind:

$$\xi_3 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \text{ und } v_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$$

oder:

$$\xi_3 = \frac{1}{3}(10+18+16) \text{ und } v_3 = \frac{1}{3}(14+12+6)$$

oder:

$$\xi_3 = 14\frac{2}{3} \text{ und } v_3 = 10\frac{2}{3}$$

Endlich ist die Gesamtfläche des gegebenen Fünfecks gleich der Summe der Dreiecksflächen, oder:

$$\lambda = 43{,}976 + 43{,}976 + 25{,}933$$

oder:

$$\lambda = 113{,}885$$

Setzt man nun die gefundenen Zahlenwerte in die beiden zu Anfang der Auflösung aufgestellten Gleichungen, dann erhält man für die Koordinate x des Schwerpunkts vom Fünfeck:

$$x = \frac{43{,}976 \,.\, 6\frac{2}{3} + 43{,}976 \,.\, 11\frac{1}{3} + 25{,}933 \,.\, 14\frac{2}{3}}{113{,}885}$$

oder:

$$x = \frac{293{,}17 + 498{,}395 + 380{,}30}{113{,}885}$$

(siehe Hilfsrechn. 10)

oder:

$$x = \frac{1171{,}865}{113{,}885}$$

oder:

A). . . $x = 10{,}3$ (siehe Hilfsrech. 11)

und für die Koordinate y des Schwerpunkts vom Fünfeck erhält man:

$$y = \frac{43{,}976 \,.\, 8\frac{2}{3} + 43{,}976 \,.\, 7\frac{1}{3} + 25{,}93 \,.\, 10\frac{2}{3}}{113{,}885}$$

oder:

$$y = \frac{381{,}12 + 322{,}49 + 276{,}59}{113{,}885}$$

(siehe Hilfsrechn. 12)

oder:

$$y = \frac{980{,}20}{113{,}885}$$

oder:

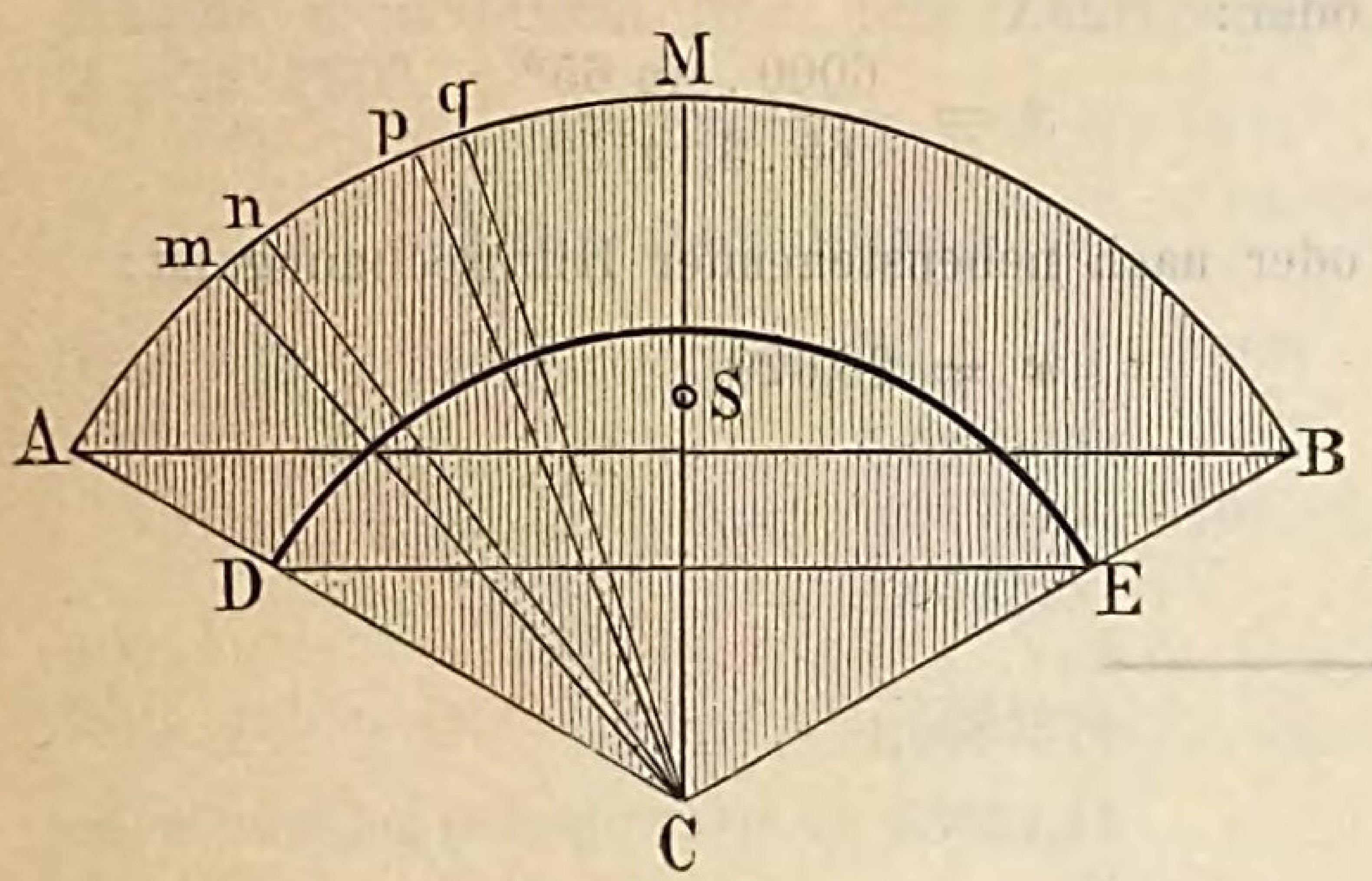
B). . . $y = 8{,}6$ (siehe Hilfsrechn. 13).

Aufgabe 148. Berechne den Schwerpunktsabstand eines Kreisausschnitts von 36 cm Halbmesser und 44 cm Sehne.

Auflösung. Nach Gleichung 1). in Antwort auf Frage 90 ist der Abstand des Schwerpunkts eines Kreisausschnitts vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$$

Figur 180.



Hilfsrechnungen.

1). $\log 22 = 1{,}3424227$
$- \log 36 = -1{,}5563025$
$\log \sin \alpha = 9{,}7861202$
mithin: num-log sin α oder $\alpha = 37^0\,40'\,10''$

2). . . $\frac{2\,.\,36\,.\,3{,}14\,.\,75^0 20' 20''}{360} = 3{,}14\,.\,15^0\,4'\,4''$
verwandelt man die $4'\,4''$ in einen Gradbruch $= \frac{61}{900}$ und diesen in einen Dezimalbruch:

$$\frac{61}{900} = 0{,}68$$

so erhält man für den Bogen:

$$b = 3{,}14\,.\,15{,}068$$

60272
15068
45204
47,31352

3). $\frac{2.36.44}{3.47{,}3} = \frac{2.12.44}{47{,}3}$; 44 . 24
176
88
473 : 10560 = 22,3
946
1100
946

es muss also, um diesen Abstand berechnen zu können, der zu dem Kreisausschnitt gehörige Bogen AMB (siehe Fig. 180) bekannt sein. Derselbe lässt sich berechnen, sobald man den zum Kreisausschnitt gehörigen Zentriwinkel 2α kennt.

Nun ist:

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{BC}} \text{ oder: } \frac{\frac{1}{2}s}{r} = \sin \alpha$$

oder:

$$\frac{22}{36} = \sin \alpha$$

oder diese Gleichung logarithmiert:

$$\log \sin \alpha = \log 22 - \log 36$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$\alpha = 37^0\,40'\,10''$$

und somit der zu dem Kreisausschnitt gehörige Zentriwinkel:

$$2\alpha = 75^0\,20'\,20''$$

Nun ist der zu dem Kreisausschnitt gehörige Bogen:

$$b = \frac{2r\,.\,\pi\,.\,2\alpha}{360}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$b = \frac{2\,.\,36\,.\,3{,}14\,.\,75^0 20' 20''}{360}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$b = 47{,}3$$

Somit ergibt sich für die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{2}{3}\,.\,\frac{36\,.\,44}{47{,}3}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$x = 22{,}3$$

d. h. $\overline{CS}$ (siehe Fig. 180) ist unter den gegebenen Bedingungen 22,3 cm gross.

Aufgabe 149. Berechne den Schwerpunktsabstand eines Kreisausschnitts von $r = 50$ cm Halbmesser und $2\alpha = 130^0$ Zentriwinkel.

Hilfsrechnung.

$$\frac{6000\,.\,\sin 65^0}{65\,.\,3{,}14159} = \log 6000 + \log \sin 65^0 - (\log 65 + \log 3{,}14159)$$

Auflösung. Nach Gleichung 3). in Antwort auf Frage 90 ist die Entfernung des Schwerpunkts des Kreisausschnitts vom Zentrum:

$$x = \frac{2}{3}\,.\,\frac{180\,.\,r\,.\,\sin \alpha}{\alpha\,.\,\pi}$$

oder wenn man die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt:

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 6000 &= 3{,}7781513 \\ +\log\sin 65^0 &= 9{,}9572757-10 \\ &\overline{\;3{,}7354270} \\ \log 65 &= 1{,}8129134 \\ +\log 3{,}14159 &= 0{,}4971499 \\ &\overline{\;2{,}3100633} \\ & \;\;3{,}7354270 \\ & -2{,}3100633 \\ \log x &= \overline{\;1{,}4253637} \end{aligned}$$

mithin: num-log x oder $x = 26{,}629$

$$x = \frac{2\,.\,180\,.\,50\,.\,\sin 65^0}{3\,.\,65\,.\,3{,}14159}$$

oder:

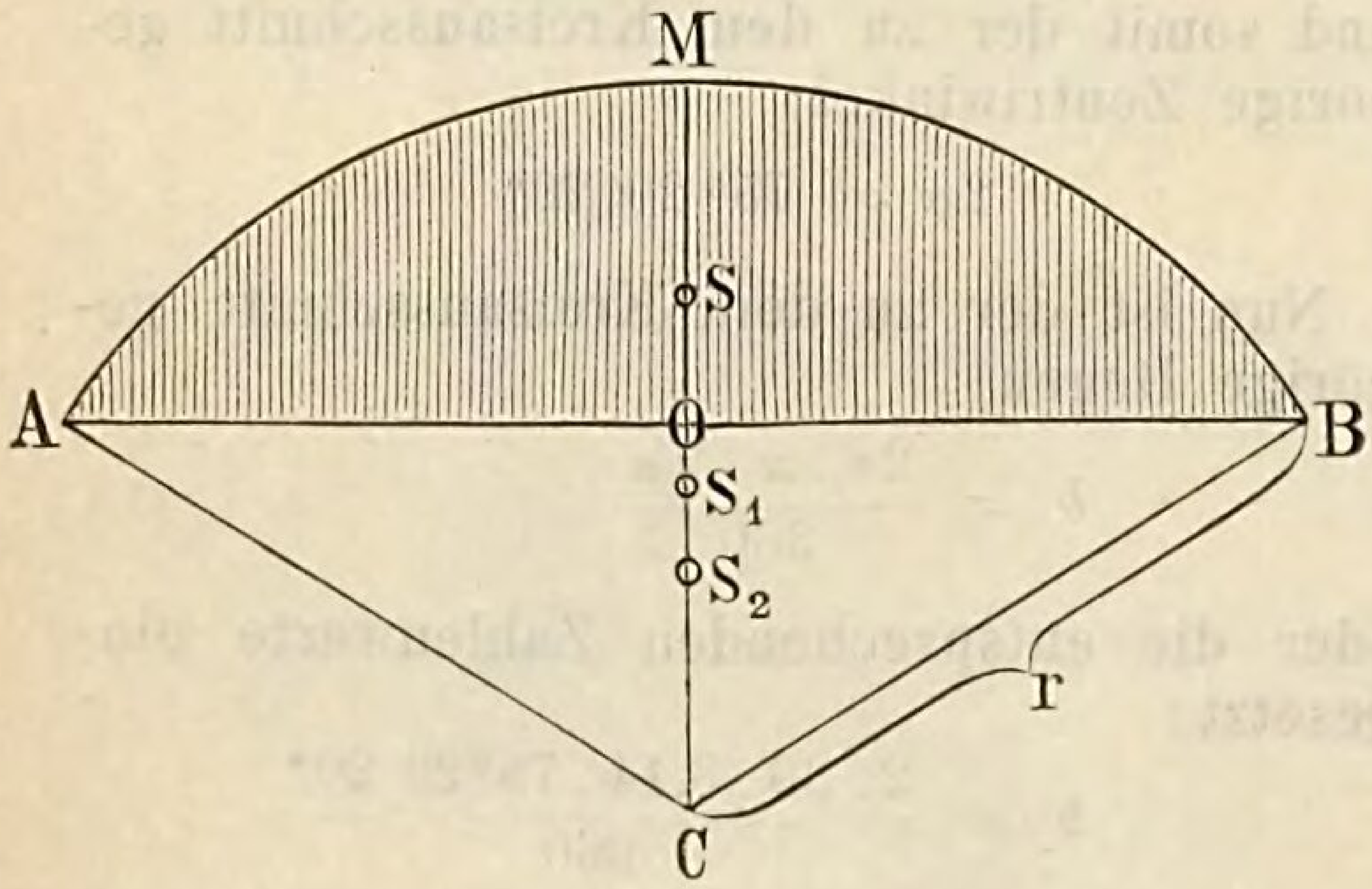
$$x = \frac{6000\,.\,\sin 65^0}{65\,.\,3{,}14159}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung ist:

$$x = 26{,}629$$

Aufgabe 150. Berechne den Schwerpunktsabstand eines Kreisabschnitts vom Radius $r = 36$ und der Sehne $s = 44$.

Figur 181.



Auflösung. Nach Gleichung 8 in Antw. auf Frage 91 ist der Abstand des Schwerpunkts eines Kreissegments vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{S^3}{12F}$$

S ist bekannt, F muss aber erst berechnet werden, wozu wieder die Grösse des Bogens b nötig ist; derselbe ist unter den gegebenen Bedingungen:

$$b = 47{,}3$$

(siehe Auflösung der Aufgabe 148)

Nach Gleich. 9). in Antw. auf Frage 91 ist der Flächeninhalt des Segments:

$$F = \frac{1}{2} r b - \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 47{,}3 - \frac{1}{2} \cdot 44 \sqrt{36^2 - 22^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$F = 224{,}4$$

Diesen Wert nebst der Masszahl für die Sehne in die Bestimmungsgleichung für x gesetzt, gibt:

$$x = \frac{44^3}{12\,.\,224{,}4}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$x = 31{,}6$$

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{1}{2} \cdot 36\,.\,47{,}3 - \frac{1}{2} \cdot 44 \sqrt{36^2 - 22^2} =$
$18\,.\,47{,}3 - 22 \sqrt{36^2 - 22^2}$

Da nun:

```
 47,3 . 18     und    36 . 36    und   22 . 22
 3784                 216               44
  473                108                44
 851,4               1296              484
 — 627               — 484
F = 224,4         √8|12   =   28,5 . 22
                    4            570
                  4 | 412        570
                      384      627,0
                 56 | 2800
                      2825
```

2). . . $\frac{44\,.\,44\,.\,44}{12\,.\,224{,}4} = \frac{11\,.\,44}{3\,.\,5{,}1} = \frac{484}{15{,}3}$

```
4840 : 153 = 31,6
459
 250
 153
```

Aufgabe 151. Berechne den Schwerpunktsabstand eines Kreissegments vom Radius $r = 50$ cm und dem Zentriwinkel $2\alpha = 130^0$.

Hilfsrechnungen:

1). . . $(50 . \sin 65^0)^3 = 3 (\log 50 + \log \sin 65^0)$

$$\begin{array}{rl} \log 50 = & 1,6989700 \\ + \log \sin 65^0 = & 9,9572757-10 \\ \hline & 1,6562457 \\ & .3 \\ \hline & 4,9687371 \end{array}$$

oder num-log $(50 . \sin 65^0)^3 = 93054,45$

$$\begin{array}{r} .2 \\ \hline 186108,9 \end{array}$$

2). $\frac{2500.65.3,14}{180} = \frac{250.65.3,14}{18}$;

$$\begin{array}{r} 65 . 250 \\ \hline 325 \\ 130 \\ \hline 16250 \\ . 3,14 \\ \hline 6500 \\ 1625 \\ 4875 \\ \hline 51025,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 51025 : 18 = 2834,7 \\ 36 \\ \hline 150 \\ 144 \\ \hline \ \ 62 \\ \ \ 54 \\ \hline \ \ \ 85 \\ \ \ \ 72 \\ \hline \ \ \ 130 \\ \ \ \ 126 \\ \hline \end{array}$$

3). . . $2500 . \sin 65^0 . \cos 65^0 = \log 2500 + \log \sin 65^0 + \log \cos 65^0$

$$\begin{array}{rl} \log 2500 = & 3,3979400 \\ \log \sin 65^0 = & 9,9572757-10 \\ \log \cos 65^0 = & 9,6259483-10 \\ \hline & 2,9811640 \end{array}$$

mithin: num-log $= 957,56$

4). . . . $1861089 : 56316 = 33,05$

$$\begin{array}{l} 168948 \\ \hline 171609 \\ 168948 \\ \hline \ \ \ 2661 \end{array}$$

Auflösung. Nach Formel 17 in Antw. auf Frage 91 ist der gesuchte Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{2 (r . \sin \alpha)^3}{3 (r^2 \alpha - r^2 . \sin \alpha . \cos \alpha)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \frac{2 (50 . \sin 65^0)^3}{3 (2500 . 65^0 - 2500 . \sin 65^0 . \cos 65^0)}$$

oder da $\alpha = 65^0$ in Bogenmass ausgedrückt $= \frac{65 . 3,14}{180}$ beträgt, so ist:

$$x = \frac{2 (50 . \sin 65^0)^3}{3 \left(\frac{2500 . 65 . 3,14}{180} - 2500 . \sin 65^0 . \cos 65^0\right)}$$

oder nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen:

$$x = \frac{186108,9}{3 (2834,7 - 957,56)}$$

oder:

$$x = \frac{186108,9}{3 (1877,2)}$$

oder:

$$x = \frac{186108,9}{5631,6}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$x = 33,05$$

Der Schwerpunkt liegt also auf dem das Segment halbierenden Radius in einer Entfernung von 33 cm vom Mittelpunkt.

Aufgabe 152. Berechne den Schwerpunktsabstand eines Ringstücks, dessen Zentriwinkel $2\alpha = 240^0$ beträgt und dessen Radien r und ϱ 40 resp. 25 cm messen.

Auflösung. Nach Gleichung 2 in Antw. auf Frage 92 ist der Schwerpunktsabstand eines Ringstücks:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{r + \varrho}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte und für α^0 das Bogenmass $\frac{\alpha . \pi}{180}$ eingesetzt, so ist:

Hilfsrechnung.

$$\frac{0{,}866}{3{,}14} \cdot \frac{3225}{65} = \frac{0{,}866 \cdot 645}{3{,}14 \cdot 13}$$

0,866 . 645
4330
3464
5196
558,570 : 40,82

3,14 . 13
40,82

55857 : 4082 = 13,68
4082
15037
12246
27910
24492
34180

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 120^0}{\frac{120 \cdot 3{,}14}{180}} \cdot \frac{40^2 + 40 \cdot 25 + 25^2}{40 + 25}$$

Nun ist nach Erkl. 40: $\sin 120^0 = \sin 60^0$ und aus Erkl. 32 folgt, dass $\sin 60^0 = 0{,}866$ ist, folglich ist:

$$x = \frac{2 \cdot 0{,}866 \cdot 180}{3 \cdot 120 \cdot 3{,}14} \left(\frac{1600 + 1000 + 625}{65}\right)$$

oder:

$$x = \frac{0{,}866}{3{,}14} \cdot \frac{3225}{65}$$

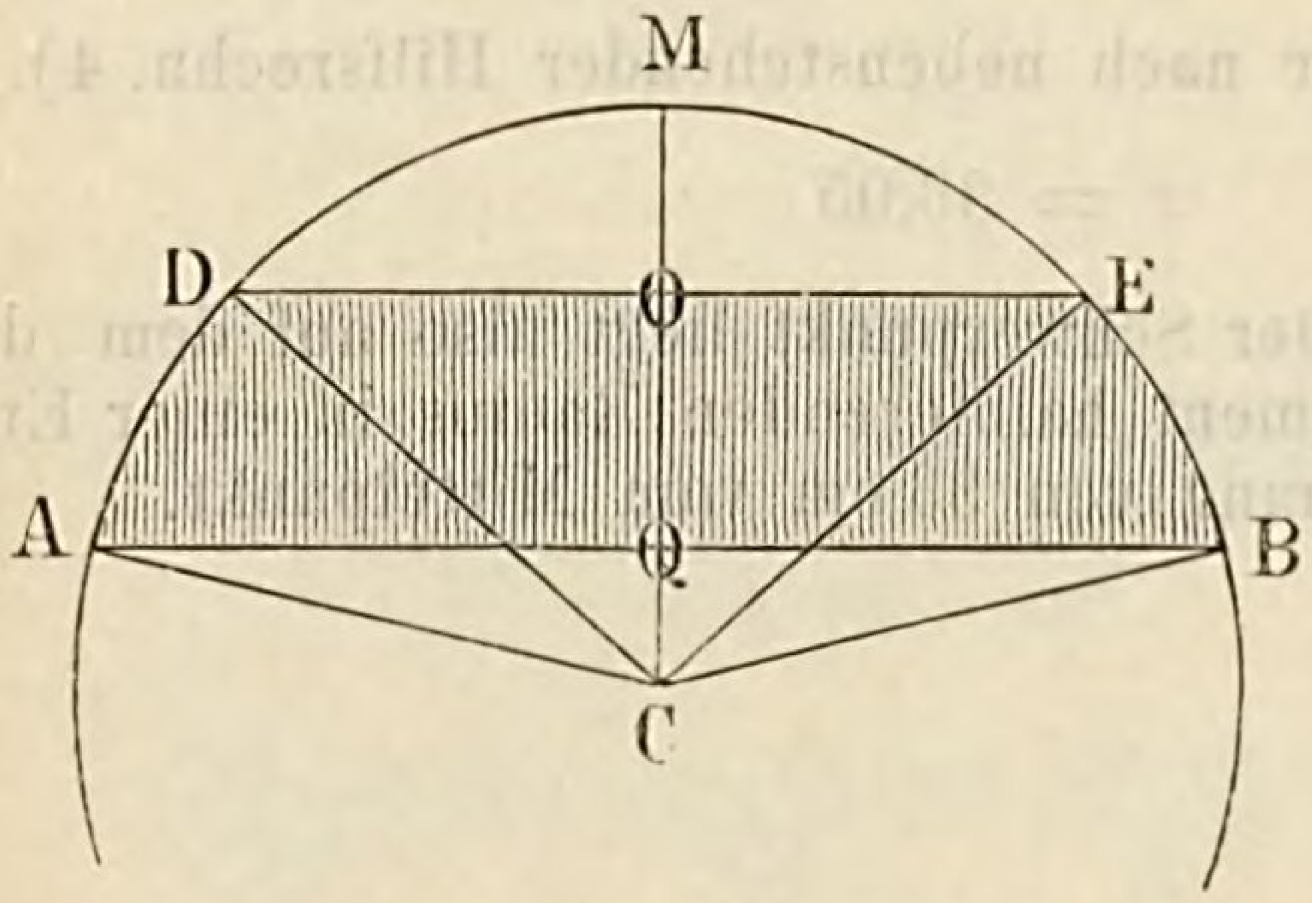
oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 13{,}68$$

d. h. der Schwerpunkt des Ringstücks liegt auf dem halbierenden Radius in einer Entfernung von 13,68 cm vom Zentrum.

Aufgabe 153. Es soll der Schwerpunktsabstand eines zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche berechnet werden, deren Radius $r = 100$ cm, wenn die grössere Sehne $s = 160$ cm, die kleinere $\sigma = 120$ cm lang ist.

Figur 182.



Hilfsrechnungen:

1). . . . $\frac{80}{100} = 0{,}8$; $\log 0{,}8 = \log \sin \alpha$

$\log 0{,}8 = 0{,}9030900 - 1$ oder $9{,}9030900 - 10$

mithin: num-log sin α oder $\alpha = 53^0\, 7'\, 50''$

$53^0\, 7'\, 50'' = 53^0\, 7\frac{5}{6}' = 53\frac{48}{180} = 53{,}13^0$

2). . . . $\frac{53{,}13 \cdot 314}{90} = \frac{17{,}71 \cdot 314}{30}$

17,71 . 314
7084
1771
5313
5560,94 : 30 = 185,365

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 93 ist in diesem Fall der Schwerpunktsabstand

$$x = \frac{s^3 - \sigma^3}{12\,(F_1 - F_2)}$$

Die Grössen s und σ sind gegeben, während die Flächen der beiden hier in Betracht kommenden Segmente erst berechnet werden müssen. Die Fläche eines Segments ist aber:

$$F = \frac{1}{2}\, r b - \frac{1}{2}\, s \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\, s^2}$$

es muss somit erst der Bogen b berechnet werden. Nun ist (siehe Fig. 182):

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{BC}} \text{ oder } \frac{\frac{1}{2} s}{r} = \sin \alpha$$

oder:

$$\sin \alpha = \frac{80}{100}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$\alpha = 53^0\, 7'\, 50''$$

oder: $\alpha = 53{,}13^0$

Mithin ist der Bogen AMB oder

$$b_1 = \frac{2 r \pi \cdot 2 \alpha}{360}$$

oder:

$$b_1 = \frac{100 \cdot 3{,}14 \cdot 53{,}13}{90}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2). ist:

$$b_1 = 185{,}365$$

Die Fläche des Segments AMB ist daher:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 185{,}365 - \frac{1}{2} \cdot 160\sqrt{10000-6400}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3). ist:

$$F_1 = 9268{,}25 - 80\sqrt{3600}$$

oder:

$$F_1 = 9268{,}25 - 80 \,.\, 60$$

oder:

$$F_1 = 9268{,}25 - 4800$$

oder:

A). . . $F_1 = 4468{,}25$

In gleicher Weise ist die Segmentfläche DME zu berechnen.

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{CE}} \text{ oder } \frac{\frac{1}{2}\sigma}{r} = \sin\beta$$

oder:

$$\sin\beta = \frac{60}{100}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4). ist:

$$\beta = 36{,}87^0$$

folglich ist der Bogen DME oder:

$$b_2 = \frac{r\pi\beta}{90}$$

oder:

$$b_2 = \frac{100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 36{,}87}{90}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 5). ist:

$$b_2 = 128{,}6$$

mithin ist die Fläche DME oder:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \,.\, 128{,}6 - \frac{1}{2} \cdot 120\sqrt{10000 - 3600}$$

oder:

$$F_2 = 50 \,.\, 128{,}6 - 60\sqrt{6400}$$

oder:

$$F_2 = 100 \,.\, 64{,}3 - 60 \,.\, 80$$

oder:

$$F_2 = 6430 - 4800$$

oder:

B). . . $F_2 = 1630$

Setzen wir nun die so gefundenen, resp. die gegebenen Werte in die Bestimmungsgleichung für x, so ergibt sich:

$$x = \frac{160^3 - 120^3}{12\,(4468{,}25 - 1630)}$$

und hierfür erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 6).:

$$x = 69{,}5$$

d. h. der Schwerpunkt des gegebenen, zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche liegt auf der vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehnen gefällten Normalen 69,5 cm vom Mittelpunkt entfernt.

Hilfsrechnungen:

3). . . $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$; $185{,}365 \,.\, 50 = 9268{,}25$

4). . . $\frac{60}{100} = 0{,}6$; $\log 0{,}6 = \log\sin\beta$

$\log 0{,}6 = 0{,}7781513-1$

oder $\log\sin\beta = 9{,}7781513-10$

mithin:

num-log $\sin\beta$ oder $\beta = 36^0 52' 10''$

$36^0 52' 10'' = 36^0 52\tfrac{1}{6}'$ oder $36\frac{313}{360}$ oder $36{,}87^0$

5). . .
```
   36,87 . 314
   14748
    3687
  11061
  11577,18 : 90 = 128,635
```

6). . .
```
  160.160.160        12 . 12 . 12 = 1728
   25600 . 160       oder:
    4096000          120³ = 1728000
  — 1728000
    2368000

     4468,25
   — 1630
     2838,25 . 12
   = 34059

  2368000 : 34059 = 69,5
  204354
   324460
   306531
    179290
    170295
```

Aufgabe 154. Es soll der Schwerpunktsabstand eines zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche vom Radius $r = 20$ cm berechnet werden, wenn die zugehörigen beiden Zentriwinkel $2\alpha = 152^0$ und $2\beta = 95^0$ betragen.

Auflösung. Nach der Formel 2). in Antwort auf Frage 93 ist in diesem Fall:

$$x = \frac{\frac{2}{3}(r \,.\, \sin\alpha)^3 - \frac{2}{3}(r \,.\, \sin\beta)^3}{r^2(\alpha - \sin\alpha \,.\, \cos\alpha) - r^2(\beta - \sin\beta \,.\, \cos\beta)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \frac{\frac{2}{3}\left(20 \,.\, \sin 76^0\right)^3 - \frac{2}{3}\left(20 \,.\, \sin 47\frac{1}{2}^0\right)^3}{20 \,.\, 20\left(\frac{76 \,.\, 3{,}14}{180} - \sin 76^0 \,.\, \cos 76^0\right) - \sin 20 \,.\, 20\left(\frac{95 \,.\, 3{,}14}{2 \,.\, 180} - \sin 47\frac{1}{2}^0 \,.\, \cos 47\frac{1}{2}^0\right)}$$

oder nach den nebenstehenden Hilfsrechnungen 1—6:

$$x = \frac{4872{,}4 - 2137{,}43}{400(1{,}326 - 0{,}2347) - 400(0{,}83 - 0{,}4981)}$$

oder:

$$x = \frac{2734{,}97}{400 \,.\, 1{,}0913 - 400 \,.\, 0{,}3219}$$

oder:

$$x = \frac{2734{,}97}{400(1{,}0913 - 0{,}3219)}$$

oder:

$$x = \frac{2734{,}97}{400 \,.\, 0{,}7694}$$

oder:

$$x = \frac{2734{,}97}{307{,}76}$$

oder nach Hilfsrechnung 7). ist:

$$x = 8{,}89$$

d. h. der Schwerpunkt des gegebenen, zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche liegt auf der vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehnen gefällten Senkrechten 8,89 cm vom Mittelpunkt entfernt.

Hilfsrechnungen:

1). $(20 \,.\, \sin 76^0)^3 = 3(\log 20 + \log\sin 76^0)$

$$\begin{aligned} \log 20 &= 1{,}3010300 \\ +\log\sin 76^0 &= 9{,}9869041-10 \\ \hline &\ 1{,}2879341 \\ &\ .\,3 \\ \hline \text{mithin:}\quad &\ 3{,}8638023 \end{aligned}$$

num-log $(20 . \sin 76^0)^3 = 7308{,}6$

$\frac{2}{3} \cdot 7308{,}6 = 2 \,.\, 2436{,}2$
$= 4872{,}4$

2). $(20 \,.\, \sin 47^1/_2{}^0)^3 = 3(\log 20 + \log\sin 47^1/_2{}^0)$

$$\begin{aligned} \log 20 &= 1{,}3010300 \\ +\log\sin 47^1/_2{}^0 &= 9{,}8676309-10 \\ \hline &\ 1{,}1686609 \\ &\ .\,3 \\ \hline \text{mithin:}\quad &\ 3{,}5059827 \end{aligned}$$

num-log $(20 . \sin 47^1/_2{}^0)^3 = 3206{,}14$

$\frac{2}{3} \cdot 3206{,}14 =$
$6412{,}28 : 3 = 2137{,}43$

3). . . . $3{,}14 \,.\, 76$
1884
2198
$180 : 238{,}64 = 1{,}326$
18
58
54
46
36
104

4). $\sin 76^0 \,.\, \cos 76^0 = \log\sin 76^0 + \log\cos 76^0$

$$\begin{aligned} \log\sin 76^0 &= 9{,}9869041-10 \\ \log\cos 76^0 &= 9{,}3836752-10 \\ \hline \text{mithin:}\quad &\ 0{,}3705793-1 \end{aligned}$$

$\sin 76^0 \,.\, \cos 76^0 = 0{,}2347$

5). $\frac{95 \,.\, 3{,}14}{2 \,.\, 180} = \frac{1{,}57 \,.\, 19}{36}$; $1{,}57 \,.\, 19 =$
1413
157
$36 : 29{,}83 = 0{,}83$
288
103

6). $\sin 47\tfrac{1}{2}^0 . \cos 47\tfrac{1}{2}^0 = \log \sin 47\tfrac{1}{2}^0 + \log \cos 47\tfrac{1}{2}^0$

$\log \sin 47\tfrac{1}{2}^0 = 9{,}8676309$
$\log \cos 47\tfrac{1}{2}^0 = 9{,}8296833$

mithin: $0{,}6973142 - 1$

$\sin 47\tfrac{1}{2}^0 . \cos 47\tfrac{1}{2}^0 = 0{,}4981$

7). . . . 273497 : 30776 = 8,89
246108
273890
246108
277820
276984

Aufgabe 155. Auf dem Concordienplatz zu Paris steht der Obelisk von Luxor, eine abgestumpfte Pyramide von 22 m Höhe, mit quadratischer Grund- und Endfläche, welche am unteren Ende 2,35 m, am oberen Ende 1,68 m Kante hat. Wo liegt der Schwerpunkt dieses Körpers?

Hilfsrechnungen.

1). . . 2,35 . 2,35
1175
705
470
5,5225

2). . . 1,68 . 1,68
1344
1008
168
2,8224

3). $\sqrt{5{,}5225 . 2{,}8224} = \frac{1}{2}(\log 5{,}5225 + \log 2{,}8224)$

$\log 5{,}5225 = 0{,}7421357$
$+ \log 2{,}8224 = 0{,}4506186$
$1{,}1927543$
$. \frac{1}{2}$

oder: $0{,}5963771$

num-log $\sqrt{\ } = 3{,}948$
. 2
7,896

4). . . . 5,5225
+ 7,8960
+ 8,4672
21,8857

5,5225
+ 3,9480
+ 2,8224
12,2929

5). . . . 218857 : 122929 = 1,78
122929
959280
860503
987770
983432

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 103 ist der Abstand des Schwerpunkts eines Pyramidenstumpfes

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)}{(G + \sqrt{Gg} + g)}$$

Um diese Formel benutzen zu können, müssen zunächst die beiden Flächen G und g berechnet werden.

Nach den gegeben Masszahlen ist:

$$G = 2{,}35 . 2{,}35$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$G = 5{,}5225 \text{ qm}$$

desgleichen ist:

$$g = 1{,}68 . 1{,}68$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$g = 2{,}8224 \text{ qm}$$

Setzen wir diese Werte in die Bestimmungsgleichung, so erhalten wir:

$$x = \frac{22}{4} \cdot \frac{(5{,}5225 + 2\sqrt{5{,}5225 . 2{,}8224} + 3 . 2{,}8224)}{(5{,}5225 + \sqrt{5{,}5225 . 2{,}8224} + 2{,}8224)}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3). ist:

$$x = \frac{22}{4} \cdot \frac{(5{,}5225 + 7{,}896 + 8{,}4672)}{(5{,}5225 + 3{,}948 + 2{,}8224)}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4). ist:

$$x = \frac{11}{2} \cdot \frac{21{,}8857}{12{,}2929}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 5). ist:

$$x = \frac{11}{2} \cdot 1{,}78$$

oder:

$$x = 11 . 0{,}89$$

oder:

$$x = 9{,}79$$

d. h. der Schwerpunkt des genannten Obelisken liegt in der Mittelachse desselben und zwar 9 m 79 cm von dem Mittelpunkt der Grund- und Bodenfläche entfernt.

Aufgabe 156. Ein Kegelstumpf von 30 cm Höhe hat eine Grundfläche von 24 cm Radius und eine obere Fläche von 18 cm Radius. In welcher Entfernung liegt der Schwerpunkt dieses Körpers von dessen Grundfläche?

Hilfsrechnungen.

1). . . 24 . 24 = 96, 48; = 576

2 . 24 . 18 = 48 . 18 = 384, 48; = 864

3 . 18 . 18 = 54 . 18 = 432, 54; = 972

2). . . 576 + 864 + 972 = 2412

576 + 432 + 324 = 1332

$\frac{15 . 2412}{2 . 1332} = \frac{1005}{74}$

1005 : 74 = 13,6
74
265
222
430

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 104 ist in diesem Fall der Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche:

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2r\varrho + 3\varrho^2}{r^2 + r\varrho + \varrho^2}$$

oder wenn man die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt, ist:

$$x = \frac{30}{4} \cdot \frac{24.24 + 2.24.18 + 3.18.18}{24.24 + 24.18 + 18.18}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1). ist:

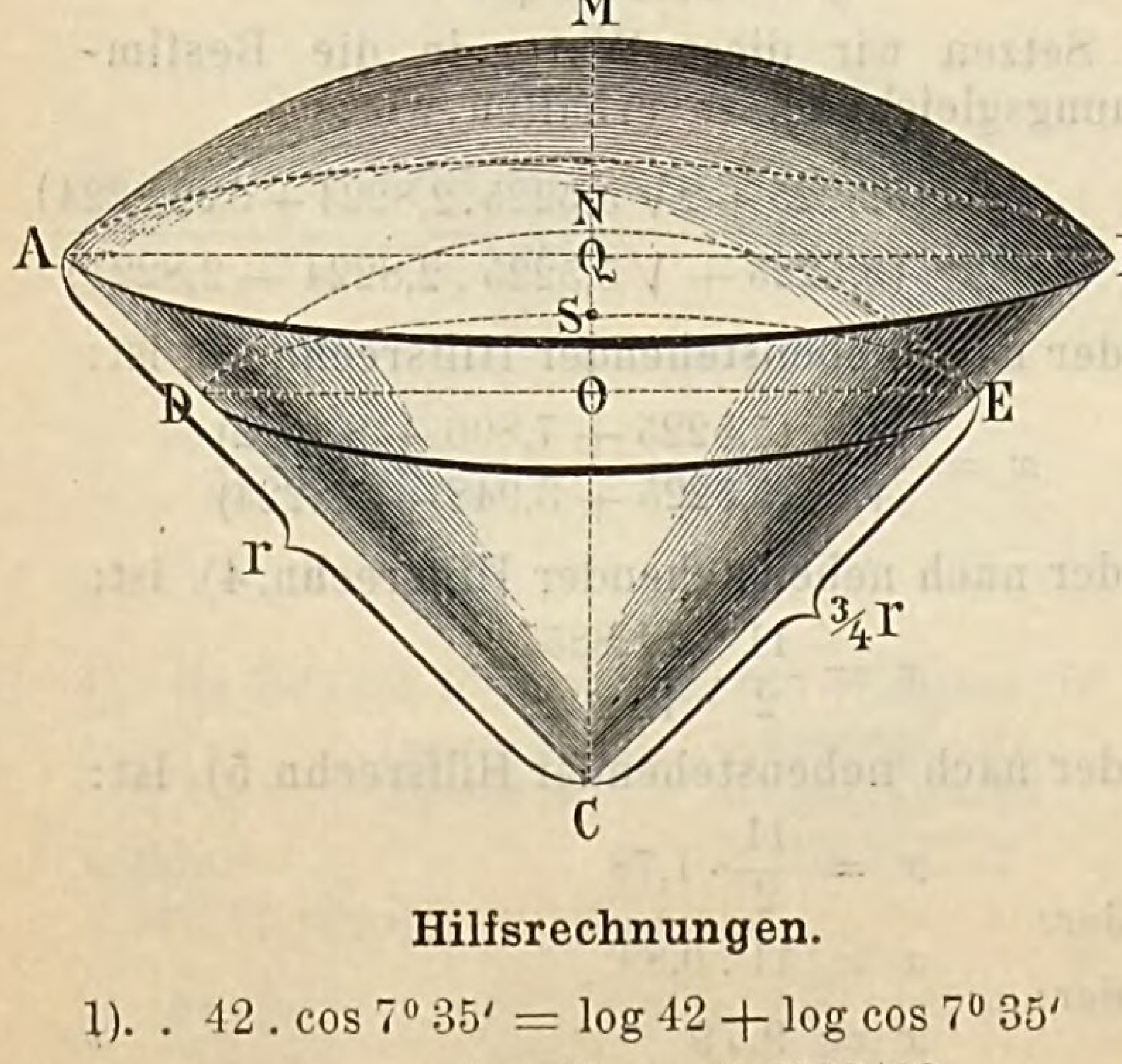
$$x = \frac{15}{2} \cdot \frac{576 + 864 + 972}{576 + 432 + 324}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2). ist:

$$x = 13,6$$

Aufgabe 157. Es soll die Entfernung des Schwerpunkts a) eines Kugelausschnitts, b) eines Kugelabschnitts vom Zentrum der zugehörigen Kugel berechnet werden, wenn in beiden Fällen der Radius der Kugel $r = 42$ cm und der Zentriwinkel ACB (siehe Figur 183) $2\alpha = 15^0\,10'$ beträgt.

Figur 183.



Hilfsrechnungen.

1). . $42 . \cos 7^0\,35' = \log 42 + \log \cos 7^0\,35'$

$\log 42 = 1,6232493$
$+ \log \cos 7^0\,35' = 9,9961849$
$\log \overline{QC} = 1,6194342$

mithin: num-log $\overline{QC}$ oder $\overline{QC} = 41,633$

Auflösung. a). Nach Antwort auf Frage 106 ist der Schwerpunktsabstand eines Kugelausschnitts oder Kugelsektors vom Mittelpunkt:

$$x = \frac{3}{8}(2r - h)$$

Um diese Formel benutzen zu können, muss erst die Höhe $h = \overline{MQ}$ (siehe Fig. 183) berechnet werden. Diese Höhe

$$h \text{ oder } \overline{MQ} = \overline{MC} - \overline{QC}$$

nun ist:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{BC}} = \cos\alpha$$

oder:

$$\overline{QC} = \overline{BC} . \cos\alpha$$

oder:

$$\overline{QC} = 42 . \cos 7^0\,35'$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1). ist:

$$\overline{QC} = 41,633$$

und somit:

$$h \text{ oder } \overline{MQ} = 42 - 41,633$$

oder:

$$h = 0,367$$

Setzen wir nun die entsprechenden Zahlenwerte in die Bestimmungsgleichung, so ist:

$$x = \frac{3}{8}(2 . 42 - 0,367)$$

Hilfsrechnungen:

2). . . $2 \cdot 42 = 84$;

```
  84
— 0,367
= 83,633
     . 3
  250,899 : 8 = 31,36
  24
   10
    8
   28
   24
    49
```

3). . .

```
   84
— 0,367
  83,633 . 83,633            3 . 42
    250899                 = 126
    250899                 — 0,367
    501798                   125,633
   250899
  669064
  6994,478689 = 6994,48
```

4). . . . $\frac{3 \cdot 6994,48}{4 \cdot 125,63} = \frac{3 \cdot 1748,62}{125,63}$

```
  1748,62 . 3
= 524586 : 12563 = 41,75
  50252
   22066
   12563
    95030
    87941
     70890
```

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2). ist:

$$x = 31,36$$

d. h. es befindet sich bei dem gegebenen Kugelausschnitt der Schwerpunkt vom Mittelpunkt in 31,36 cm Entfernung.

Auflösung. b). Nach Antw. auf Frage 107 ist der Schwerpunktsabstand eines Kugelabschnitts oder Kugelsegments:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, ist:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2 \cdot 42 - 0,367)^2}{3 \cdot 42 - 0,367}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3). ist:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{6994,48}{125,63}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4). ist:

$$x = 41,75$$

d. h. es befindet sich bei dem gegebenen Kugelabschnitt der Schwerpunkt in 41,75 cm Entfernung vom Mittelpunkt.

Aufgabe 158. Ein blechernes Litermass hat 17 cm Höhe und 8,7 cm Durchmesser; in welcher Entfernung von der Bodenfläche befindet sich der Schwerpunkt dieses Gefässes?

Hilfsrechnung.

$17 \cdot 17 = 289$; $2 \cdot 17 = 34$; $34 + 4,35 = 38,35$

```
289 : 38,35 oder 28900 : 3835 = 7,533
                 26845
                  20550
                  19175
                   13750
                   12505
                    12450
```

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 108 ist der Abstand des Schwerpunkts:

$$x = \frac{h^2}{2h + r}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \frac{17 \cdot 17}{2 \cdot 17 + 4,35}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung ist:

$$x = 7,533$$

d. h. der Schwerpunkt befindet sich in der Mittelachse 7,533 cm über der Bodenfläche.

ε). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 159. Ein 2 m langer cylindrischer Stab besteht zu $^1/_8$ seiner Länge aus Messing und zu $^7/_8$ seiner Länge aus Buchenholz. Wo liegt der Schwerpunkt dieses Stabes, wenn derselbe überall denselben Durchmesser $3^1/_2$ cm hat und wenn das spezifische Gewicht von Messing = 7,600 und das spez. Gew. von Buchenholz = 0,750 beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 138.

Aufgabe 160. Die drei Seiten eines Dreiecks sind: $a = 312$, $b = 109$, $c = 229$ cm. Wie gross ist der Schwerpunktsabstand x dieses Dreiecks, d. h. wie gross ist der Radius eines in dasjenige Dreieck beschriebenen Kreises, welches man durch die Verbindung der Halbierungspunkte der gegebenen Seiten erhält?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 139.

Aufgabe 161. Berechne den Schwerpunktsabstand von der symmetrischen Hälfte eines regulären Zwölfecks, welches um einen Kreis von 75 cm Durchmesser gezeichnet ist.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 140.

Aufgabe 162. Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens, dessen Radius $r = 80$ cm und dessen Sehne = 105 cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 141.

Aufgabe 163. Wo liegt der Schwerpunkt eines schweren Kreisbogens von dem Halbmesser $r = 34$ cm und dem Zentriwinkel $2\alpha = 108^0\,25'\,30''$?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 142.

Aufgabe 164. Berechne die Lage des Schwerpunkts a). eines Halbkreisbogens,
b). eines Viertelkreisbogens,
dessen Halbmesser $r = 38$ cm beträgt.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 143.

Aufgabe 165. Berechne die Lage des Schwerpunkts einer rechtwinkligen Dreiecksfläche, deren drei Seiten resp. 476, 93 und 485 m lang sind.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 144.

Aufgabe 166. Wie weit liegt der Schwerpunkt eines Paralleltrapezes von den beiden parallelen Seiten entfernt, wenn letztere $a = 50$ und $b = 70$ und die Höhe $h = 36$ cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 146.

Aufgabe 167. Bestimme den Schwerpunkt S eines unregelmässigen Sechsecks, welches durch die seinen Eckpunkten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 entsprechenden Koordinaten gegeben ist:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 11 & y_1 = 26 \\ x_2 = 27 & y_2 = 31{,}5 \\ x_3 = 42 & y_3 = 26 \\ x_4 = 48 & y_4 = 9{,}5 \\ x_5 = 27 & y_5 = 5 \\ x_6 = 6{,}3 & y_6 = 9{,}5. \end{array}$$

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 147.

Aufgabe 168. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Kreisausschnitts von 1,80 m Radius und 2,50 m Sehne berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 148.

Aufgabe 169. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Kreisausschnitts von 30 cm Halbmesser und 280° Zentriwinkel berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 149.

Aufgabe 170. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Kreisabschnitts von 1,80 m Radius und 2,50 m Sehne berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 150.

Aufgabe 171. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Kreissegments von 2 m Radius und 160°40′20″ Zentriwinkel berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 151.

Aufgabe 172. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Ringstücks berechnet werden, dessen Zentriwinkel $2\alpha = 275^{0}$ beträgt, und dessen Radien r und ϱ 72 resp. 55 cm messen.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 152.

Aufgabe 173. Es soll der Schwerpunktsabstand eines zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche berechnet werden, deren Radius $r = 798$ cm, wenn die grössere Sehne $s = 1000$, die kleinere $= 800$ cm beträgt.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 153.

Aufgabe 174. Es soll der Schwerpunktsabstand eines zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenen Stücks einer Kreisfläche vom Radius $r = 15{,}86$ m berechnet werden, wenn die zugehörigen beiden Zentriwinkel $2\alpha = 139^{0}56'16''$ und $2\beta = 79^{0}36'40''$ betragen.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 154.

Aufgabe 175. Es soll der Schwerpunktsabstand einer regulären sechsseitigen abgestumpften Pyramide berechnet werden, deren untere Endfläche einen Umkreis von 3 m und deren obere Endfläche einen Umkreis von 1,2 m Radius hat, während die Höhe des Pyramidenstumpfs 5 m beträgt.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 155.

Aufgabe 176. Wo liegt der Schwerpunkt eines ganz mit Erde gefüllten Blumentopfs, der oben 18, unten $12^{1}/_{2}$ cm Durchmesser und 17 cm Höhe hat?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 156.

Aufgabe 177. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Kugelausschnitts von dem Radius $r = 72$ cm und dem Zentriwinkel $2\alpha = 145^{0}$ berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 157a.

Aufgabe 178. Es soll der Schwerpunktsabstand eines Kugelabschnitts von dem Radius $r = 10{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $2\alpha = 116^{0}$ 4′ berechnet werden.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 157b.

10). Ueber Gleichgewicht und Standfestigkeit.

a. Die verschiedenen Arten des Gleichgewichts des in einem Punkt unterstützten Körpers.

Frage 112. Wenn ist ein Körper, auf welchen nur die Schwerkraft wirkt, im Gleichgewicht oder in Ruhe?

Erkl. 170. Es wurde bereits in Antw. auf Frage 2 erklärt, was man unter Gleichgewicht versteht. Siehe auch Antw. auf Frage 3.

Antwort. Ist ein Körper so unterstützt, dass sein im Schwerpunkt als senkrecht abwärts wirkend gedachtes Gewicht durch den Gegendruck der Unterstützung aufgehoben wird, so befindet sich der Körper im Gleichgewicht oder in Ruhe.

Frage 113. Welche drei Bedingungen müssen erfüllt werden, wenn ein Körper, der nur in einem einzigen Punkt unterstützt ist, im Gleichgewicht sein soll?

Erkl. 171. Es war bereits in Erkl. 5 von Widerständen die Rede und sei hier nur noch bemerkt, dass der Widerstand eines festen Punktes eine Kraft ist, die allemal gerade so gross ist und in solcher Richtung wirkt, wie es erforderlich ist, um jede Bewegung dieses Punktes zu verhindern.

Antwort. Wenn ein Körper, der nur in einem einzigen Punkt unterstützt ist, im Gleichgewicht sein soll, d. h. wenn das Gewicht des Körpers durch irgend eine andere Kraft aufgehoben werden soll, so muss diese letztere Kraft

1). senkrecht aufwärts wirken,
2). ebenso gross sein als das Gewicht des Körpers,
3). muss der Angriffspunkt derselben in der senkrechten Schwerlinie sich befinden.

Diesen drei Bedingungen genügt der durch das Gewicht des Körpers hervorgerufene Widerstand[1]) irgend eines in der senkrechten Schwerlinie liegenden festen Punktes, denn nur in diesem Fall sucht sein Gewicht den Körper senkrecht nach unten zu treiben und kann daher keine Bewegung bewirken.

[1]). Siehe Erkl. 171.

Frage 114. Wie vielerlei Lagen kann dieser feste Punkt in Bezug auf den Schwerpunkt haben?

Antwort. Dieser feste Punkt oder der sog. Unterstützungspunkt U kann drei verschiedene Lagen haben, denn er kann

1). in dem Schwerpunkt selbst, oder
2). senkrecht über dem Schwerpunkt, oder
3). senkrecht unter dem Schwerpunkt

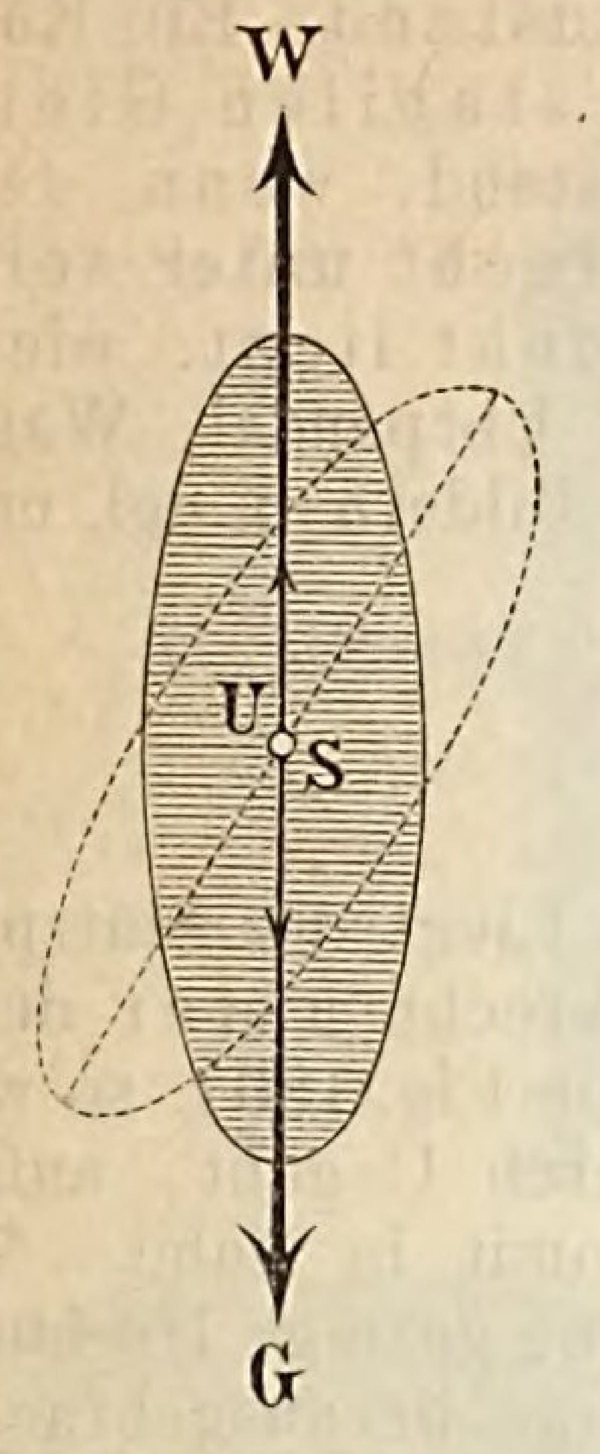
liegen.

Frage 115. Was ist über den Gleichgewichtszustand eines Körpers zu bemerken, bei dem der Unterstützungspunkt U mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt?

Antwort. Fällt der Unterstützungspunkt U eines Körpers mit dem Schwerpunkt S desselben zusammen (siehe Fig. 184), so wird auch bei einer Drehung des Körpers um den Punkt U die Kraft G stets durch U gehen, also durch den Widerstand des Stützpunktes U aufgehoben werden, d. h. der Körper wird, da sein Schwerpunkt weder steigen noch fallen kann, in jeder Lage in Ruhe sein. Man sagt in diesem Fall, der Körper ist im indifferenten[1]) oder gleichgiltigen Gleichgewicht oder Ruhezustand, wie dies bei Rädern, Kugeln, Walzen und Kegeln, sowie beim Balancier[2]) einer Dampfmaschine, wie auch bei Thüren und Fenstern der Fall ist, welche sich um senkrechte Achsen drehen.

[1]). Siehe Erkl. 172.
[2]). Siehe Erkl. 174.

Figur 184.



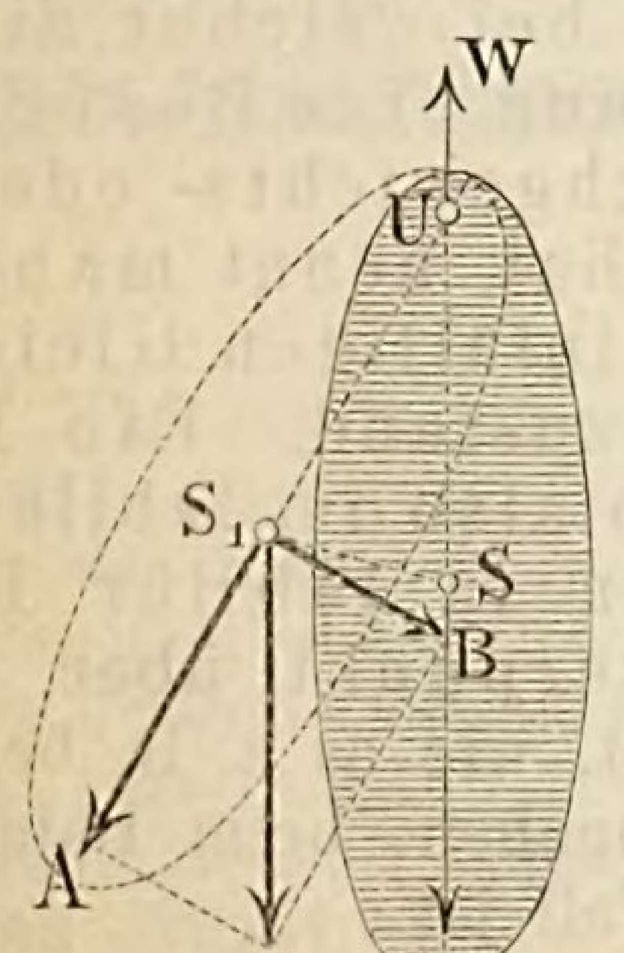
Erkl. 172. Differieren (vom lat. différre, eigentlich auseinandertragen) heisst verschieden sein, abweichen, während das Wort indifferent (lat. indifférens) soviel wie ununterschieden, einerlei, gleichgiltig bedeutet.

Frage 116. Was ist über den Gleichgewichtszustand eines Körpers zu bemerken, bei dem der Unterstützungspunkt U senkrecht über dem Schwerpunkt S liegt?

Antwort. Liegt der Stützpunkt U eines Körpers über seinem Schwerpunkt S (siehe Figur 185), so geht die in S angreifende senkrecht gerichtete Kraft G auch durch U, der Körper ist also in Ruhe. Denkt man sich nun den Körper durch eine Drehung um U aus dieser Ruhe- resp. Gleichgewichtslage herausgebracht, so dass S in die Lage von S_1 kommt, so geht die lotrechte Schwerlinie $S_1 G_1$ nicht mehr durch den Stützpunkt U und die Schwerkraft dreht dann den Körper so lange, bis der Schwerpunkt die möglichst tiefste Stelle eingenommen hat.

Zum Beweis denke man sich die Kraft G_1 (d. h. das Gewicht des Körpers) in die beiden Komponenten S_1A und S_1B zerlegt, deren erstere, in der Richtung US_1 wirkend, durch den Widerstand des festen Punktes U aufgehoben wird, so dass nur die zweite, auf UA senkrechte Komponente S_1B zur Wirkung kommt; letztere wird den Körper in die frühere Lage zurückdrehen. Einen solchen Gleichgewichts- resp. Ruhezustand, bei welchem der Körper, aus der Ruhelage herausgebracht, von selbst wieder in dieselbe zurückkehrt, nennt man stabilen[1])

Figur 185.



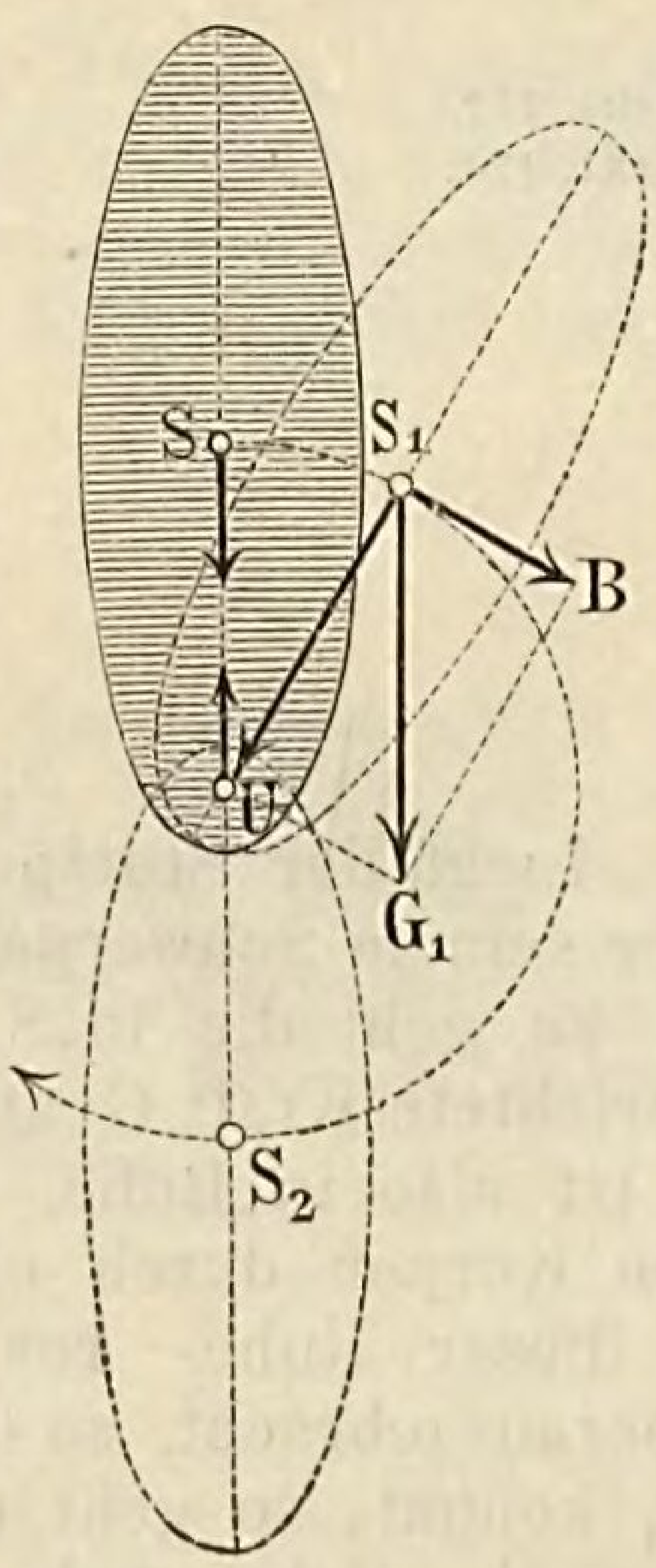
Erkl. 173. Stabil (vom lat. stabĭlis, von stare, stehen) heisst soviel wie bestehend, dauerhaft, beständig, nicht veränderlich.

[1]). Siehe Erkl. 173.

oder beständigen Gleichgewichts- resp. Ruhezustand. Ein Körper befindet sich also im stabilen Gleichgewicht resp. Ruhezustand, wenn sein Schwerpunkt senkrecht unter seinem Unterstützungspunkt liegt, wie es z. B. der Fall ist beim Uhrpendel, Wagebalken, bei aufgehängten Bildern u. dgl. m.

Frage 117. Was ist über den Gleichgewichtszustand eines Körpers zu bemerken, bei dem der Unterstützungspunkt U senkrecht unter dem Schwerpunkt S liegt?

Figur 186.



Erkl. 174. Das französ. Wort balance (spr. balangss) bedeutet Gleichgewicht oder Ebengewicht, Schwebe; balancieren (spr. balangssieren, franz. balancer) heisst: das Gleichgewicht halten; der Balancier (spr. balangssjeh) ist der Wagebalken, Pump- oder Schwebebalken, Pumpenschwengel an der Dampfmaschine.

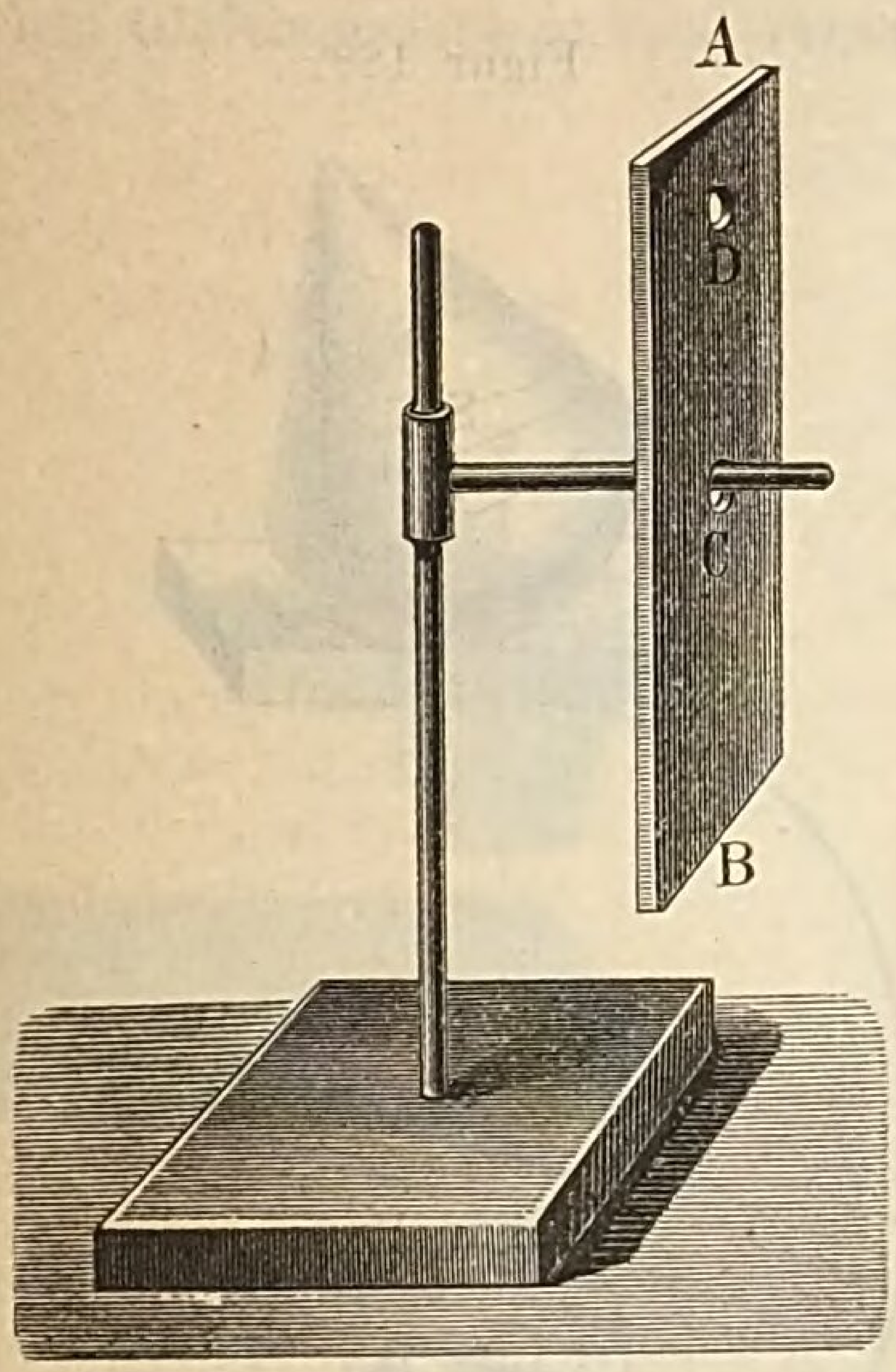
Antwort. Liegt der Stützpunkt U eines Körpers senkrecht unter dessen Schwerpunkt S (siehe Fig. 186), so wird die Kraft G, da sie durch U geht, aufgehoben, der Körper ist somit in Ruhe. Wird derselbe nun durch eine geringe Drehung um U aus seiner Ruhelage herausgebracht, so dass S in die Lage von S_1 kommt, so geht die lotrechte Schwerlinie S_1G_1 nicht mehr durch U. Denkt man sich dieselbe wieder in zwei Seitenkräfte zerlegt, deren eine in der Richtung von S_1U wirkend durch den Widerstand des festen Punktes U aufgehoben wird, so kommt nur die rechtwinklig gegen S_1U gerichtete Komponente zur Wirkung, welche den Punkt S, also auch den ganzen Körper nach B hin so lange dreht, bis S nach S_2 gelangt ist. Der Körper kehrt also nicht in seine frühere Ruhelage zurück, sondern geht in eine neue, stabile über. Eine solche Gleichgewichts-, resp. Ruhelage, bei welcher die geringste Verschiebung eine Bewegung in eine neue Gleichgewichts- oder Ruhelage zur Folge hat, nennt man einen labilen oder hinfälligen Gleichgewichts- oder Ruhezustand. Ein Körper befindet sich also im labilen Gleichgewicht oder in labiler Ruhe, wenn sein Schwerpunkt über dem Stützpunkt liegt, wie es z. B. beim Seiltänzer, beim Stelzengehen, beim Balancieren[1]) und dergl. der Fall ist.

[1]). Siehe Erkl. 174.

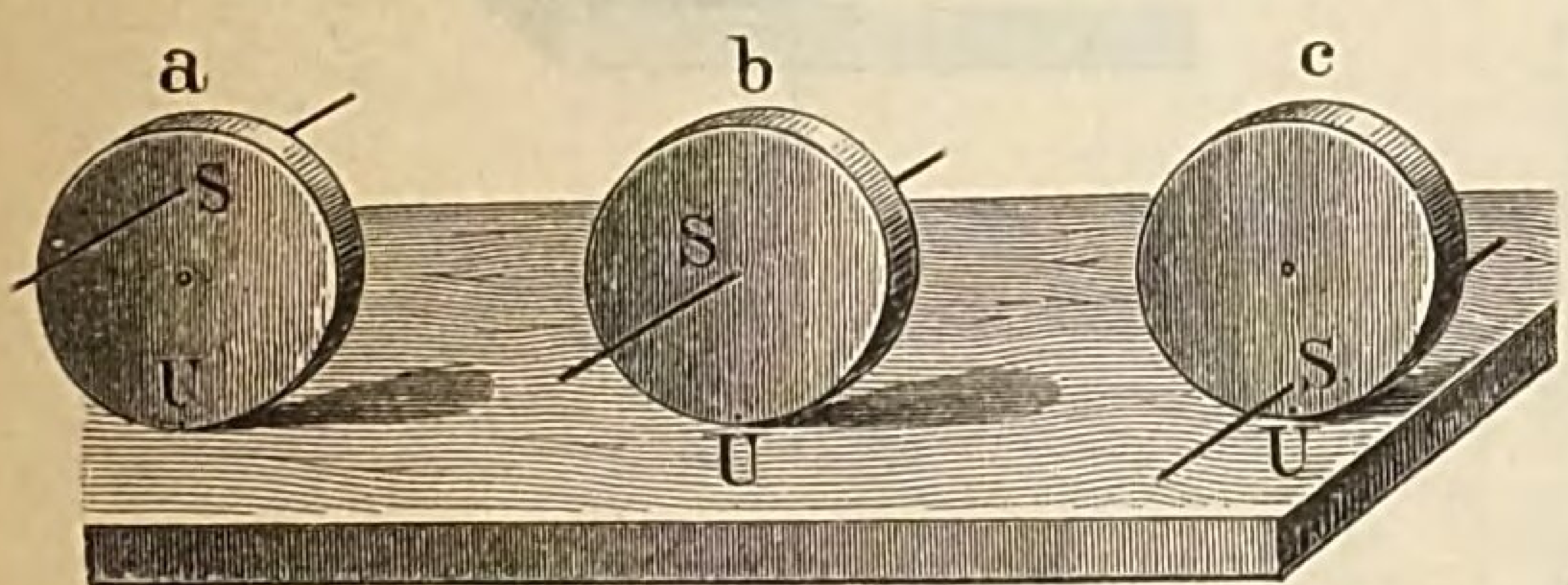
Frage 118. Durch welche Experimente lassen sich die vorerwähnten drei Arten der Gleichgewichtslage veranschaulichen?

1). Man hänge eine in der Mitte C durchbohrte Pappscheibe oder ein Lineal (siehe Fig. 187) an dem wagerechten Arm eines Holzgestells oder an einem wagerecht gehaltenen Bleistift auf, alsdann wird der Körper nach jeder beliebigen Drehung in

Figur 187.



Figur 188.



Ruhe bleiben, denn er ist im indifferenten Ruhezustand. Bringt man an demselben Körper eine zweite Durchbohrung D an und hängt ihn in D so auf, dass sich das Stück CB (d. h. der Schwerpunkt) unter dem Aufhängepunkt D befindet, so ist der Körper im stabilen Gleichgewicht, und wird bei jeder Störung seiner Ruhelage immer wieder in dieselbe zurückkehren. Hängt man dagegen den Körper in D so auf, dass sich das Stück CB (also auch der Schwerpunkt) über D befindet, dann wird der Körper kaum in dieser Stellung verharren oder doch bei der geringsten Störung umschlagen, d. h. aus seiner labilen Gleichgewichtslage in die stabile übergehen.

2). In ähnlicher Weise können auch bei einem von fester horizontaler Unterlage an einem Punkt unterstützten Körper drei verschiedene Arten des Gleichgewichtszustandes unterschieden werden. Schiebt man z. B. durch eine Korkscheibe nahe ihrem Rand eine Stricknadel und stellt die Scheibe (s. Fig. 188a) so auf, dass die Nadel, welche man offenbar als Schwerpunkt auffassen kann, ihre höchste Stellung einnimmt, so wird die Scheibe schon durch die geringste Aenderung ihrer Stellung aus ihrer labilen Gleichgewichtslage in die stabile Lage (siehe Fig. 188c) übergehen. Entfernt man den Körper jetzt aus seiner Ruhelage, so führt ihn sein eigenes Gewicht immer wieder in dieselbe zurück, denn sein Schwerpunkt S nimmt bei jeder Lagenänderung eine höhere Stelle ein und muss sonach beim Aufhören der auf ihn wirkenden Kraft in die frühere Lage zurückkehren. Steckt man aber die Stricknadel durch den Mittelpunkt der Korkscheibe (siehe Fig. 188b), dann kann der Schwerpunkt weder steigen noch fallen und die Scheibe bleibt in jeder Lage in indifferenter Ruhe.

Erkl. 175. Ein aus Halbkugel und Kegel zusammengesetzter homogener Körper wird je nach der Höhe des Kegels in stabilen, labilen oder indifferentem Gleichgewichtszustand sich befinden, wenn derselbe aufrecht auf eine horizontale Ebene gestellt wird Indifferent ist der Gleichgewichtszustand eines solchen Körpers, wenn der Schwerpunkt des Ganzen mit dem Mittelpunkt der Halbkugelfläche zusammenfällt, also — nach der vorausgegangenen Lehre vom Schwerpunkt — wenn das Moment des Kegelinhalts gleich ist dem Moment der Halbkugel in Bezug auf die gemeinschaftliche Grundkreisebene beider Körper Nach Antwort auf Frage 101 u. 102 ist das Volumen des Kegels:

$$V_1 = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

und sein Schwerpunktsabstand:

$$x_1 = \frac{h}{4}$$

folglich das Moment des Kegels:

$$V_1 x_1 = \frac{r^2 \pi h}{3} \cdot \frac{h}{4}$$

Das Volumen der Halbkugel ist:

$$V_2 = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

und ihr Schwerpunktsabstand:

$$x_2 = \frac{3}{8} r \quad \text{(siehe Erkl. 165)}$$

folglich das Moment der Kugel:

$$V_2 x_2 = \frac{2}{3} r^3 \pi \cdot \frac{3}{8} r$$

Soll nun indifferentes Gleichgewicht stattfinden, so muss

$$V_1 x_1 = V_2 x_2$$

oder:

$$\frac{r^2 \pi h}{3} \cdot \frac{h}{4} = \frac{2}{3} r^3 \pi \cdot \frac{3}{8} r$$

oder:

$$\frac{1}{12} r^2 h^2 \pi = \frac{1}{4} r^4 \pi$$

oder:

$$\frac{1}{3} h^2 = r^2$$

oder:

$$h^2 = 3 r^2$$

oder:

$$h = r \sqrt{3}$$

und

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

oder:

$$l = \sqrt{r^2 + 3 r^2}$$

oder:

$$l = 2 r$$

sein.

Stabil ist dagegen der Gleichgewichtszustand des aufrecht gestellten Körpers, wenn l kleiner ist als $2r$ (siehe Fig. 190) und labil, wenn l grösser ist als $2r$ (siehe Fig. 191).

Ist statt des Kegels ein Cylinder mit einer Halbkugel zu einem Körper zusammengesetzt, so erhält man auf gleiche Weise für den Fall des indifferenten Gleichgewichts die Bedingungsgleichung:

$$r^2 . \pi h \cdot \frac{h}{2} = \frac{2}{3} r^3 \pi \cdot \frac{3}{8} r$$

oder:

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Ist ein Cylindermantel mit einer Halbkugelschale auf gleiche Art verbunden, so ist der Körper im indifferenten Gleichgewicht, wenn

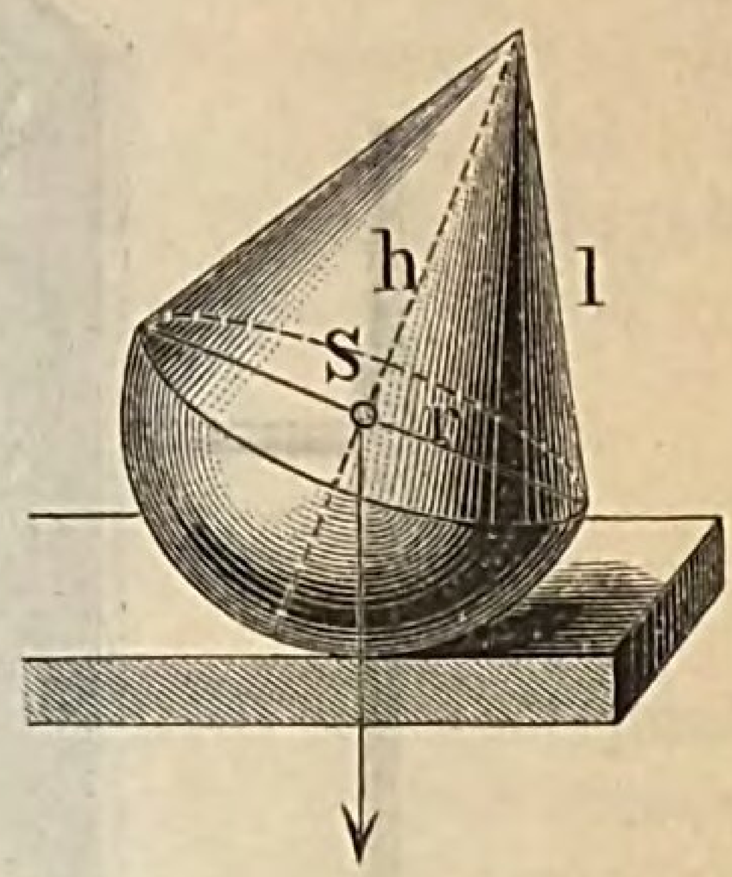
$$2 r . \pi h \cdot \frac{h}{2} = 2 r^2 \pi \cdot \frac{r}{2}$$

oder:

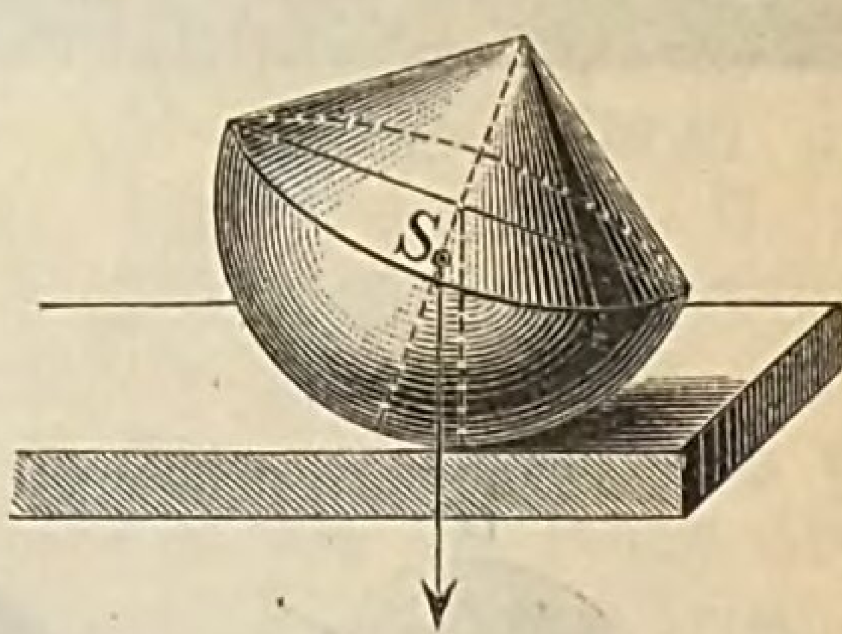
$$h = r$$

ist.

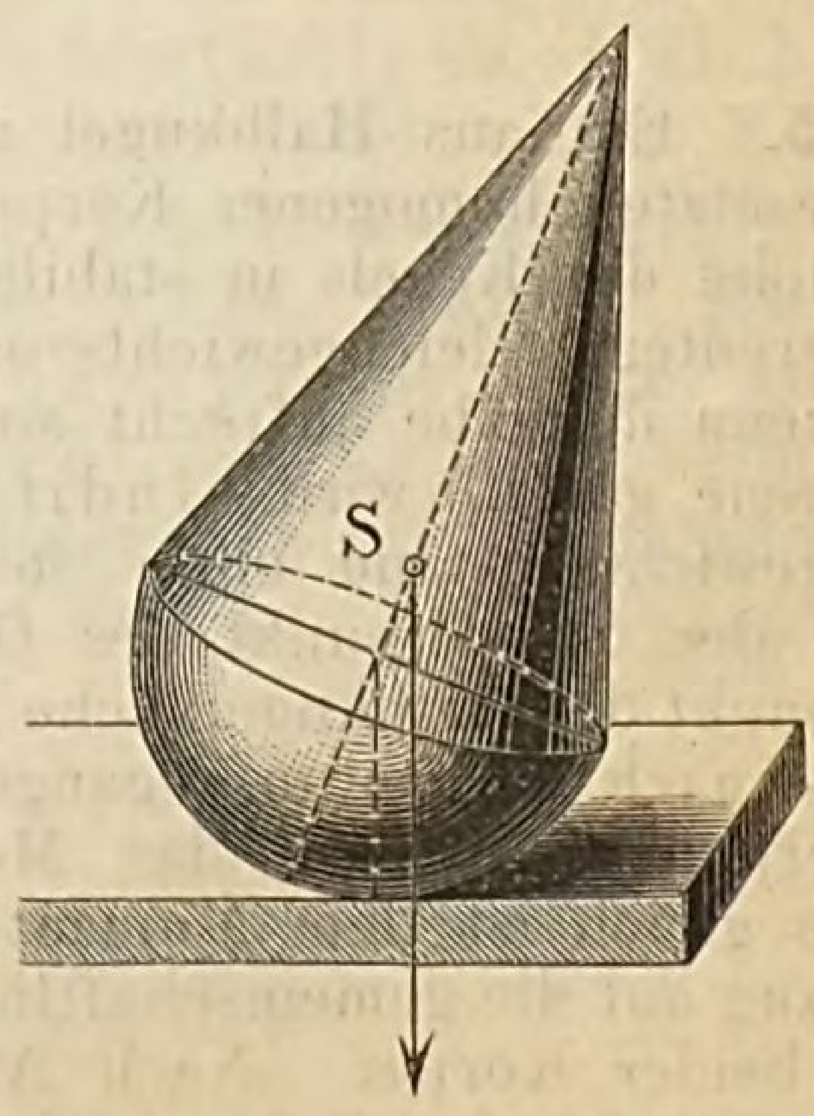
Figur 189.



Figur 190.

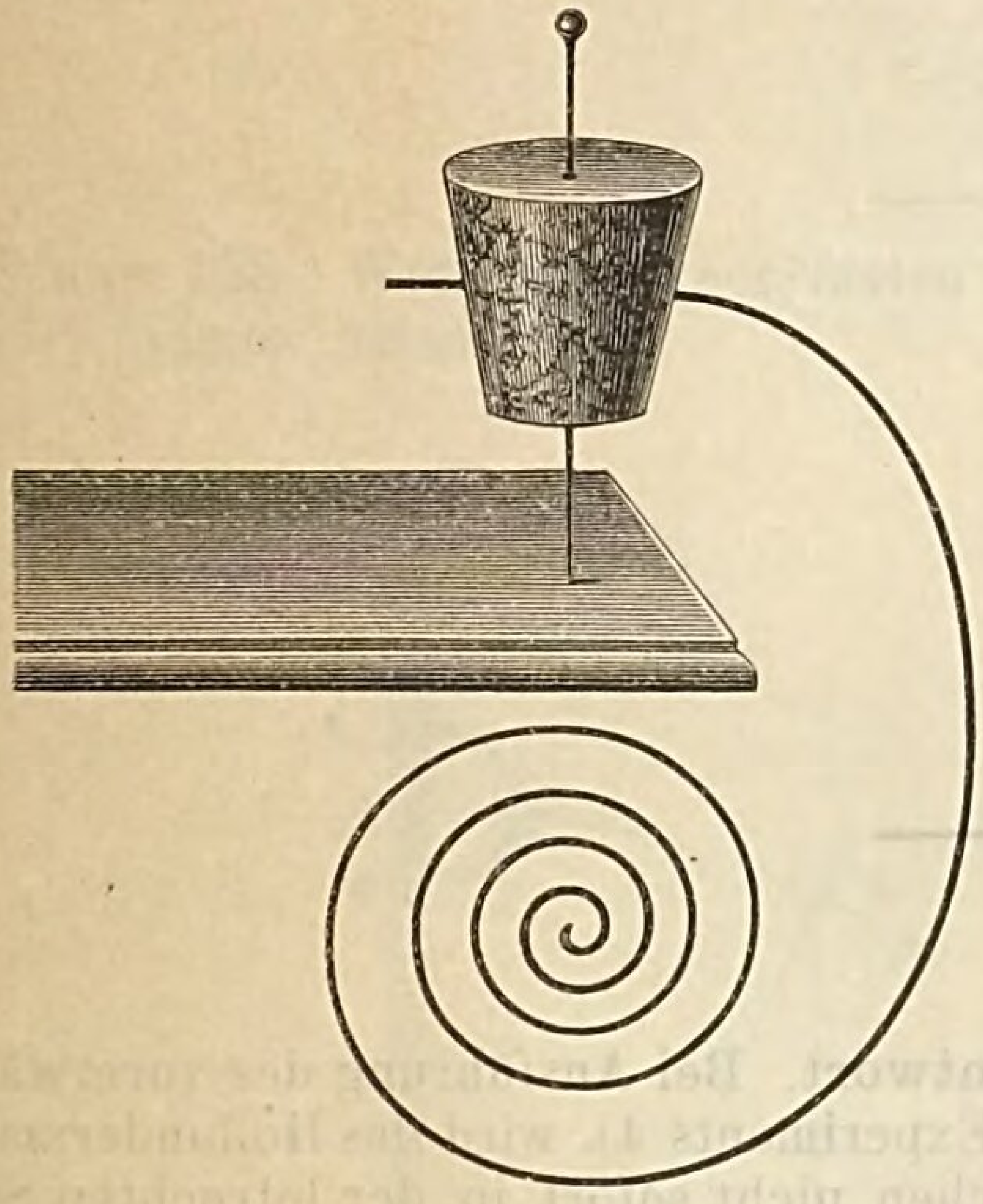


Figur 191.

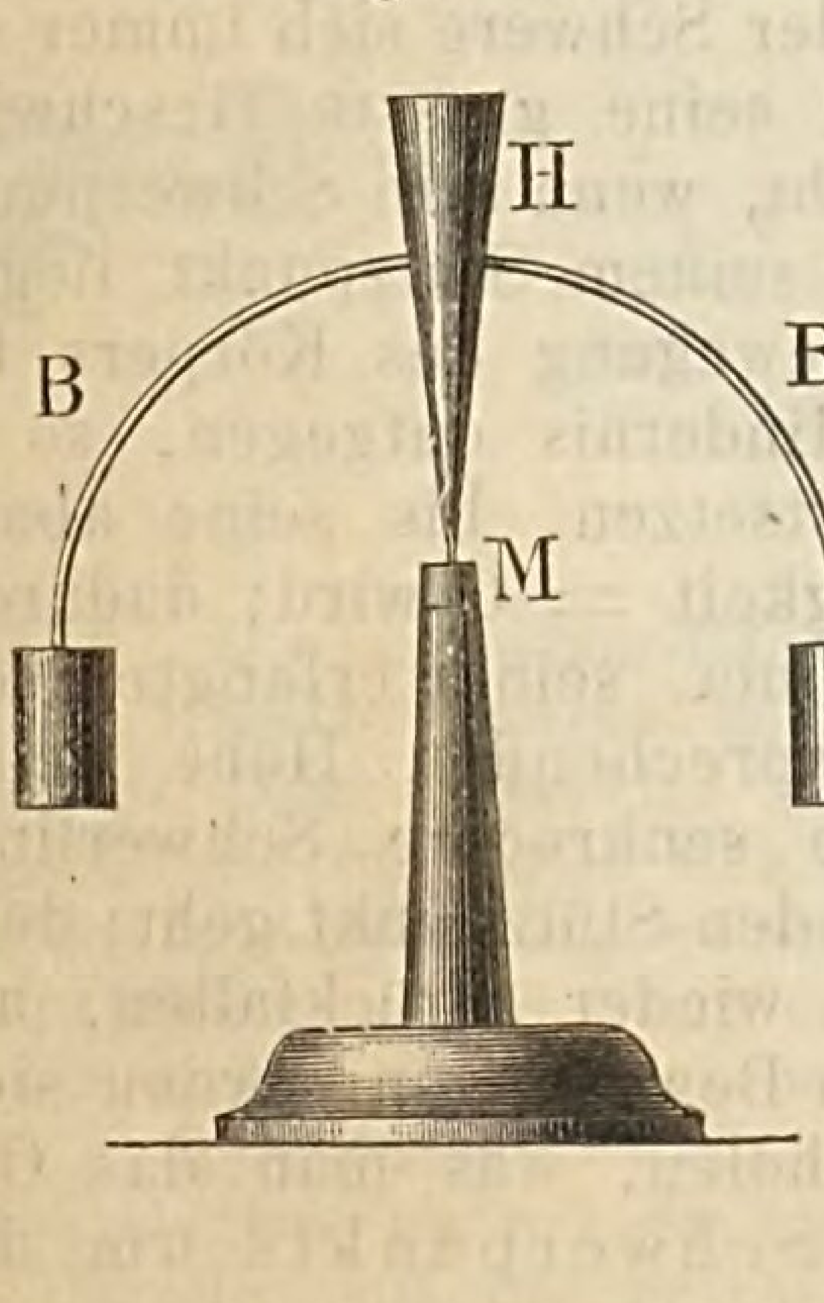


Frage 119. Wodurch kann der labile Gleichgewichtszustand eines Körpers in einen stabilen Gleichgewichtszustand verwandelt werden?

Figur 192.



Figur 193.



Antwort. Der labile Gleichgewichtszustand eines Körpers kann dadurch in einen stabilen Gleichgewichtszustand verwandelt werden, dass man an geeigneter Stelle, ausserhalb oder innerhalb des Körpers, fremde Massen mit demselben verbindet, welche den Schwerpunkt des Ganzen so weit nach unten verschieben, dass nunmehr die Bedingungen des stabilen Gleichgewichts erfüllt sind.

Experimentalbeweise:

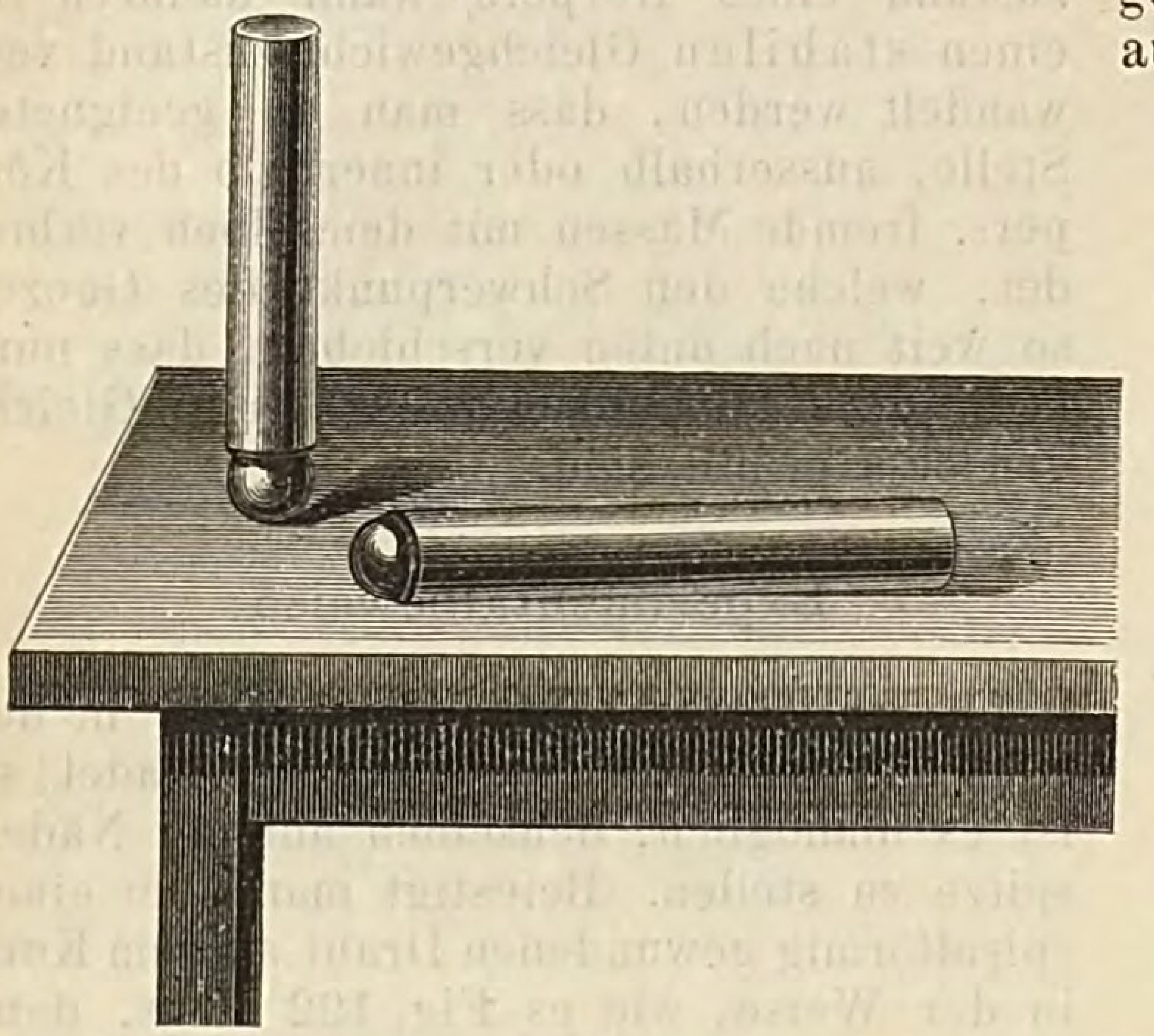
1). Durchbohrt man einen Kork in der Richtung seiner Achse mit einer Nadel, so ist es unmöglich, denselben auf die Nadelspitze zu stellen. Befestigt man aber einen spiralförmig gewundenen Draht an dem Kork in der Weise, wie es Fig. 192 zeigt, dann kann der Kork auf den Rand eines Tisches gestellt werden und ist im stabilen Gleichgewicht, weil sein Schwerpunkt tiefer liegt als sein Stützpunkt, weil also der Körper in Wirklichkeit nicht steht, sondern hängt.

2). Dasselbe gilt von dem Holzstück H (Fig. 193), welches an seinem unteren Ende mit einer Stahlspitze versehen auf das flach ausgehöhlte Metallstück M gesetzt, sofort umfällt. Wird aber ein an den Enden mit Gewichten versehener Drahtbogen BB an dem Holzstück befestigt, so ist H im stabilen Gleichgewicht und eigentlich aufgehängt, denn der Schwerpunkt liegt jetzt unter dem Stützpunkt.

3). Ebenso schwebt eine Münze stabil auf einer Nadelspitze, wenn auf dieselbe ein Kork mit durchgesteckten Gabeln gesetzt wird, welche den Schwerpunkt unter die Nadelspitze bringen.

4). Nimmt man ein Stück Hollundermark, an dessen einem Ende eine kleine Kugel befestigt ist und legt es seiner Länge nach auf einen Tisch (siehe Fig. 194), so richtet sich dasselbe von selbst auf und stellt sich senkrecht. Das trockene Hollundermark ist nämlich sehr leicht, das Blei dagegen sehr schwer, so dass der Schwerpunkt des Körpers in der Metallkugel liegt. Wenn der Cylinder nun der Länge nach auf den Tisch gelegt wird, so trifft das durch seinen Schwerpunkt gezogene Lot den Tisch in einem Punkt, der nicht in der Unterstützungsfläche der Figur liegt. Die Schwerkraft kommt

Figur 194.



daher derart zur Wirkung, dass sie den Körper in eine Lage dreht, in welcher die senkrechte Schwerlinie durch den Stützpunkt geht; die Figur richtet sich daher von selbst auf (siehe Erkl. 175).

Frage 120. Was versteht man unter dem Oscillieren des Schwerpunkts um den Unterstützungspunkt?

Antwort. Bei Ausführung des vorerwähnten Experiments 4). wird das Hollundermarkstäbchen nicht sofort in der lotrechten Stellung verharren, sondern sich längere Zeit hin- und herbewegen, ehe es zur Ruhe kommt. Dasselbe gilt auch von einem Körper, der in stabiler Gleichgewichtslage hängend (siehe Fig. 185) angestossen wird. Der Körper kehrt in seine vorige Lage zurück, wobei er infolge der Schwere sich immer schneller bewegt und seine grösste Geschwindigkeit dann erreicht, wenn sein Schwerpunkt senkrecht unter seinem Stützpunkt liegt. Steht dann der Bewegung des Körpers kein genügendes Hindernis entgegen, so wird er dieselbe fortsetzen, bis seine abnehmende Geschwindigkeit $= 0$ wird; dadurch ist er jedoch zu einer, seiner erlangten Geschwindigkeit entsprechenden Höhe gelangt, in welcher die senkrechte Schwerlinie nicht mehr durch den Stützpunkt geht; der Körper muss somit wieder zurückfallen, und diese wechselnden Bewegungen werden sich einige Zeit wiederholen, was man das Oscillieren[1]) des Schwerpunkts um den Unterstützungspunkt nennt.

[1]) Siehe Erkl. 176.

Erkl. 176. Oscillieren (vom lat. oscillāre) heisst schwingen, Schwingungen machen, sich in einer schwingenden Bewegung hin und her schaukeln; Oscillation, die (lat. oscillatio), bedeutet die Schwingung, die schwingende Bewegung, der Schwung, auch das Schwanken.

Erkl. 177. Die in nebenstehender Antwort erklärte Oscillation des Schwerpunkts findet statt bei dem Wagebalken (siehe unter dem Abschnitt „Hebel“), den Pendeln, den nickenden chinesischen Porzellanköpfen (auch Pagode, Nickkopf oder Wackelpuppe genannt), die man früher auf den Schränken aufzustellen pflegte, den Sägemännern, die eine Säge am Rand des Tisches auf- und abbewegen, den balancierenden Puppen, die mit einem Fuss auf einer Spitze sich drehen und schaukeln.

Schwankungen dieser Art werden um so weniger stattfinden, je grösser die zu bewegende Last ist und je höher bei gleicher durchlaufener Bahn der Schwerpunkt steigt, wobei dann noch der Widerstand der Bewegung zu berücksichtigen ist. Träge Wagebalken von grosser Masse, bei denen der Schwerpunkt tief unter dem Stützpunkt liegt, ebenso wie kurze Pendel werden daher schnell oscillieren und bald zum Stillstand kommen, wogegen die Wagebalken der feinsten Wagen ebenso wie lange Pendel langsame Schwingungen ausführen und stundenlang in Bewegung sein können, ehe sie zur Ruhe kommen.

Frage 121. Unter welchen Umständen ist es möglich, einen nur in einem Punkt unterstützten Körper auf einige Zeit im labilen Gleichgewicht zu erhalten?

Antwort. Man kann einen nur in einem Punkt unterstützten Körper auf einige Zeit dadurch im labilen Gleichgewichtszustand erhalten, dass man durch geeignete Bewegung, mit dem Stützpunkt stets wieder unter den ausgewichenen Schwerpunkt zu gelangen sucht, od. dass man den Körper balanciert[1]).

[1]) Siehe Erkl. 174.

Frage 122. Was für Körper lassen sich am leichtesten balancieren?

Antwort. Ein Körper lässt sich um so leichter balancieren, je weiter sein Schwerpunkt vom Unterstützungspunkt entfernt ist, d. h. (Homogenität vorausgesetzt) je länger er ist und je grösser sein Gewicht bei sonst gleichen Verhältnissen ist.

Wird nämlich (Fig. 195) der Schwerpunkt S aus der senkrechten U S durch Drehung um U heraus und in die Lage S_1 gebracht, so hat man, wenn der Körper nicht umfallen soll, den Punkt U soweit zu verschieben, dass er wieder senkrecht unter S_1 liegt, d. h. S_1U muss in die Lage S_1U_1 gebracht, also um den Winkel

$$US_1U_1 = SUS_1 \text{ oder } \alpha$$

gedreht werden. Wäre nun s die ursprüngliche Lage des Schwerpunkts und wäre s um einen gleichen Bogen:

$$ss_2 = SS_1$$

verschoben, so hätte man Us_2 in die vertikale Lage s_2U_2, also um den Winkel

$$Us_2U_2 = sUs_2 \text{ oder } \alpha_1$$

zu drehen, um die Ruhe des Körpers wieder herzustellen. Ist nun:

$$SU = r$$
$$sU = \varrho$$

so ergibt sich, dass Bogen

$$SS_1 = \frac{2\pi r\alpha}{360}$$

und

$$ss_2 = \frac{2\pi\varrho\alpha_1}{360}$$

also, da

$$SS_1 = ss_2$$

ist:

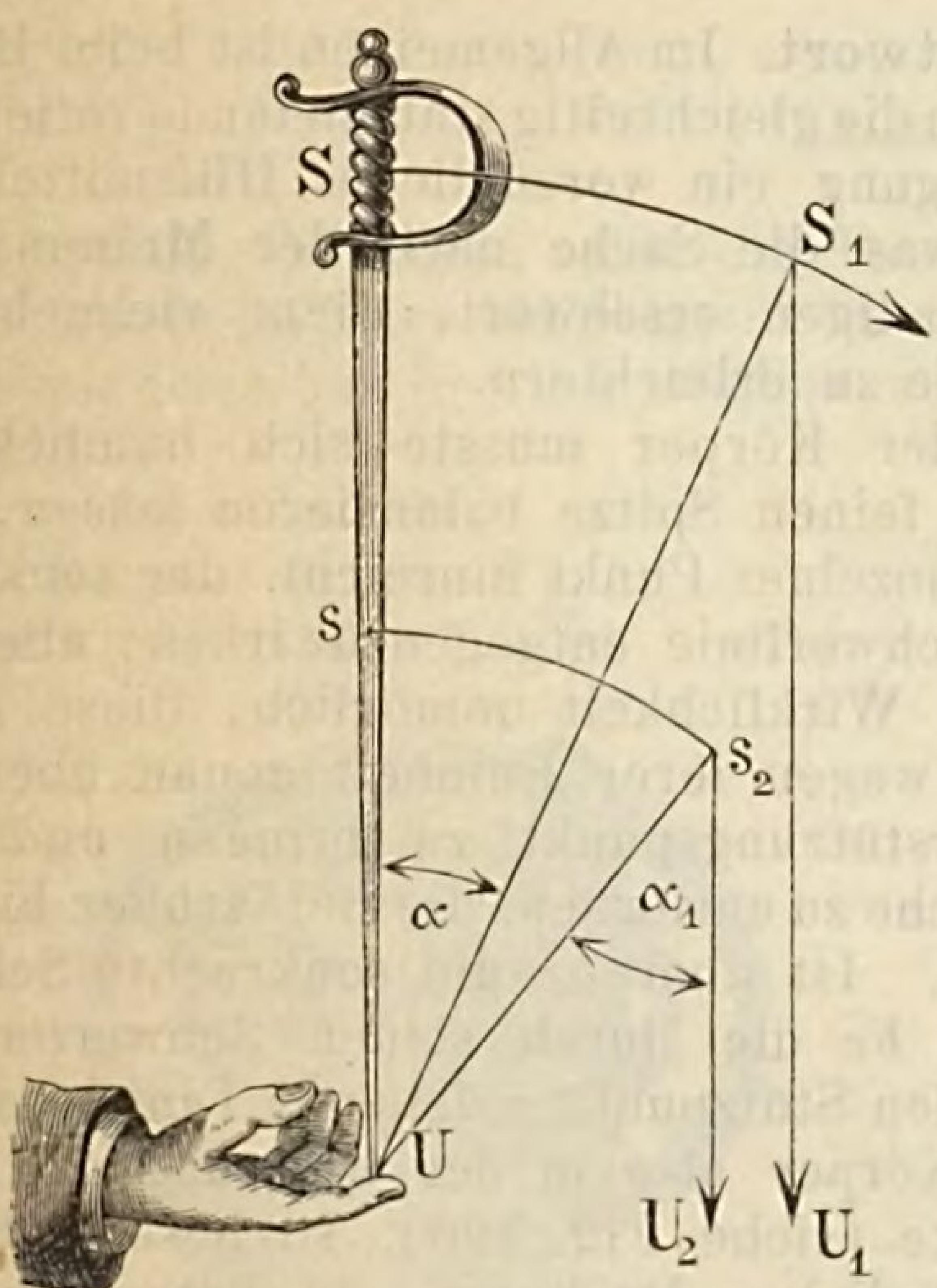
$$r\alpha = \varrho\alpha_1$$

und

$$\alpha : \alpha_1 = \varrho : r$$

d. h. die Drehungswinkel verhalten sich umgekehrt, wie die Höhen der Schwerpunkte über dem Unterstützungspunkt. Je höher also der Schwerpunkt liegt, um einen desto

Figur 195.



Erkl. 178. Die in nebenstehender Antwort aufgeführten Gesetze werden bei den Kunststücken der Seiltänzer, Gaukler und der durch ungewöhnliche Körperstärke sich auszeichnenden Athleten in Anwendung gebracht, welche z. B. einen Heubaum, eine lange eiserne Stange oder eine Leiter mit einem Menschen am oberen Ende u. s. w. balancieren. — Da der Schwerpunkt eines Degens nahe beim Griff liegt, so lässt sich derselbe auf der Spitze leichter balancieren als auf dem Griff; ein Stock mit einem Bleiknopf wird leicht balanciert, eine Pfauenfeder zu balancieren gilt für ein Kunststück, aber eine kurze Stecknadel zu balancieren ist ganz unmöglich.

Aus gleichen Gründen ist die Balancierstange ein sehr erleichterndes Hilfsmittel, und zwar umsomehr, je länger und je schwerer sie ins-

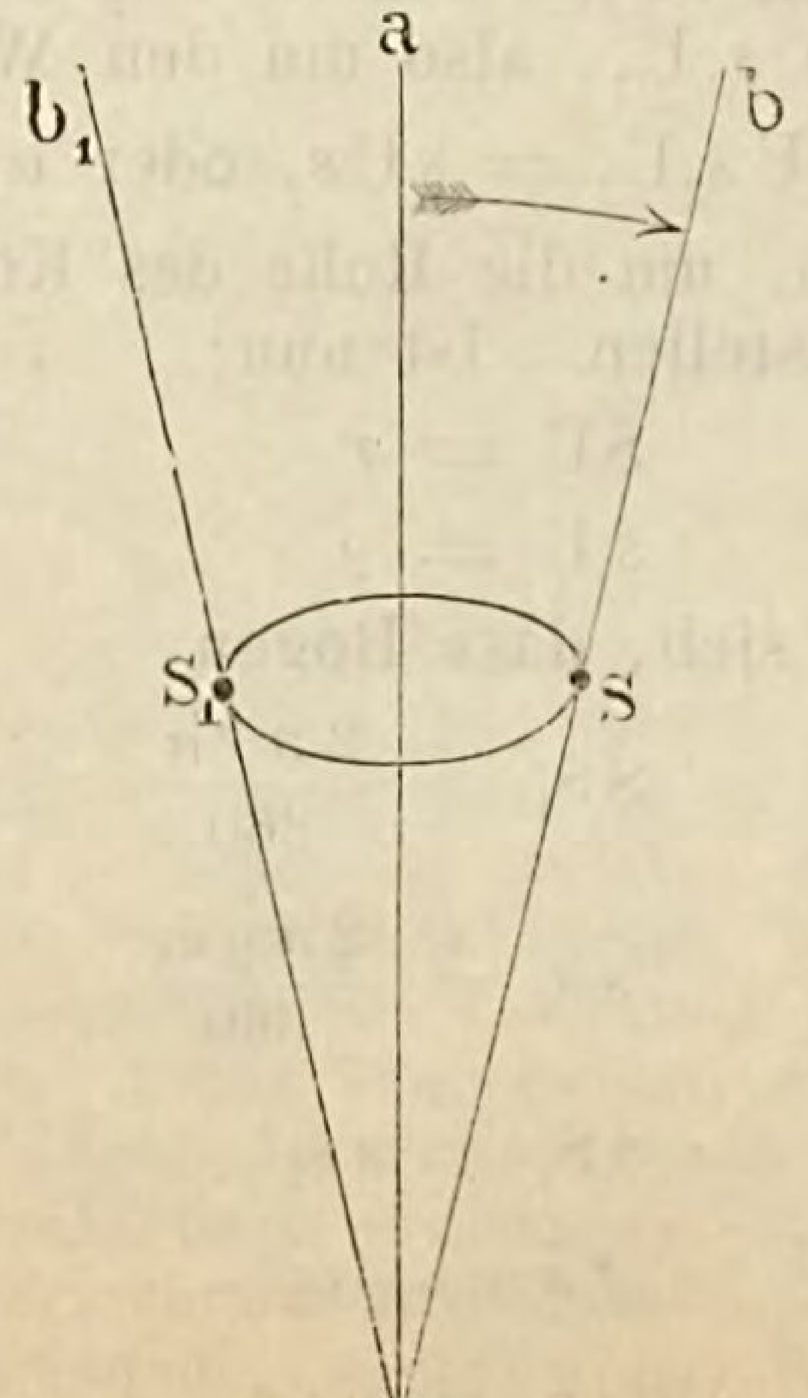
besondere durch Bleigewichte an ihren Enden ist, weil sie alsdann um so leichter dazu beiträgt, den Schwerpunkt des Seiltänzers immer wieder über den Unterstützungspunkt zu bringen. Wäre die Stange so tief herabgebogen und mit so starken Gewichten an ihren Enden beschwert, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Seiltänzers und der Stange unterhalb des Seiles fiele, so wäre das Fallen unmöglich und der Künstler würde dem bereits beschriebenen auf einer Spitze von selbst balancierenden Holzstäbchen (siehe Fig. 193) gleichen.

kleineren Winkel hat man den Unterstützungspunkt zu verschieben, um den Körper in Ruhe zu bringen, oder einen um so grösseren Bogen beschreibt der Schwerpunkt, wozu eine längere Zeit erforderlich ist, als bei niedriger Lage des Schwerpunktes. — Dass auch mit der Zunahme des Gewichts das Balancieren leichter wird, folgt daraus, dass alsdann ein starker Druck auf den Stützpunkt, z. B. auf die Fingerspitze ausgeübt wird, und so jede Druckveränderung leicht zu empfinden ist. Zugleich wird aber auch bei grösserer Schwere der Widerstand des Körpers gegen jede Aenderung seiner Lage grösser.

Frage 123. Welches ist ein vorzügliches Hilfsmittel beim Balancieren?

Erkl. 179. Eines der gewöhnlichsten Kunststücke besteht darin, dass der Griff eines Degens auf das Kinn oder die Stirn gesetzt auf die Spitze eine Scheibe gelegt, auf diese wieder ein etwas längerer Stift aufgerichtet, auf diesen ein Teller mit einem Glas voll Flüssigkeit gesetzt und dieses alles balanciert wird, während Scheibe und Teller sich schnell um ihre Achse drehen.

Figur 196.



Antwort. Im Allgemeinen ist beim Balancieren die gleichzeitig stattfindende rotierende Bewegung ein vorzügliches Hilfsmittel und das was die Sache nach der Meinung der Unkundigen erschwert, dient vielmehr dazu, sie zu erleichtern.

Jeder Körper müsste sich nämlich auf einer feinen Spitze balancieren lassen, weil ein einzelner Punkt hinreicht, der senkrechten Schwerlinie entgegenzuwirken; allein es ist in Wirklichkeit unmöglich, diese Linie, eben wegen ihrer Feinheit genau über den Unterstützungspunkt zu bringen und jede Ursache zu entfernen, die sie darüber hinausrückt. Ist aber $\overline{ac}$ die senkrechte Schwerlinie, $\overline{bc}$ die durch seinen Schwerpunkt s und den Stützpunkt c gehende Linie, so dass der Körper also in der Richtung ab fallen müsste (siehe Fig. 196), so beschreibt bei hinlänglicher Drehung sein Schwerpunkt s einen Kreis um die unterstützte Senkrechte, wonach er also schon nach s_1 gelangt ist, ehe er Zeit hatte, tiefer herabzusinken. Der Körper wird also nicht fallen können, so lange seine Bewegung schnell genug ist, seinen Schwerpunkt nach der entgegengesetzten Seite zu bringen, als wohin er zu fallen sich neigt. Man ersieht dies am besten an einer Scheibe, welche etwas excentrisch auf einer freien Spitze ruhend, in horizontaler Ebene durch schnelle Umdrehung balanciert wird; auch zeigen dieses die Kreisel der Kinder etc.

Frage 124. Auf welche Weise ist es möglich, die drehende Bewegung eines Körpers um eine horizontale Achse dem Einfluss der Schwerkraft zu entziehen?

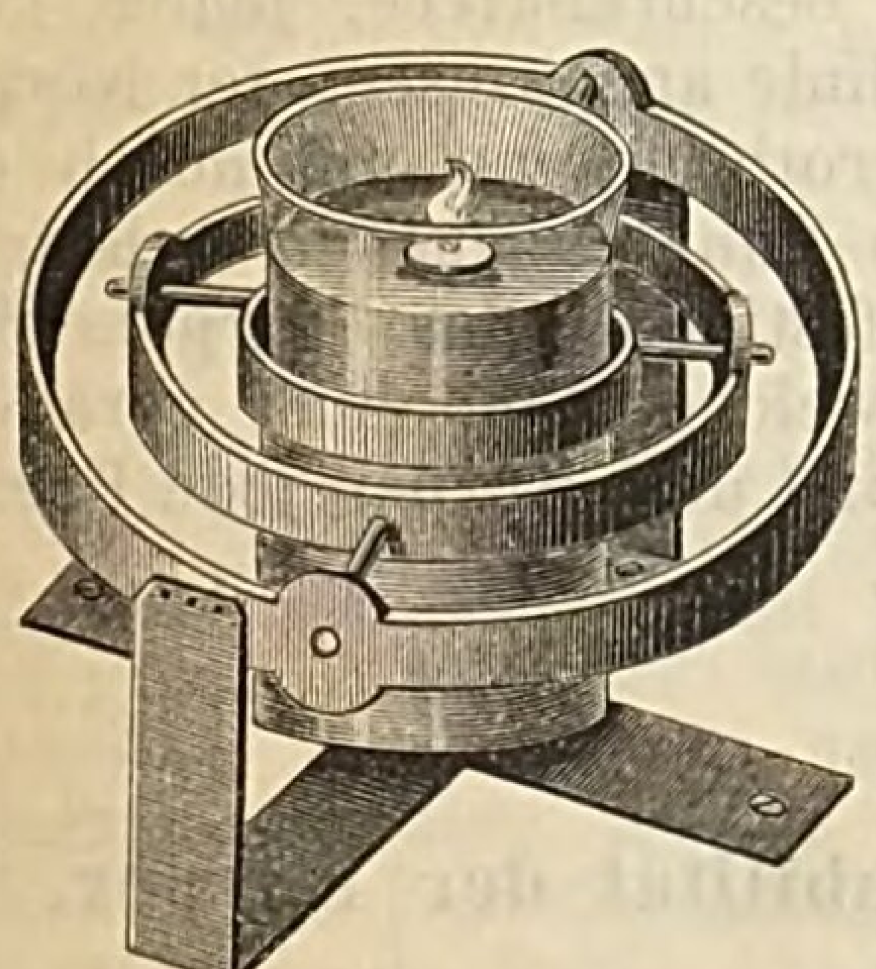
Erkl. 180. Die Gesetze des Gleichgewichts können auch auf solche Körper angewendet werden, welche an einer horizontalen Drehachse — anstatt nur in einem Punkt — befestigt sind.

Antwort. Um die drehende Bewegung eines Körpers um eine horizontale Achse[1]) dem Einfluss der Schwerkraft zu entziehen, ist es nur nötig, den Schwerpunkt in die Drehungsaxe zu bringen. So verlängert man z. B. bei grossen Turmuhren die schweren Zeiger etwas über die Drehungsachsen hinaus und bringt an dieser Verlängerung eine Verzierung an, durch deren Gewicht der gemeinschaftliche Schwerpunkt in die Drehungsachse des Zeigers fällt. Ebenso befestigt man häufig an solchen Maschinenteilen, welche sich um eine Achse drehen müssen, besondere Gewichtsstücke zu dem Zweck, dass der Schwerpunkt des ganzen Systems in die Drehungsachse fällt.

[1]). Siehe Erkl. 180

Frage 125. Wodurch wird die Drehung eines Körpers in jeder beliebigen Ebene und ein Ruhen desselben in jeder möglichen Lage erreicht?

Figur 197.



Antwort. Die Drehung eines Körpers in mehreren oder in jeder beliebigen Ebene und ein Ruhen desselben in jeder möglichen Lage wird dadurch erreicht, dass man den Körper in Ringen aufhängt, deren Achsen rechtwinklig zu einander stehen und deren Richtungen den Schwerpunkt des Körpers oder doch die Schwerlinie schneiden. Oft wird dann der Schwerpunkt der unterstützenden Achse durch eine zweite und auch wohl noch mehrere Achsen, die in verschiedenen Ebenen liegen, wieder unterstützt, wie z. B. die Mittagsfernröhre, die astronomischen Kreise, Schiffskompass und Schiffslampe. So hängt die Schiffslampe (siehe Fig. 197) in einem Ring, dessen Achse in einem zweiten Ring liegt, der ebenfalls um eine wagrechte, auf der vorigen sich senkrecht kreuzenden Achse drehbar ist. Der Schwerpunkt des Apparats liegt unterhalb der Ringe und dreht dieselben bei jeder Schwankung des Schiffes so, dass die Lampe oder der Kompass immer normal hängt.

Frage 126. Welche dreifache Art der Unterstützung ist im allgemeinen bei einem Körper möglich, und was gilt in jedem einzelnen Fall von seinem Gleichgewichts- oder Ruhezustand?

Antwort. Ausser in einem Punkt kann die Unterstützung eines Körpers auch in einer Linie bestehen, und am häufigsten besteht dieselbe aus einer Fläche. Immer aber findet stabile Ruhe statt, wenn Stützpunkt, Stützlinie oder Stützfläche höher liegen als der Schwerpunkt, so

dass derselbe nach Veränderung seiner Lage immer wieder in dieselbe zurückkehrt[1]). Labile Ruhe findet statt, wenn Stützpunkt, Stützlinie oder eine sehr kleine Stützfläche tiefer liegen als der Schwerpunkt, so dass letzterer nach jeder Veränderung seiner Lage nicht wieder in dieselbe, sondern in eine ganz andere übergeht, und indifferente Ruhe findet statt, wenn der Stützpunkt im Schwerpunkt liegt oder die Stützlinie (Achse) durch den Schwerpunkt geht, so dass der Körper in jeder veränderten Lage in Ruhe bleibt.

[1]) Siehe Erkl. 181.

Erkl. 181. Stabile Ruhe findet auch statt, wenn die Stützfläche von entsprechender Grösse tiefer liegt als der Schwerpunkt (wie z. B. bei Schränken, Tischen und Stühlen) und wenn durch eine etwaige Aenderung in der Stellung des Körpers ein Steigen des Schwerpunktes bedingt wird. (Weiteres hierüber findet sich in dem folgenden Abschnitt „Ueber die Standfestigkeit oder Stabilität der Körper.“)

Frage 127. Was gilt von der Bewegungsfreiheit eines Körpers, wenn derselbe a) in einem Punkt, b) in zwei und c) in drei Punkten befestigt ist?

Antwort. Verhindert man die Bewegbarkeit eines Punktes des starren Körpers, so kann letzterer zwar noch unendlich viele Lagen einnehmen, jedoch nicht mehr jede beliebige Lage. Seine Bewegungsfreiheit ist derart beschränkt, dass jedem seiner Punkte eine Kugelfläche angewiesen ist, die dieser Punkt nicht mehr verlassen kann.

Sind zwei Punkte des starren Körpers unbeweglich, so ist die Bewegungsfreiheit eine noch beschränktere, jedem Punkt ist eine Kreislinie angewiesen, der Körper kann nur noch rotieren um die durch die festgehaltenen Punkte gehende Achse.

Die Befestigung des Körpers in drei Punkten, welche nicht einer geraden angehören, nimmt dem Körper jede Freiheit der Bewegung.

Erkl. 182. Ist ein Körper durch zwei in derselben senkrechten Schwerlinie liegende Punkte unterstützt, so findet hinsichtlich der Verteilung des Drucks auf die beiden Befestigungspunkte eine Unbestimmtheit statt, welche nur dann verschwindet, wenn zugleich die Art der Befestigung genau bekannt ist. Denn die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen schreiben für diesen Fall nur vor: dass die algebraische Summe der beiden aufwärts wirkenden Widerstände gleich dem abwärts wirkenden Gewicht des Körpers sein muss, lassen also die Art der Druckverteilung unentschieden.

b. Ueber die Standfestigkeit oder Stabilität der Körper.

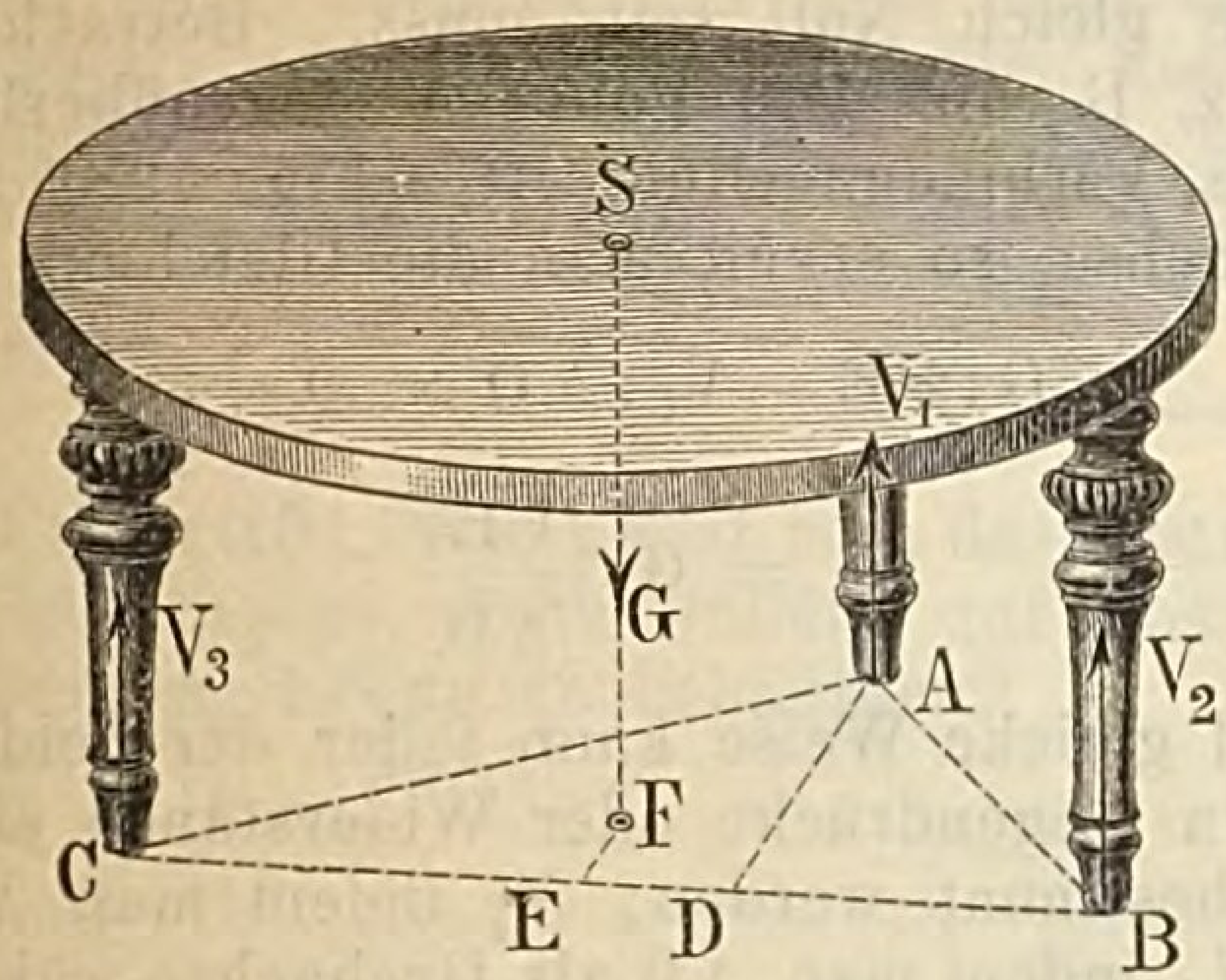
Frage 128. In welcher zweifachen Weise kann ein Körper unterstützt sein, der auf einer horizontalen ebenen Unterlage ruht?

Antwort. Wenn ein Körper auf einer horizontalen ebenen Unterlage ruht, so kann eine ganze Fläche, oder es können auch nur einzelne Punkte unterstützt sein wie bei dem Dreifuss, bei Tischen, Stühlen, Wagen, Schränken etc. In letzterem Fall kann man diese Punkte oder einen Teil derselben durch gerade Linien immer so verbinden, dass ein Dreieck, Viereck oder Vieleck entsteht, welches keine einspringenden Ecken hat, in welchem also überstumpfe Winkel nicht vorkommen; es können dabei wohl Punkte übrig bleiben, die innerhalb der entstandenen Figur liegen und bei der folgenden Betrachtung unberücksichtigt bleiben können.

Erkl. 183. Die Stützfläche eines jeden auf einer wagerechten Unterlage stehenden Körpers wird durch die kürzeste Linie eingeschlossen, welche alle unterstützten Punkte umschliesst.

Frage 129. Welche Bedingung muss erfüllt werden, wenn ein Körper auf einer horizontalen Ebene feststehen soll?

Figur 198.



Erkl. 184. Ein Körper ruht am vollkommensten, wenn alle von den Punkten seiner Masse herabgehenden senkrechten Linien lotrecht auf der unterstützten Fläche stehen; da aber starre Körper ihre Gestalt nicht ändern können, so genügt es schon, wenn alle von der Grenze einer durch den Körper gelegten horizontalen Ebene herabgehenden vertikalen Linien lotrecht auf die unterstützende Ebene fallen. Statt die Grenze der auf diese Weise entstandenen Figur in allen Punkten zu unterstützen, genügt es in Gemässheit der angenommenen Starrheit und Unbiegsamkeit der begrenzenden Linien, wenn die Unterstützung nur in einigen Punkten stattfindet, deren Zahl jedoch nicht weniger als drei sein darf, weil durch eine geringere Zahl keine Fläche begrenzt wird, die Unterstützung aber in der Wirklichkeit weder durch einen Punkt noch durch eine Linie gegeben werden kann. Durch drei Punkte lässt sich aber in jeder Neigung eine Ebene legen, weswegen ein in drei Punkten unterstützter Körper (das Herabgleiten desselben nicht berücksichtigt) in jeder Ebene ruhen wird, sobald seine senkrechte Schwerlinie innerhalb der Fläche liegt, welche durch die drei Unterstützungspunkte gebildet wird. Es folgt jedoch hieraus nicht, dass eine dreieckige Fläche am vollkommensten unterstützt, vielmehr wird die Unterstützung um soviel vollständiger, je grösser die Menge der senkrechten Schwerlinien ist, die von gleichviel wiegenden einzelnen Massen des Körpers herabgehend innerhalb derjenigen Linien fallen, durch welche man die äussersten unterstützenden Punkte verbinden kann.

Antwort. Soll ein Körper feststehen, so muss in jedem Fall sein Gewicht, das ist die Kraft G aufgehoben werden. Bei der Flächenunterstützung muss das durch den Schwerpunkt gehende Lot die Unterstützungsfläche schneiden. Sind jedoch nur einige Unterstützungspunkte vorhanden, so muss das durch den Schwerpunkt gehende Lot durch einen Punkt innerhalb des Drei- Vier- oder Vielecks gehen, welches man durch geradlinige Verbindung der äussersten Unterstützungspunkte erhält.

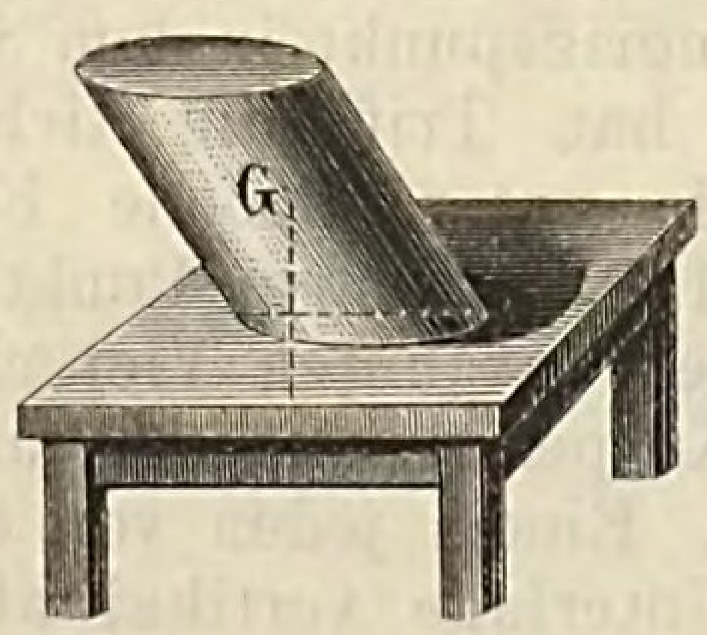
Begründung: Die Wirkung der Schwere auf den Körper reduziert sich durch Zusammensetzung der einzelnen Molekulargewichte schliesslich auf eine Kraft, welche gleich dem Gewicht G des Körpers ist und die ihren Angriffspunkt in dem Schwerpunkt S desselben hat. Trifft die Richtung dieser Kraft G die unterstützende Ebene ABC (siehe Fig. 198) in einem Punkt F, welcher innerhalb des erwähnten Vierecks liegt, so bleibt der Körper stehen, wie man ihn auch stellen mag. Einem jeden von dem Körper auf seine Unterlage vertikal abwärts ausgeübten Druck wirkt nämlich ein gleicher Gegendruck von unten nach oben entgegen; aus allen diesen von den einzelnen Stützpunkten A, B, C ausgeübten Pressungen V_1, V_2, V_3 setzt sich eine einzige, aufwärts gerichtete Mittelkraft zusammen, deren Angriffspunkt unter der obigen Voraussetzung immer in einem Punkt F liegen muss, der sich innerhalb des aus den Stützpunkten gebildeten Vielecks befindet. Geht nun die Richtung der das Gewicht des Körpers darstellenden Kraft, welche eine durch seinen Schwerpunkt gezogene Vertikallinie ist, durch diesen Punkt F innerhalb des genannten Vielecks, so heben sich die beiden Kräfte, die Schwerkraft und der aufwärts gerichtete Druck der Stützfläche, einander auf, und der Körper verhält sich so, als ob er der Wirkung der Schwerkraft entzogen wäre.

Wenn dagegen die durch den Schwerpunkt S des Körpers gezogene Vertikallinie SF die Stützfläche in einem Punkte trifft, der ausserhalb des aus den Stützpunkten gebildeten Vielecks liegt, so muss die Schwerkraft, die in diesem Falle nicht durch eine gleiche Gegenkraft aufgehoben wird, den Körper umwerfen und ihn um eine seiner Kanten soweit drehen, bis er die soeben bezeichnete Lage angenommen hat.

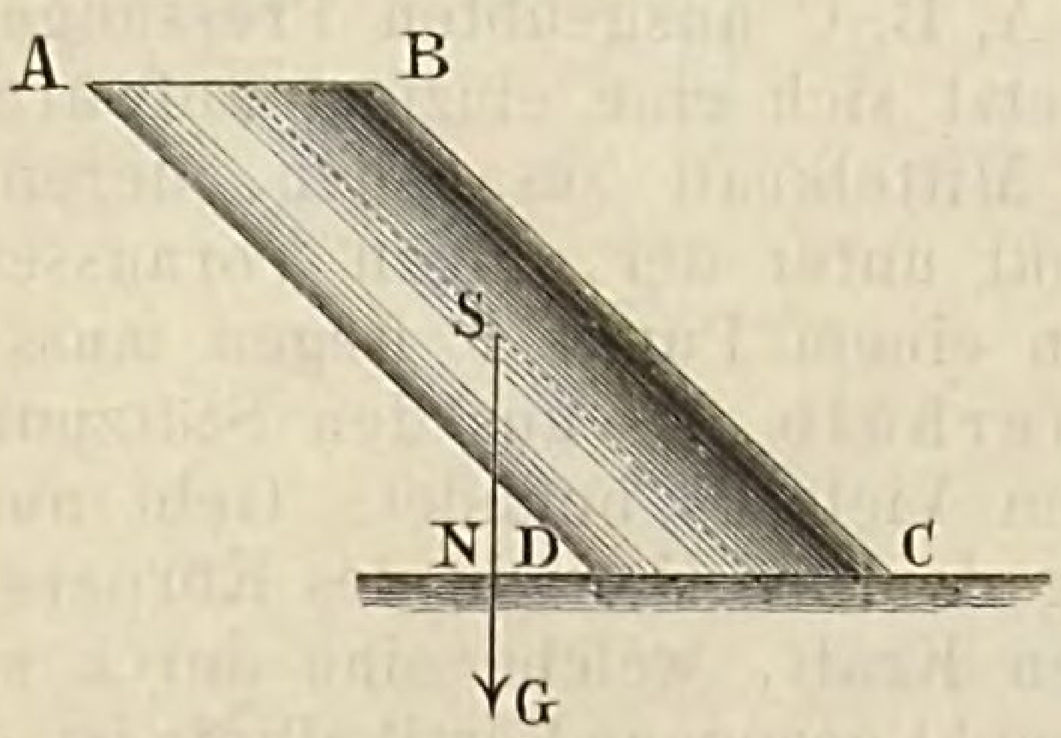
Frage 130. Wie lässt sich der von einem Stützpunkt A (siehe Fig. 198) geleistete Gegendruck bestimmen, und was würde der Fall sein, wenn die senkrechte Schwerlinie in den Umfang des begrenzenden Dreiecks, (resp. Vier- oder Vielecks) oder gerade darüber hinausfiele?

Erkl. 185. Solange also das vom Schwerpunkt gefällte Lot innerhalb des Umfangs der Unterstützungsfläche auf letztere trifft, solange verharrt der Körper im Zustand der Ruhe, selbst wenn derselbe schief stehen sollte wie der mit einer seiner Grundflächen auf einem Tisch stehende Cylinder (Fig. 199). Ist jedoch der Cylinder, wie in Fig. 200 so geneigt, dass die senkrechte Schwerlinie SG die Stützfläche CD nicht trifft, so muss er notwendigerweise umfallen.

Figur 199.



Figur 200.



In dieser Hinsicht haben die schiefen Türme zu Pisa und Bologna die Aufmerksamkeit mehrerer Mathematiker in Anspruch genommen. Der letztere hängt so stark über, dass ein Lot vom oberen Rand herabgelassen unten 4,7 m von der Basis absteht. Aus der Anordnung seiner Teile, namentlich daraus, dass eine überwiegende Menge seiner Masse auf die der Neigung entgegengesetzte Seite gebracht ist, hat man geschlossen, der Baumeister habe ihn mit Fleiss als ein architektonisches Paradoxon (siehe Erkl. 186) so herstellen lassen. Nach anderer Meinung aber haben sich die Türme gesenkt.

Erkl. 186. Das Wort Paradoxon kommt vom griech. pará, gegen, und dóxa, die Meinung, und bezeichnet etwas Lehrwidriges, anscheinend widersinniges, befremdliches, auffallendes.

Antwort. Um den vom Stützpunkt A geleisteten Widerstand oder Gegendruck V_1 zu bestimmen, benutzt man den Satz, dass die algebraische Summe der statischen Momente gleich Null sein muss. Betrachtet man z. B. die dem Punkt A gegenüberliegende Verbindungslinie $\overline{BC}$ (Fig. 198) als Drehachse, so erhält man die Gleichung

$$G \cdot \overline{FE} - V_1 \cdot \overline{AD} = 0$$

oder:

$$V_1 = G \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{AD}}$$

Auf gleiche Weise kann jeder der beiden andern Gegendrücke oder Widerstände einzeln bestimmt werden; V_2 indem man $\overline{AC}$ und V_3 indem man $\overline{AB}$ als Drehachse wählt. Wenn der Hebelarm

$$\overline{EF} = 0$$

wäre, d. h. wenn der Fusspunkt der senkrechten Schwerlinie in die Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC fiele, so würde nach vorstehender Gleichung auch

$$V_1 = 0$$

sein, und wenn $\overline{FE}$ negativ wäre, d. h. wenn der Fusspunkt ganz ausserhalb des Dreiecks läge, so würde V_2 negativ werden. In letzterem Fall würde es in dem Punkt A eines abwärts wirkenden Gegendrucks bedürfen, um den Körper im Gleichgewichtszustand zu erhalten, und wenn ein solcher fehlte, so würde der Körper umfallen.

Bedingung des Gleichgewichts bei der in Fig. 198 dargestellten Art der Unterstützung ist also: dass der Fusspunkt der Schwerpunktsvertikalen nicht ausserhalb des aus den Stützpunkten gebildeten Dreiecks liegt. Fällt derselbe in den Umfang des Dreiecks, so ist das Gleichgewicht ein labiles; das geringste Uebergewicht an dieser Seite wird alsdann hinreichen, den Körper ganz umzuwerfen. Wenn dagegen der Fusspunkt im Inneren des Dreiecks liegt, so würde es, um den Körper umzukippen, d. h. um eine der Dreieckseiten zu drehen, einer Kraft bedürfen, deren statisches Moment in Bezug auf diese Drehachse im Beginn der Drehung mindestens ebenso gross sein müsste als das statische Moment des Gewichtes G in Bezug auf diese Achse. Im letzteren Falle war also der Gleichgewichtszustand des Körpers ein stabiler, und als Mass für diese Sta-

Erkl. 187. Dreht man einen Stuhl oder Tisch nur wenig um eine seiner Stützkanten und überlässt ihn dann sich selbst, so fällt er unter der blossen Einwirkung seines Gewichts wieder in seine erste Stellung zurück. Entfernt man ihn aber aus dieser Lage so weit, dass die senkrechte Schwerlinie genau durch diese Stützkante geht und überlässt ihn dann sich selbst, so fällt er nicht mehr in seine anfängliche Stellung zurück, sondern er bleibt in dieser Lage stehen; es bedarf jedoch nur des geringsten Anstosses nach der einen oder andern Richtung, um zu bewirken, entweder, dass er in seine ursprüngliche Stellung zurückfällt, oder dass er ganz umstürzt.

bilität kann das statische Moment des Gewichts gelten in Bezug auf diejenige Dreieckseite, welche beim Umkippen die Drehachse bilden würde. Dieses Moment wird deshalb das Stabilitätsmoment des Körpers in Bezug auf die betreffende Seite genannt. Bei dem in Fig. 198 dargestellten Fall würde z. B., wenn ein Umkippen des Körpers nach der Seite BC hinüber in Frage käme, das Produkt $G \cdot \overline{FE}$ als das Stabilitätsmoment des Körpers zu betrachten sein.

Frage 131. Wie nennt man das Bestreben eines Körpers, seine Stellung auf einer horizontalen Ebene zu behaupten?

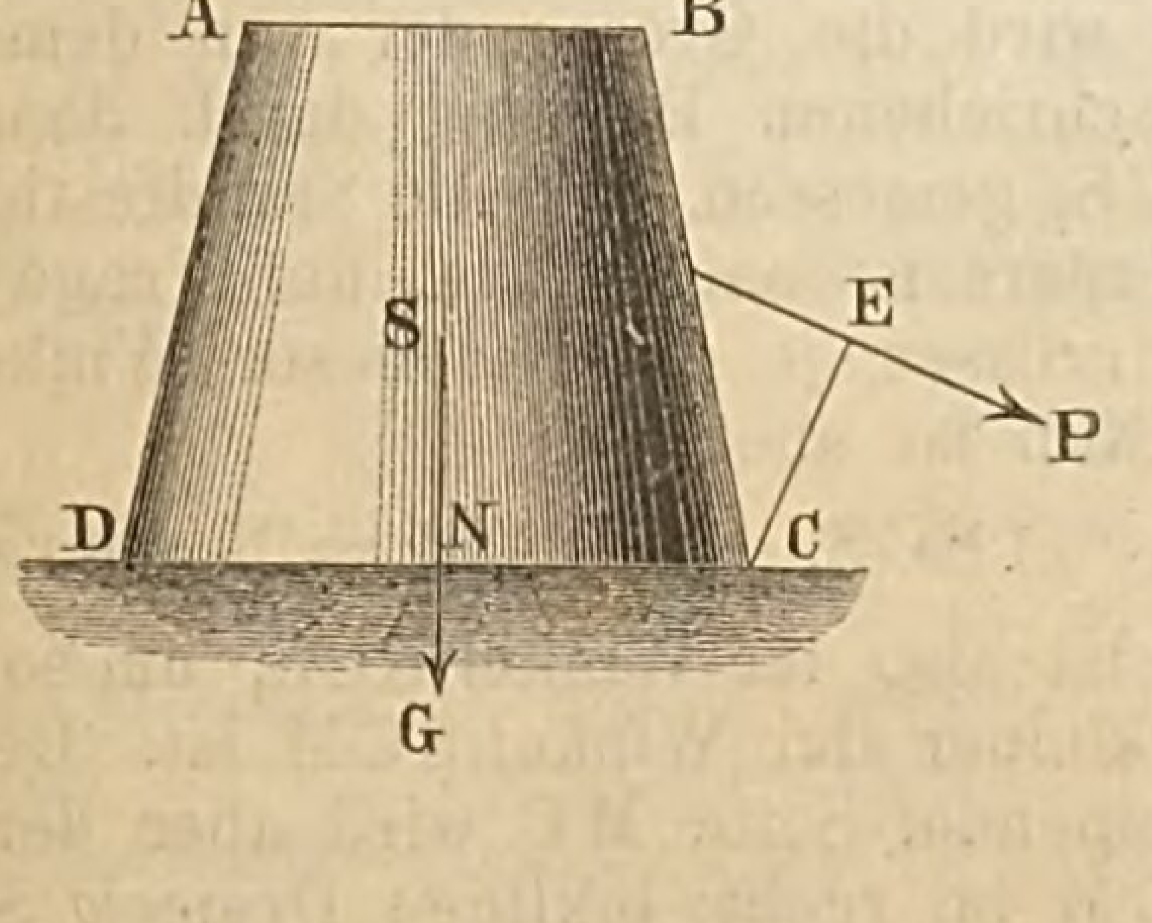
Antwort. Das Vermögen oder Bestreben eines Körpers, seine Stellung auf einer horizontalen Stützebene der Wirkung der Schwerkraft gegenüber selbständig zu behaupten, nennt man die Standfähigkeit, Standfestigkeit oder Stabilität des Körpers.

Frage 132. Wie lässt sich die Grösse der Standfestigkeit eines Körpers prüfen?

Antwort. Liegt ein Körper auf einer Ebene, so kann er unter Anwendung einer entsprechend grossen Kraft aus dieser Ruhelage durch Drehung um eine seiner Unterstützungskanten oder Kippkanten enfernt werden. Je grösser die Kraft ist, welche angewandt werden muss, um den Körper soweit umzudrehen, dass er ganz umfällt, und je grösser die Drehung ist, die der Körper von seiner Ruhelage aus beschreibt, bis er in die Lage kommt, wo er eben von selbst umzufallen beginnt, desto grösser ist die Standfestigkeit od. Stabilität des Körpers.

Frage 133. Welchen Einfluss hat das Gewicht eines Körpers auf seine Standfestigkeit?

Figur 201.



Antwort. Je grösser das Gewicht eines Körpers ist, um so grösser ist unter sonst gleichen Umständen seine Standfestigkeit.

Beweis: Denken wir uns eine, etwa an einem Tau ziehend wirkende Kraft P (Fig. 201), welche den Körper ABCD umzuwerfen sucht, vorausgesetzt, dass ein Verschieben des Körpers auf seiner Unterlage auf irgend eine Weise verhindert ist, so muss die Kraft P den Körper um die Kante C drehen, während das im Schwerpunkt S angreifende Gewicht G des Körpers senkrecht abwärts und der Drehung entgegenwirkt. Fällt man von C das Lot $\overline{CE}$ auf die Richtung der Kraft P, so sind $\overline{CN}$ und $\overline{CE}$ die Hebelarme der Kräfte G und P, und

Erkl. 188. Wird in nebenstehender Gleichung der Arm der Kraft = 1 gesetzt, so ist:

$$P = G \cdot \overline{CN}$$

und dieses Produkt aus dem Gewicht des Körpers und dem senkrechten Abstand seiner Schwerlinie von der Drehungskante nennt man „Mass der Stabilität“, „Stabilitätsmoment“ oder geradezu auch „Stabilität.“

da für den Fall des Gleichgewichts die statischen Momente beider einander gleich sein müssen, so erhalten wir die Gleichung:

$$P \cdot \overline{CE} = G \cdot \overline{CN}$$

oder:

$$P = G \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}}$$

Ist P nur wenig grösser als das Produkt $G \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}}$, so fällt der Körper um. Aus obiger Gleichung folgt, dass P um so grösser sein muss, je grösser G ist.

Frage 134. Welchen Einfluss hat die Grundfläche oder Basis eines Körpers auf seine Standfestigkeit?

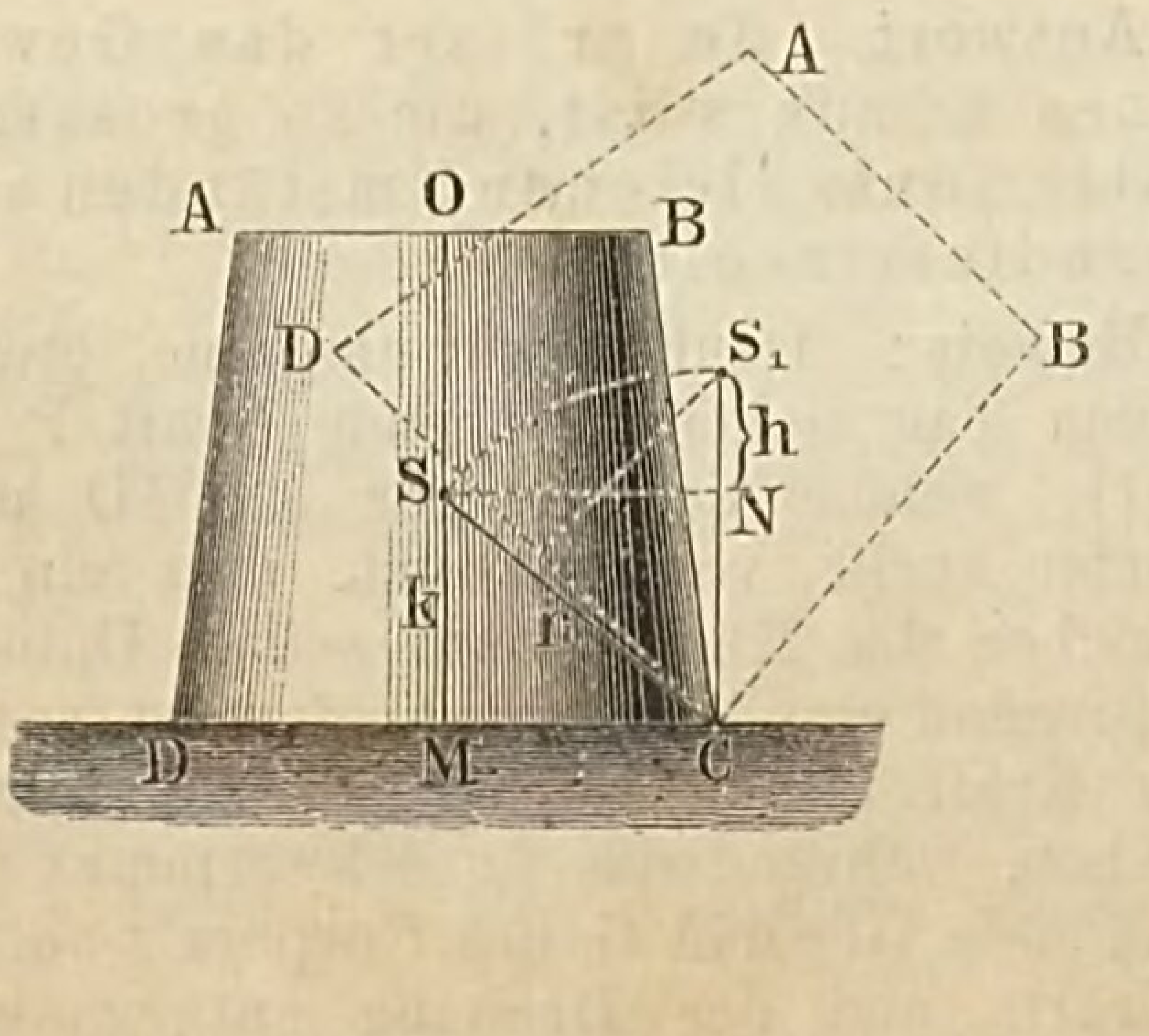
Erkl. 189. Der Bruch $\frac{\overline{CN}}{\overline{CE}}$ wird zwar auch um so grösser, je kleiner bei gleichbleibendem Zähler $\overline{CN}$ der Nenner $\overline{CE}$ wird, woraus allerdings folgt, dass die Kraft P um so wirksamer ist, je höher ihr Angriffspunkt liegt; allein mit der absoluten Standfestigkeit des Körpers hat diese Entfernung $\overline{CE}$ als nicht zum Körper gehörig nichts zu thun. Dagegen ergibt sich aus nebenstehender Formel, dass die anzuwendenden Kräfte, welche den Körper umzustürzen suchen, bei einem und demselben Körper sich umgekehrt verhalten wie die Höhen, in denen dieselben angreifen. (Siehe Antw. auf Frage 138.)

Antwort. Je breiter die Unterstützungsfläche oder Basis eines Körpers ist, um so grösser ist seine Standfestigkeit.

Beweis. Denkt man sich in obigem Ausdruck für P das Gewicht G und den Nenner $\overline{CE}$ unveränderlich, so muss die Kraft P um so grösser werden, je grösser der Zähler $\overline{CN}$ wird, d. h. je weiter der Punkt N, in welchem die senkrechte Schwerlinie die Stützfläche schneidet, von der Drehkante C entfernt ist.

Frage 135. Welchen Einfluss hat die Lage des Schwerpunkts eines Körpers auf dessen Standfestigkeit?

Figur 202.



Antwort. Je näher der Schwerpunkt S eines Körpers der Unterstützungsfläche desselben liegt, um so grösser ist die Standfestigkeit desselben.

Beweis. Dreht man den Körper ABCD (Fig. 202) um die Kante C bis in die punktiert gezeichnete Lage ABCD, in welcher die senkrechte Schwerlinie S_1C genau die Drehkante trifft und der auf dem Kreisbogen SS_1 von S nach S_1 gerückte Schwerpunkt senkrecht über der Kippkante C liegt, so wird die Grösse der von dem Körper beschriebenen Drehung durch den Winkel SCS_1 gemessen, und die Standfestigkeit des Körpers ist nach Antw. auf Frage 132 um so grösser, je grösser dieser Winkel ist.

Nun ist aber

$$\sphericalangle SCS_1 + \sphericalangle SCM = R \text{ oder } 90^0$$

es ist also der Winkel SCS_1 um so grösser, je kleiner der Winkel SCM ist. Bei gleichbleibender Seite MC wird aber der Winkel SCM im rechtwinkligen Dreieck SCM um

so kleiner, je näher S bei M liegt. Es wird daher Winkel SCS_1 oder die Drehung des Körpers, also auch dessen Stabilität um so grösser, je näher der Schwerpunkt S der Stützfläche liegt.

Frage 136. Wie heisst nach Antw. auf Frage 133—135 das Gesetz der Stabilität?

Antwort. Das Gesetz der Stabilität heisst:

Die Stabilität eines Körpers ist um so grösser, je schwerer derselbe ist, je breiter seine Basis ist, und je tiefer sein Schwerpunkt liegt.

Frage 137. Was versteht man unter dynamischer und statischer Stabilität eines Körpers?

Erkl. 190. Wenn von dem Stabilitätsmoment und der dynamischen Stabilität eines Körpers schlechtweg die Rede ist (ohne dass die Drehkante dabei bezeichnet wird), so sind damit in der Regel die kleinsten von allen Werten gemeint, welche diese Grössen in Bezug auf die verschiedenen Drehkanten annehmen können.

Antwort. Die zum Umkippen eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit wird die dynamische Stabilität des Körpers genannt im Gegensatz zu der oben erwähnten Grösse:

$$P = G \cdot \overline{CN}$$

welche statische Standfestigkeit genannt wird.

Frage 138. Wie gross ist die dynamische Stabilität eines Körpers?

Erkl. 191. Eine mechanische Arbeit besteht darin, dass man eine Last oder einen bestimmten Widerstand auf einem gewissen Weg überwindet und wird gemessen durch das Produkt aus Widerstand mal Weg, wobei als Längeneinheit des Weges das Meter und als Krafteinheit der Last oder des Widerstands das Kilogramm dient, so dass als Masseinheit irgend einer mechanischen Arbeit das Meterkilogramm anzusehen ist, worunter man diejenige mechanische Arbeit versteht, welche erforderlich ist, um 1 kg Gewicht 1 m hoch zu heben. Spricht man also z. B. von einer mechanischen Arbeit von 72 Meterkilogramm, so ist das so viel Arbeit als zum Heben von

72 kg auf 1 m Höhe oder zum Heben
von 36 „ „ 2 „ „ „ „ „
„ 24 „ „ 3 „ „ „ „ „
„ 12 „ „ 6 „ „ u. s. w. erforderlich ist.

Antwort. Die dynamische Stabilität eines Körpers ist gleich dem Produkt aus dem Gewicht G des Körpers in diejenige Höhe h, um welche der Schwerpunkt ansteigt, während der Körper in die nächste stabile Gleichgewichtslage übergeführt wird.

Beweis. Soll der Körper ABCD (Fig. 202) um die Kante C gedreht und umgestürzt werden, so muss sein Schwerpunkt S in die Lage von S_1 senkrecht über C gebracht werden, d. h. man muss den Schwerpunkt oder vielmehr das in demselben vereinigt gedachte Gewicht G um den Weg S_1N heben, vorausgesetzt, dass SN parallel DC läuft. Folglich ist die zu leistende Arbeit

$$A = G \cdot S_1N$$

oder wenn man die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehkante mit r bezeichnet, und seine Höhe über CD mit k, so ist:

$$S_1N = r - k = h$$

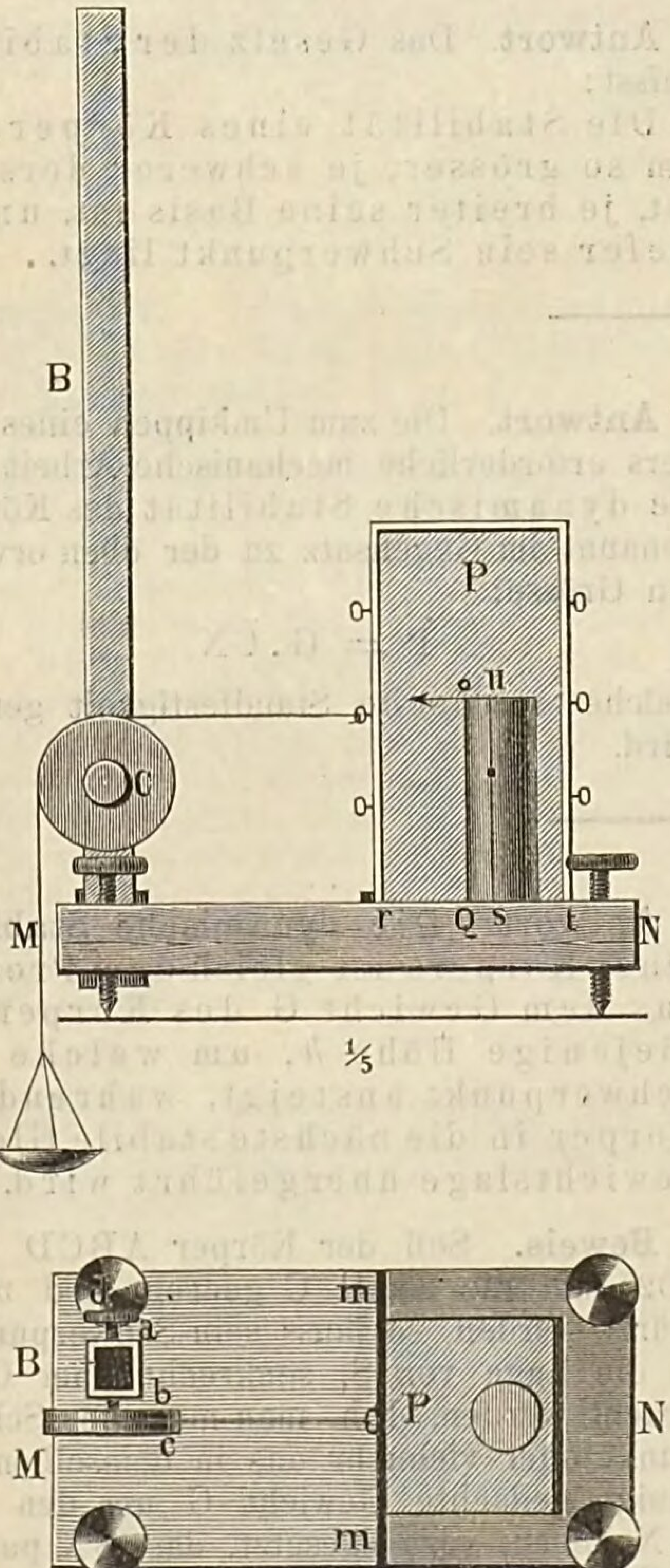
und demnach die zu leistende Arbeit[1]):

$$A = G \cdot h$$

[1]). Siehe Erkl. 191.

Frage 139. Wie lassen sich die vorerwähnten Gesetze der Standfestigkeit experimentell beweisen?

Figur 203 a und b.



Antwort. Zum experimentellen Beweis der Gesetze der Standfestigkeit benutzt man am besten den in Fig. 203a und b im Grund- und Aufriss abgebildeten Apparat, bestehend aus einem mit vier Stellschrauben versehenen Brett MN, welches den senkrechten vierkantigen Eisenstab B trägt, an dem sich die Hülse *a b* mit der Rolle *c* verschieben und durch die Druckschraube *d* beliebig festklemmen lässt. In der Mitte, quer über dem Brett, ist eine dünne Messingleiste *mm* befestigt, gegen welche man das aus Weissbuchenholz verfertigte Prisma P stellt. Letzteres ist von seiner Grundfläche aus bis zur Mitte durchbohrt und diese cylindrische Bohrung mit Blei ausgegossen, welches nach seinem Erkalten von unten etwas festgehämmert wird.

Man bestimmt nun durch Auflegen auf die scharfe Kante eines Lineals die Lage des Schwerpunkts dieses Körpers, welcher durch das Blei aus der Mittellinie OQ etwa nach *ns* und aus der Mitte der Höhe tiefer gerückt ist. Die senkrechten Mittellinien von zwei einander gegenüberliegenden Flächen (in der Fig. 203 die der linken und rechten) werden in vier gleiche Teile geteilt und auf jedem Teilpunkt wird ein Häkchen befestigt, an welches eine über die Rolle *c* laufende Schnur mit einer Wagschale gehängt wird. Die Rolle wird so gestellt, dass die Schnur horizontal läuft.

Man kann nun aus der Entfernung der senkrechten Schwerlinie *ns* von derjenigen Kante, über welche das Prisma geworfen werden soll, aus der Entfernung des Angriffspunkts der Kraft von derselben Kante und aus dem ganzen Gewicht des Körpers die Kraft, d. h. dasjenige Gewicht berechnen, welches nach dem Gesetz der Standfestigkeit an der Schnur angebracht werden muss, um in jeder der verschiedenen Stellungen, die der Körper haben kann, seine Standfestigkeit zu überwinden, wenn der Haken der Schnur an irgend einem der sechs Häkchen befestigt wird, wobei man das Gewicht der Wagschale mitrechnet.

Frage 140. Welche alltäglichen Erscheinungen beweisen uns, dass das Gewicht eines Körpers von wesentlichem Einfluss auf seine Standfestigkeit ist?

Antwort. Dass das Gewicht eines Körpers von wesentlichem Einfluss auf seine Standfestigkeit ist, ergibt sich aus folgenden Erscheinungen:

Ein mit schweren Gegenständen, Metall, Sand etc. beladener Wagen fällt nicht so

leicht um, als wenn er ebenso hoch mit leichten Stoffen, Heu, Wolle etc. beladen wird. Säulen und Monumente von Stein und Eisen fallen nicht so leicht um als solche von Holz. Ein gefülltes Gefäss ist schwerer umzuwerfen als ein leeres.

Frage 141. Welche Erscheinungen beweisen uns, dass die Stabilität eines Körpers mit der Grösse seiner Stützfläche zunimmt?

Antwort. Tische und Stühle mit ausgeschweiften Füssen stehen sicherer als solche mit nichtgeschweiften Füssen. Ein grosser Tisch kann auf einem in seinem Mittelpunkt angebrachten dünnen Pfeiler nicht fest stehen; wenn aber dieser Pfeiler in einen Dreifuss endigt, so hat der Tisch dieselbe Stabilität, als hätte er drei Füsse. Wagen mit breiter Spurweite fallen weniger leicht um als schmalspurige. Kandelaber, Kleiderstöcke und andere Möbel von grösserer Höhe werden mit grosser Grundfläche versehen. — Vierbeinige Tische stehen im allgemeinen fester als dreibeinige. — Ein Buch liegt auf seiner breiten Fläche viel sicherer als wenn es aufrecht steht. — Eine umgekehrte Flasche steht auf ihrer Oeffnung weniger fest als auf ihrem Boden. — Pyramiden besitzen eine sehr grosse Stabilität.

Frage 142. Welche Erscheinungen beweisen uns, dass die Stabilität eines Körpers von der Höhenlage seines Schwerpunkts abhängt?

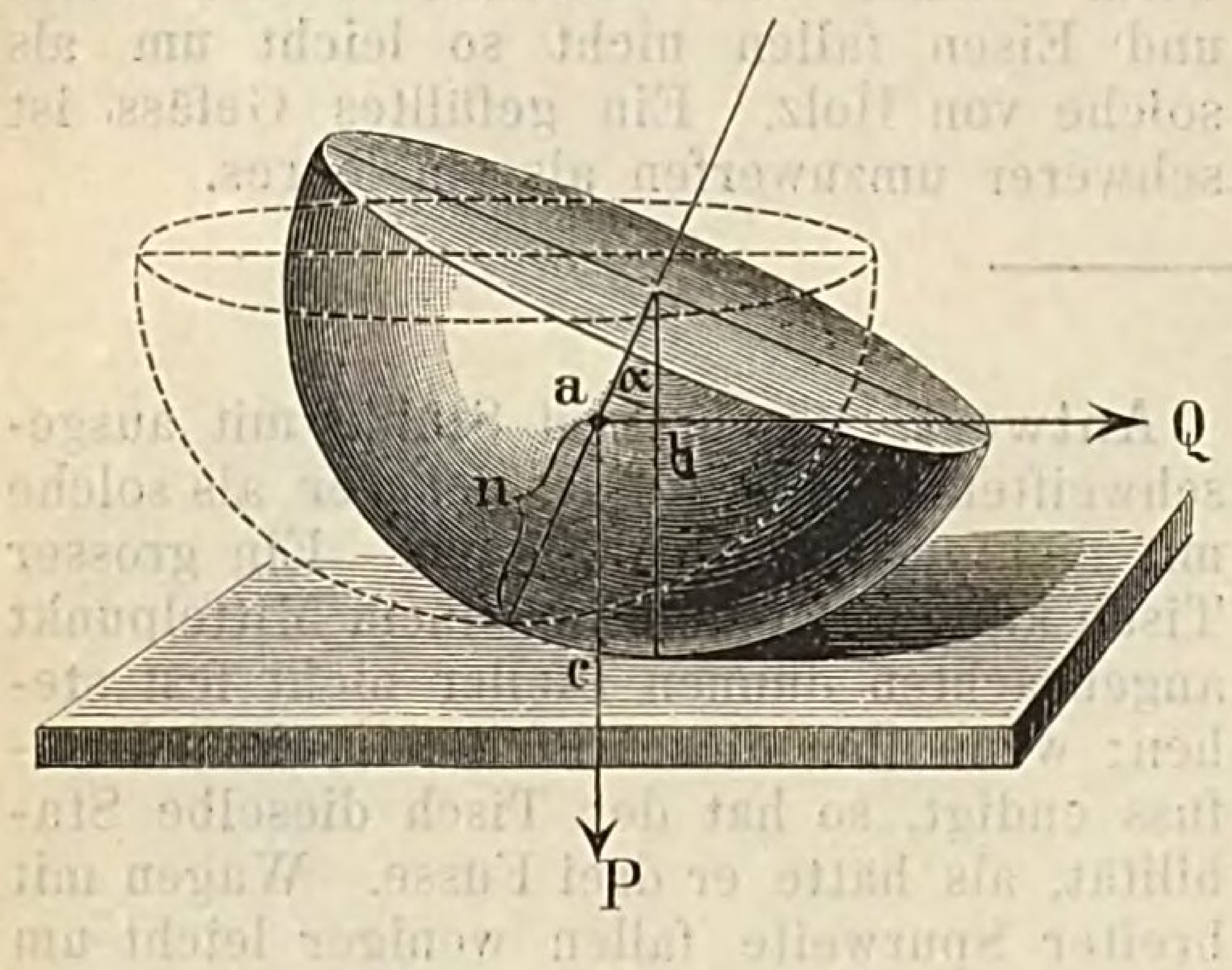
Antwort. Wagen und Schiffe schlagen leicht um, wenn sie hoch geladen sind, kleine schon wenn man sich aufrecht in dieselben stellt. Beim Beladen derselben werden deshalb die schweren Gegenstände zu unterst, die leichteren Frachtstücke dagegen zu oberst gelegt. — Die Fussgestelle von Tafellampen, Leuchtern und solchen Gegenständen, die dem Umfallen leicht ausgesetzt sind, werden mit Blei ausgegossen. — Um die Stabilität leerer Schiffe zu sichern, wendet man Ballast an.

Frage 143. Wonach beurteilt man die Stabilität eines Körpers, der mit einer gewölbten Fläche auf einer wagerechten Ebene ruht?

Erkl. 192. Da bei einem derartigen Körper bei eintretender Bewegung der Schwerpunkt steigen muss, so kehrt ein solcher Körper immer wieder in seine frühere Lage zurück, er ist im stabilen Gleichgewicht, wie z. B. Wiegen, Schaukelpferde, Mulden, Wiegemesser, Taumelbecher u. s. w.

Antwort. Ruht ein Körper mit einer gewölbten Fläche auf einer wagerechten Ebene, wie z. B. eine Kugelschale, so kann er nur dann im Zustand der Ruhe sein, wenn sein Schwerpunkt senkrecht über seinem Stützpunkt liegt. Die Stabilität eines solchen Körpers beurteilt man nach der Kraft, welche erforderlich ist, um denselben um einen bestimmten kleinen Winkel aus seiner Stellung zu bringen. Ist in letzterem Fall r der Krümmungsradius, n die Höhe des Schwerpunkts über der Stützfläche, so hat man in Bezug auf Fig. 204:

Figur 204.



Erkl. 193. Ist der in Betracht kommende Körper nicht homogen, also vielleicht eine Kugel oder Walze, in welche nahe ihrer Oberfläche an einer Stelle ein dichterer Körper, wie z. B. Blei eingesetzt ist, so wird, wenn der Schwerpunkt über dem Mittelpunkt liegt, der Körper so lange fortrollen, bis die Bleimasse die möglichst tiefste Stellung eingenommen hat. Ein solcher wird sogar, in geeigneter Stellung auf eine schiefe Ebene gebracht, bergauf rollen.

Erkl. 194. Auf den angegebenen Regeln über die Standfestigkeit beruht auch der feste Stand der Menschen und Tiere. Notwendigkeit und Erfahrung lehren die mit freiwilliger Bewegung begabten Geschöpfe, ihre Stellungen und Bewegungen der Lage des Schwerpunkts ihres Körpers anzupassen. Steht der Mensch aufrecht auf beiden Füssen, so befindet sich sein Schwerpunkt (etwa in der Mitte des Unterleibes) senkrecht über seiner Stützfläche. Steht er auf einem Fuss, so muss seine senkrechte Schwerlinie innerhalb der den Fuss unterstützenden Fläche fallen. Sein Stand ist aber um so viel sicherer und fester, je grösser das durch die Füsse gebildete Trapez (siehe Fig. 205) wird, weswegen diejenigen, die sich zum Ringen, Boxen oder Fechten hinstellen, die Füsse weit auseinanderstellen und somit die Stützfläche vergrössern. Auf Stelzen kann niemand stillstehen, weil die unterstützende Fläche ein langer, aber zu schmaler Streif ist, als dass nicht der Schwerpunkt leicht und bald darüber hinaus gerückt werden sollte.

Wenn der Mensch geht oder läuft, so hebt er abwechselnd seine Füsse auf, und der Schwerpunkt ist entweder nicht unterstützt oder er wird von einer Seite auf die andere gebracht; hierbei biegt er zugleich den Körper etwas vorwärts, damit das Bestreben des Schwerpunkts, in die Richtung der Zehen zu fallen, den Anstrengungen der Muskeln, den Körper vorwärts zu bringen, Hilfe leiste. Diese Neigung, sich

$$Q : P = \overline{ab} : \overline{ac}$$

oder:

$$Q = P \cdot \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$$

oder, da

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ao}} = \sin \alpha$$

oder:

$$\frac{\overline{ab}}{r - n} = \sin \alpha$$

also:

$$\overline{ab} = \sin \alpha \, (r - n)$$

und

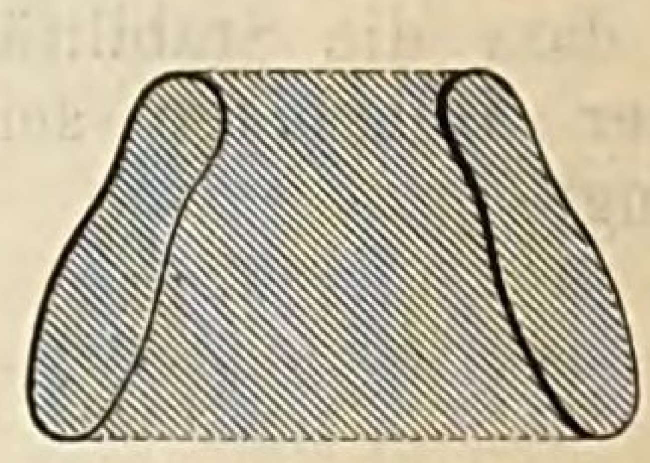
$$\overline{ac} = n$$

ist, so ist auch

$$Q = P \cdot \frac{r - n}{n} \cdot \sin \alpha$$

Die Stabilität wächst auch in diesem Fall wieder mit dem Gewicht P, mit dem Radius *r* und nimmt ab mit der Höhe *n* des Schwerpunkts.

Figur 205.



vorwärts zu beugen, nimmt mit der Geschwindigkeit der Bewegung zu, und das Fallen erfolgt unfehlbar, wenn ein unvorhergesehenes Hindernis die neue Unterstützung durch einen vorgesetzten Fuss hindert. Ohne die Biegsamkeit des Knies würde das Gehen eine weit grössere Anstrengung sein, als es wirklich ist, denn der Schwerpunkt müsste mit jedem Schritt in die Höhe gehoben werden. Die Bewegungslinie des Schwerpunkts beim Gehen ist in Fig. 206 dargestellt, sie weicht nur wenig von einer regelmässigen Horizontallinie ab, so dass also die Höhe des Schwerpunkts nur sehr unbedeutend abgeändert wird. Fehlen aber die Kniegelenke, so wie bei einem Menschen, der hölzerne Beine hat, so bewegt sich der Schwerpunkt wie in Fig. 207, so dass bei jedem Schritt das Gewicht des Körpers durch eine bedeutende Höhe gehoben wird, wodurch die Anstrengung des Gehens bedeutend vermehrt wird.

Figur 206.



Figur 207.



Beim Laufen bleibt die senkrechte Schwerlinie unverändert in der durch die Bahn gelegten senkrechten Ebene, weil die Unterstützung durch die Füsse zu schnell wechselt, als dass ein Fallen nach der rechten oder linken Seite stattfinden könnte; beim Gehen aber, insbesondere beim langsamen, wird sie abwechselnd über den einen oder anderen Fuss hingerückt, wodurch eine abwechselnde Bewegung nach beiden Seiten erfolgt. Deswegen ist es nötig, dass die Soldaten, bei denen man diesen Wechsel an den Spitzen der Bajonette wahrnimmt, mit dem nämlichen Fuss gleichzeitig antreten müssen, und auch Fussgänger diese Regel befolgen, die Arm in Arm einander sehr nahe gehen, um das Anstossen mit den Schultern zu vermeiden.

Die Lage des Schwerpunkts unseres Körpers ändert sich mit der Lage und Haltung der Glieder. Streckt man nach der einen Seite einen Arm aus, so wird hierdurch der Schwerpunkt dieser Seite näher gebracht. Wenn Tänzer, die auf einem Bein stehen, das andere wagerecht von sich strecken, so müssen sie den Körper nach der entgegengesetzten Richtung neigen, um den Schwerpunkt über den stützenden Fuss zu bringen. Bücken wir uns, um einen Gegenstand von der Erde aufzuheben, so wird der eine Fuss vorgesetzt oder das Herablassen durch Beugung der Kniee möglich gemacht. Ein Sitzender kann nicht aufstehen, ohne die Füsse mehr unter sich zu ziehen, oder durch Anwendung sonstiger, dieses ersetzender Hilfsmittel, und wenn jemand sich mit dem Kopf gegen eine Wand stützt, so dass seine Füsse mit dem Fussboden und die Richtungslinie seines Oberkörpers mit der Wand zwei rechte Winkel bilden, dann aber die Hände auf den Rücken legt, so ist es ihm unmöglich, sich aufzurichten. Ebensowenig können wir, mit dem Körper unmittelbar an einer Wand stehend, einen Fuss heben, ohne umzufallen.

Wenn wir eine Last tragen, so veranlasst uns ein natürliches Gefühl immer solche Stellungen anzunehmen, in denen der Schwerpunkt seine

gehörige Unterstützung findet. Tragen wir eine Last auf dem Rücken (oder gehen wir bergauf), so beugen wir uns nach vorn, damit die durch den gemeinsamen Schwerpunkt g gelegte Vertikallinie innerhalb der Stützfläche den Boden schneidet (siehe Fig. 208); aus demselben Grund beugen wir uns nach hinten, sobald wir eine Last vor uns tragen oder bergab gehen. Tragen wir einen mit Wasser gefüllten Eimer in der rechten Hand, so strecken wir den linken Arm aus und umgekehrt. Eine jede Last wird mit desto geringerem Aufwand von Kraft getragen, je weniger durch ihre Lage ein Ueberbiegen erfordert wird, also je gleichmässiger sie um die durch den Schwerpunkt gehende Vertikallinie verteilt ist. Aus diesem Grund lässt sich unter geeigneten Bedingungen leichter die doppelte Last auf beide Arme gleichmässig verteilt heben, als die einfache mit einem.

Da die Stehfläche eines Seiltänzers die sehr kleine und schmale Fläche ist, welche sich zwischen seinen Füssen auf dem Seile befindet, so ist es schwierig, stehend auf dem Seile den Körper in einer solchen Lage zu erhalten, dass die durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Vertikale stets die kleine Stehfläche trifft. Eine kleine Bewegung des Körpers nach rechts oder links bringt eine Verschiebung des Schwerpunkts und damit eine Verrückung der lotrechten Schwerlinie hervor. Die Kunst des Seiltänzers besteht daher darin, dass er durch vielfache Uebung die Geschicklichkeit besitzt, bei jedem Gefühl des beginnenden Umfallens sofort den Körper so zu verschieben, dass den Bedingungen der Stabilität entsprochen werde. Da die Verschiebung des ganzen Körpers schwierig ist, so bedient sich der Seiltänzer in der Regel einer langen, an beiden Enden mit Kugeln versehenen Balancierstange, deren Schwerpunkt in der Mitte liegt und durch deren Verschiebung nach rechts oder links, nach vorn oder hinten der gemeinsame Schwerpunkt des Körpers und der Stange sehr leicht um jede noch so kleine Grösse verrückt und daher lotrecht über der Stehfläche erhalten werden kann.

Figur 208.



c. Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 179. Wenn mit a, b, c resp. Höhe, Breite und Länge eines Parallelepipedons bezeichnet werden, und jeder Kubikmeter desselben γ Kilogramm wiegt, wie gross ist dann a) die statische, b) die dynamische Standfestigkeit in Bezug auf die Drehkante A (Fig. 209).

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 133 ist die statische Standfestigkeit

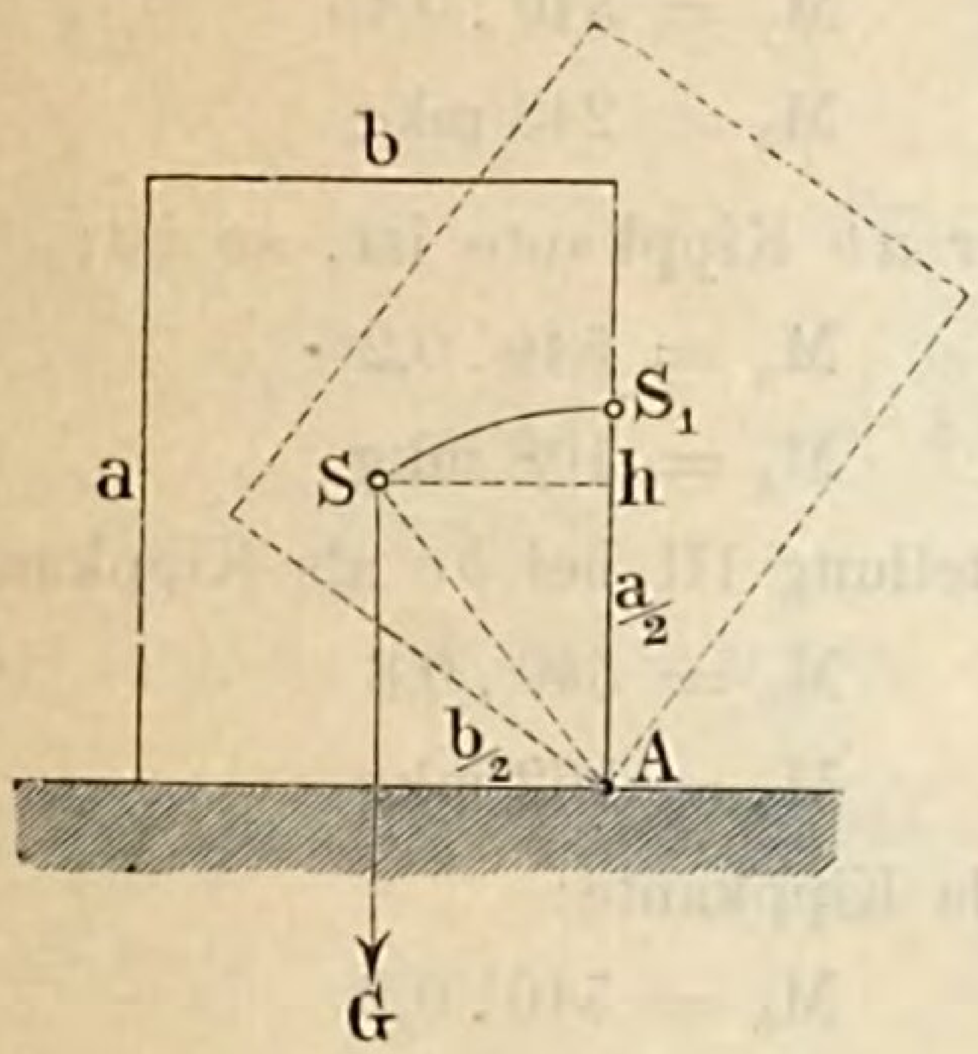
$$M = G \cdot \overline{CN}$$

In dem gegebenen Fall ist das Volumen des Körpers $= a \cdot b \cdot c$ und sein spez. Gew. $= \gamma$, folglich das Gewicht des Körpers:

$$G = a \cdot b \cdot c \cdot \gamma$$

und die Entfernung der Schwerlinie von der Kippkante ist:

Figur 209.



$$\overline{CN} = \frac{1}{2} b$$

folglich ist die statische Standfestigkeit oder das Stabilitätsmoment in Bezug auf die Kippkante A:

$$M = a . b . c . \gamma . \frac{1}{2} b$$

Nach Antw. auf Frage 138 ist die dynamische Standfestigkeit A gleich dem Gewicht des Körpers multipliziert mit der Höhe, um welche der Schwerpunkt gehoben werden muss, oder in Bezug auf Fig. 209 ist:

$$A = G . \overline{S_1 h}$$

Die Grösse $S_1 h$ ist aber noch unbekannt und muss aus den gegebenen Stücken erst berechnet werden. Nun ist:

$$\overline{S_1 h} = \overline{AS_1} - \frac{a}{2}$$

oder:

$$\overline{S_1 h} = \overline{AS} - \frac{a}{2}$$

Als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist aber:

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

und somit

$$\overline{S_1 H} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

folglich ist die dynamische Stabilität in Bezug auf die Drehkante A:

$$A = a b c \gamma \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right]$$

oder:

$$A = \frac{1}{2} a b c \gamma \left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right)$$

Aufgabe 180. Ein rechtwinklig parallelepipedisch behauener Stein von 0,9 m Länge, 0,6 m Breite und 0,4 m Höhe und vom spez. Gew. 2,5 ist von einer horizontalen Ebene unterstützt. Auf wieviele Arten kann derselbe aufliegen und um seine Kanten gedreht werden? Wie gross ist die jedesmalige statische u. dynamische Standfestigkeit?

Hilfsrechnungen.

1). . . . 0,9 . 0,6 . 0,4 = 0,54 . 0,4
= 0,216
. 2500
540,000

2). . . . 540 . 0,45 = 54 . 4,5
= 270
216
243,0

Auflösung. Der Stein kann drei verschiedene Stellungen einnehmen, und in jeder derselben sowohl um die Kante $\overline{bc}$ (siehe Fig. 210 I. II. III.) als auch um die Kante $\overline{ab}$ gedreht werden, woraus sich sechs verschiedene Fälle ergeben. Das Gewicht des Steines ist:

$$G = 0,9 . 0,6 . 0,4 . 2500 \text{ kg}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$G = 540 \text{ kg}$$

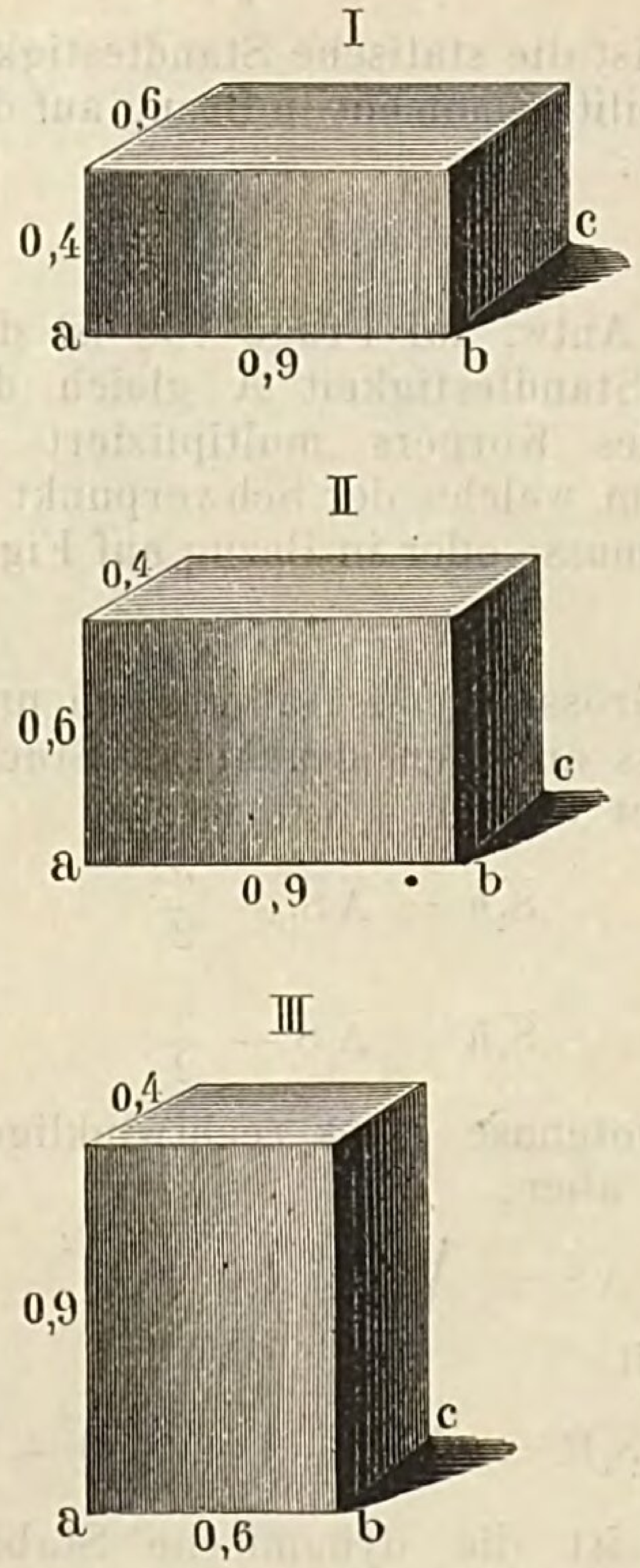
Ist in Stellung I. $\overline{bc}$ die Kippkante, so ist die statische Stabilität:

$$M_1 = 540 . 0,45$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$M_1 = 243 \text{ mkg}$$

Figur 210.



Hilfsrechnungen.

3). . . 0,45 . 0,45 0,2 . 0,2 = 0,04
225
180
0,2025
+ 0,04
$\sqrt{0,|24|25}$ = 0,49 0,49
16 − 0,2
8|825 h = 0,29
801
98|2400

4). . . . 540 . 0,29 = 54 . 2,9
486
108
156,6

5). . 0,2 . 0,2 = 0,04 0,3 . 0,3 = 0,09
+ 0,09
$\sqrt{0,|13|}$ = 0,36 0,36
9 − 0,2
6|400 h = 0,16
396

540 . 0,16
= 54 . 1,6
= 86,4

ist aber in Stellung I $\overline{ab}$ Kippkante, so ist die statische Stabilität:

$$M_2 = 540 . 0,3$$
oder:
$$M_2 = 162 \text{ mkg}$$

desgleichen findet man für Stellung II, wenn $\overline{bc}$ Kippkante ist, für die statische Stabilität:

$$M_3 = 540 . 0,45$$
oder:
$$M_3 = 243 \text{ mkg}$$

wenn aber $\overline{ab}$ Kippkante ist, so ist:

$$M_4 = 540 . 0,2$$
oder:
$$M_4 = 108 \text{ mkg}$$

und in Stellung III bei $\overline{bc}$ als Kippkante:

$$M_5 = 540 . 0,3$$
oder:
$$M_5 = 162 \text{ mkg}$$

bei $\overline{ab}$ als Kippkante:

$$M_6 = 540 . 0,2$$
oder:
$$M_6 = 108 \text{ mkg}$$

die dynamische Standfestigkeit:

$$A = G\,h$$ (siehe Antw. auf Frage 138)

h muss in jedem einzelnen Fall erst berechnet werden und ist in Stellung I, wenn Kippkante $\overline{bc}$ ist:

$$h = \sqrt{(0,45)^2 + (0,2)^2} - 0,2$$
(siehe die Lösung zu Aufg. 179)

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3). ist:

$$h = 0,29$$
und somit:
$$A_1 = 540 . 0,29$$
oder:
$$A_1 = 156,6$$ (siehe Hilfsrechn. 4)

In gleicher Weise erhält man in Stellung I, wenn $\overline{ab}$ Kippkante ist, für

$$A_2 = 540\sqrt{(0,2)^2 + (0,3)^2} - 0,2$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 5).:

$$A_2 = 86,4 \text{ mkg}$$

In Stellung II, wenn $\overline{bc}$ Kippkante ist, ist:

$$A_3 = 540\sqrt{(0,45)^2 + (0,3)^2} - 0,3$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 6).:

$$A_3 = 129,6 \text{ mkg}$$

Ist aber in Stellung II $\overline{ab}$ Kippkante, dann ist:

$$A_4 = 540\sqrt{(0,2)^2 + (0,3)^2} - (0,3)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 7).:

$$A_4 = 32,4 \text{ mkg}$$

Ist in Stellung III $\overline{bc}$ Kipkante, dann ist:

Hilfsrechnungen:

6). $0{,}45 \cdot 0{,}45 = 0{,}2025$
$+ 0{,}09$
$\sqrt{0{,}29|25} = 0{,}54$
25
$10 | 425$
416

$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$0{,}54 - 0{,}3 = 0{,}24$

$540 \cdot 0{,}24 = 54 \cdot 2{,}4$
216
108
$129{,}6$

7). $0{,}04 + 0{,}09$
$\sqrt{0{,}13} = 0{,}36$

$0{,}36 - 0{,}3 = 0{,}06$

$540 \cdot 0{,}06$ oder $5{,}4 \cdot 6 = 32{,}4$

8). $(0{,}3)^2 = 0{,}09$

$540 \cdot 0{,}09$ oder $5{,}4 \cdot 9 = 48{,}6$

$(0{,}45)^2 = 0{,}2025$
$+ 0{,}09$
$\sqrt{0{,}2925} = 0{,}54$
$-0{,}45$
$= 0{,}09$

9). $(0{,}2)^2 = 0{,}04$

$540 \cdot 0{,}04$ oder $5{,}4 \cdot 4 = 21{,}6$

$(0{,}45)^2 = 0{,}2025$
$+ 0{,}04$
$\sqrt{0{,}2425} = 0{,}49$
$-0{,}45$
$= 0{,}04$

$$A_5 = 540 \sqrt{(0{,}3)^2 + (0{,}45)^2} - 0{,}45$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 8).:

$$A_5 = 48{,}6 \text{ mkg}$$

Ist endlich in Stellung III $\overline{ab}$ Kippkante, dann ist:

$$A_6 = 540 \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}45)^2} - 0{,}45$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 9).:

$$A_6 = 21{,}6 \text{ mkg}$$

d. h. es muss im letzterwähnten Fall eine in Höhe des Schwerpunkts angreifende wagerecht gerichtete Kraft von 540 kg den Schwerpunkt um $\frac{21{,}6}{540} = 0{,}04$ m oder 4 cm heben.

Aufgabe 181. Wie gross ist a) die statische, b) die dynamische Stabilität einer geraden quadratischen Pyramide, wenn die Kante der Grundfläche 6 m, die Höhe 8 m beträgt und 1 cbm der Masse 1200 kg wiegt?

Auflösung a). Das Volumen einer Pyramide:

$$V = \frac{G \cdot H}{3}$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen I. Buch Seite 38)

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$V = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{3}$$

oder:

$$V = 96 \text{ cbm},$$

somit ist das Gewicht der Pyramide:

$$G = 96 \cdot 1200$$

oder:

$$G = 115\,200 \text{ kg}.$$

Der Abstand der Schwerlinie von einer Grundkante beträgt $\frac{1}{2} \cdot 6$ oder 3 m und demnach ist die statische Stabilität:

$$M = 3 \cdot 115\,200$$

oder:

$$M = 345\,600 \text{ mkg}.$$

Auflösung b). Die dynamische Stabilität:

$$A = G\,h$$ (siehe Antw. auf Frage 138)

Das Gewicht G ist bereits berechnet, und die Höhe

$$h = \sqrt{2^2 + 3^2} - 2$$

(siehe Lösung der Aufgabe 179)

denn nach Antw. auf Frage 101 ist der Abstand des Schwerpunkts der Pyramide von der Grundfläche $= \frac{1}{4} h$ oder im gegebenen Fall $= \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ m; der Abstand der Schwerlinie von der Kippkante aber 3 m, folglich die senkrechte Höhe, bis zu welcher der Schwerpunkt über die Kippkante gehoben werden muss $= \sqrt{2^2 + 3^2}$, wovon die 2 m Schwerpunktsabstand zu subtrahieren sind, somit ergibt sich für

$$h = \sqrt{13} - 2$$

oder:

$$h = 3{,}6 - 2 \text{ oder } 1{,}6$$

und demnach:

$$A = 115200 \,.\, 1{,}6$$

oder:

$$A = 184320 \text{ mkg.}$$

Aufgabe 182. Wie gross ist das Stabilitätsmoment eines Schornsteins von 20 m Höhe, welcher an seinem unteren Ende einen Durchmesser von 1,4 m und an seinem oberen Ende einen solchen von 0,8 m bei einer Wandstärke von 0,24 m besitzt, wenn 1 cbm Mauerwerk 1620 kg wiegt?

Hilfsrechnungen:

1). . . $3{,}14 \,.\, 20 = 62{,}8$ $\qquad 62{,}8 : 3 = 20{,}93$

$0{,}85 \,.\, 0{,}85$: 425, 680, $= 0{,}7225$ $\qquad 0{,}85 \,.\, 0{,}4 = 0{,}340$ $\qquad 0{,}4 \,.\, 0{,}4 = 0{,}16$

$0{,}7225 + 0{,}340 + 0{,}16 = 1{,}2225$

$1{,}2225 \,.\, 20{,}93$: 36675, 110025, 244500, $= 25{,}586925$

2). . . $\frac{3{,}14 \,.\, 20}{3} = 20{,}93$ (siehe Hilfsrechn. 1)

$0{,}61 \,.\, 0{,}61$: 61, 366, $= 0{,}3721$ $\qquad 0{,}61 \,.\, 0{,}16 = 0{,}0976$ $\qquad 0{,}16 \,.\, 0{,}16 = 0{,}0256$

$0{,}3721 + 0{,}0976 + 0{,}0256 = 0{,}4953$

$0{,}4953 \,.\, 20{,}93$: 14859, 44577, 99060, $= 10{,}366629$

Auflösung. Es ist zunächst das Volumen des Mauerwerks zu berechnen. Dasselbe wird gefunden, wenn das Gesamtvolumen des Schornsteins berechnet und davon der Inhalt des inneren Hohlraums subtrahiert wird. Nun findet man das Volumen eines Kegelstumpfs (siehe Kleyers I. Buch der Körperberechnungen S. 88) nach der Formel:

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Setzen wir in diese Formel die entsprechenden Zahlenwerte, so ergibt sich als Gesamtvolumen des Schornsteins:

$$V = \frac{3{,}14 \,.\, 20}{3} (0{,}85^2 + 0{,}85 \,.\, 0{,}4 + 0{,}4^2)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$V = 25{,}587 \text{ cbm}$$

Da der Radius der Grundfläche 0,85 und die Wandstärke 0,24 beträgt, so ist der Radius des inneren Hohlraums an der Basis

$$0{,}85 - 0{,}24 = 0{,}61$$

und der obere Radius des Hohlraums:

$$0{,}4 - 0{,}24 = 0{,}16$$

und somit ergibt sich als Volumen des Hohlraums:

$$v = \frac{3{,}14 \,.\, 20}{3}\left(0{,}61^2 + 0{,}61 \,.\, 0{,}16 + 0{,}16^2\right)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$v = 10{,}367 \text{ cbm}$$

somit beträgt das Volumen des Mauerwerks:

$$25{,}587 - 10{,}367 = 15{,}22 \text{ cbm}$$

da jeder Kubikmeter Mauerwerk 1620 kg wiegt, so ist das Gesamtgewicht desselben:

$$15{,}22 \,.\, 1620 = 24656{,}4 \text{ kg}$$

Der Abstand der senkrechten Schwerlinie von der Kippkante beträgt 0,85 und somit ist das Stabilitätsmoment:

$$M = 24656{,}4 \,.\, 0{,}85$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

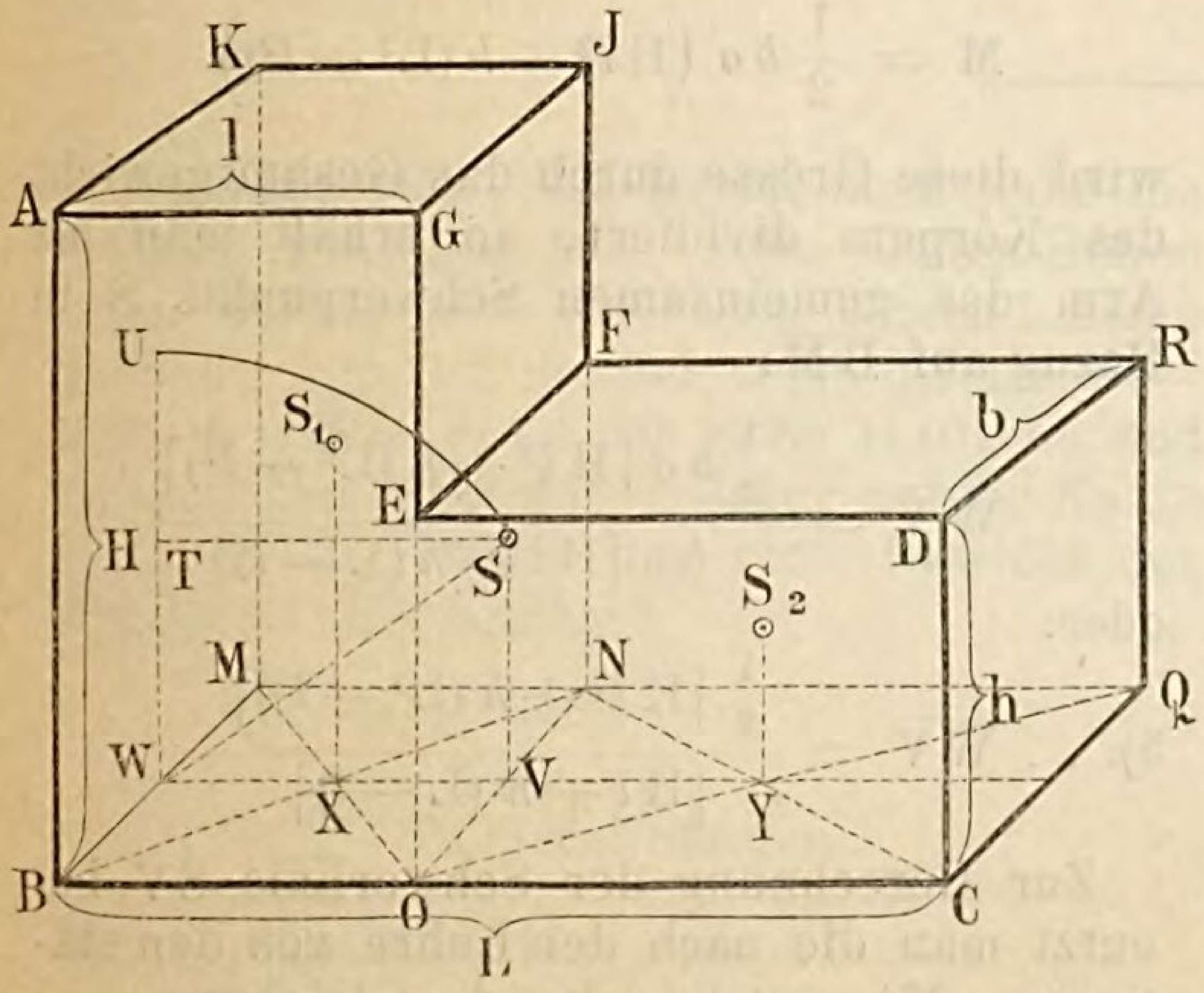
$$M = 20958 \text{ mkg}$$

Hilfsrechnung.

3). 24656,4 . 0,85
1232820
1972512
20957,940

Aufgabe 183. Wie gross ist die Stabilität eines aus zwei rechtwinkligen Parallelepipedon zusammengesetzten Körpers (siehe Fig. 211), wenn dessen obere Länge l, die untere Länge L, die linke Höhe H, die rechte h und die Breite b beträgt, wenn a) BM, b) CQ als Kippkante angesehen wird und das spez. Gewicht des Körpers $= \sigma$ ist?

Figur 211.



Auflösung. Zunächst ist das Volumen des Parallelepipedons OK:

$$V_1 = Hbl$$

das des Parallelepipedons OR:

$$V_2 = hb(L - l)$$

Da nun σ das spez. Gewicht ist, so ist das Gewicht, welches man sich in S_1 vereinigt denken kann:

1). $S_1 = Hbl\sigma$

und das Gewicht, welches man sich in S_2 vereinigt denken kann:

2). $S_2 = bh(L - l)\sigma$

Die durch S_1 gelegte senkrechte Schwerlinie ist von der Kippkante $\overline{BM}$ um $\frac{1}{2}l$, von der Kippkante $\overline{CQ}$ aber um $L - \frac{1}{2}l$ entfernt. Die durch S_2 gelegte senkrechte Schwerlinie ist von der Kante $\overline{BM}$ um

$$\frac{1}{2}(L - l) + l = \frac{1}{2}(L + l)$$

und von der Kante $\overline{CQ}$ um $\frac{1}{2}(L - l)$ entfernt. Folglich ist die statische Standfestigkeit in Bezug auf $\overline{BM}$ gleich dem Stabilitätsmoment M_1 des Parallelepipedons $\overline{OK}$ plus dem Stabilitätsmoment M_2 des Parallelepipedons $\overline{OR}$. Nun ist:

$$M_1 = Hlb\sigma \cdot \frac{1}{2}l$$

und

$$M_2 = bh(L-l)\sigma \cdot \frac{1}{2}(L+l)$$

oder:

$$M_1 = \frac{1}{2} H l^2 b \sigma$$

und

$$M_2 = \frac{1}{2} b h (L^2 - l^2) \sigma$$

Folglich ist die Gesamtstandfestigkeit in Bezug auf die Kante $\overline{BM}$:

$$3). \ldots M = \frac{1}{2} b \sigma \left(H l^2 + h(L^2 - l^2)\right)$$

Ist aber $\overline{CQ}$ die Kippkante, dann ist:

$$M_1 = H l b \sigma . (L - \frac{1}{2} l)$$

$$M_2 = b h (L - l) \sigma \cdot \frac{1}{2}(L - l)$$

oder:

$$M_1 = b \sigma . H l (L - \frac{1}{2} l)$$

$$M_2 = b \sigma \cdot \frac{1}{2} h (L - l)^2$$

folglich:

$$4). \ldots M = b \sigma \left(H l (L - \frac{1}{2} l) + \frac{1}{2} h (L - l)^2\right)$$

Zur Berechnung der dynamischen Stabilität ist der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts von der betreffenden Kippkante zu wissen nötig; das Gesamtdrehungsbestreben oder das Stabilitätsmoment in Bezug auf die Kante $\overline{BM}$ ist:

$$M = \frac{1}{2} b \sigma \left(H l^2 + h(L^2 - l^2)\right)$$

wird diese Grösse durch das Gesamtgewicht des Körpers dividiert, so erhält man als Arm des gemeinsamen Schwerpunkts S in Bezug auf $\overline{BM}$:

$$\overline{WV} = \frac{\frac{1}{2} b \sigma [H l^2 + h(L^2 - l^2)]}{b \sigma [H l + h(L - l)]}$$

oder:

$$5). \ldots \overline{WV} = \frac{\frac{1}{2}[H l^2 + h(L^2 - l^2)]}{[H l + h(L - l)]}$$

Zur Berechnung der Schwerlinie $\overline{SV}$ benutzt man die nach der Lehre von den statischen Momenten geltende Gleichung:

$$S . \overline{SV} = S_1 . \overline{S_1X} + S_2 . \overline{S_2Y}$$

hieraus erhält man für

$$\overline{SV} = \frac{S_1 . \overline{S_1X} + S_2 . \overline{S_2Y}}{S}$$

in welcher Gleichung die Grössen S, S_1 und

Für S_1, S_2 und S die entsprechenden Gewichte gesetzt, gibt:

$$\overline{SV} = \frac{Hlb\sigma \cdot \frac{1}{2}H + bh(L-l)\sigma \cdot \frac{1}{2}h}{b\sigma[Hl + h(L-l)]}$$

oder:

$$\overline{SV} = \frac{\frac{1}{2}H^2 lb\sigma + \frac{1}{2}bh^2\sigma(L-l)}{b\sigma[Hl + h(L-l)]}$$

oder:

$$\overline{SV} = \frac{\frac{1}{2}b\sigma[H^2 l + h^2(L-l)]}{b\sigma[Hl + h(L-l)]}$$

S_2 die resp. Gewichte bedeuten. Setzen wir die entsprechenden Werte für die Arme ein, so ergibt sich für

$$\overline{SV} = \frac{S_1 \cdot \frac{1}{2}H + S_2 \cdot \frac{1}{2}h}{S}$$

oder nach nebenstehender Hilfsoperation:

$$6). \ldots \overline{SV} = \frac{\frac{1}{2}[H^2 l + h^2(L-l)]}{[Hl + h(L-l)]}$$

Sind aber die beiden Katheten des Dreiecks WSV bekannt, so ergibt sich daraus für den direkten Abstand des gemeinsamen Schwerpunkts S von der Kante $\overline{BM}$:

$$\overline{WU} \text{ oder } \overline{WS} = \sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2}$$

die Höhe aber, bis zu welcher der Schwerpunkt bei einer Drehung um $\overline{BM}$ gehoben werden muss, ist:

$$h \text{ oder } \overline{UT} = \overline{WU} - \overline{WT}$$

oder:

$$h = \sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2} - \overline{VS}$$

und somit ist die dynamische Stabilität $G.h$ in Bezug auf die Kippkante $\overline{BM}$:

$$7). \ldots A = b\sigma[Hl + h(L-l)]\left[\sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2} - \overline{VS}\right]$$

In gleicher Weise ergibt sich für die dynamische Stabilität in Bezug auf die Kippkante $\overline{CQ}$:

$$8). \ldots A = b\sigma[Hl + h(L-l)]\left[\sqrt{(L - \overline{WV})^2 + \overline{VS}^2} - \overline{VS}\right]$$

Aufgabe 184. Ein Kreideblock habe die Gestalt der Figur 195. Seine beiden Höhen seien $H = 2$, $h = 1$ m; seine beiden Längen $L = 3$, $l = 1,2$ m und seine Breite $b = 2,25$ m. Wie gross ist seine statische und dynamische Stabilität in Bezug auf die Kante $\overline{BM}$ und $\overline{CQ}$, wenn das spez. Gewicht der Masse $= 1,8$ beträgt?

Hilfsrechnungen.

1). . . . 2 . 2,25 = 4,5
. 1,2
5,40
. 1800
432
54
9720,00

Auflösung. Nach Gleich. 1). in Auflösung der vorigen Aufgabe ist das Gewicht des Parallelepipedons, welches man sich in S_1 vereinigt denken kann:

$$S_1 = Hbl\sigma$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$S_1 = 2 \,.\, 2,25 \,.\, 1,2 \,.\, 1800 \text{ kg}$$

oder:

$$S_2 = 9720 \text{ kg} \text{ (siehe Hilfsrechn. 1)}$$

Nach Gleich. 2). in Auflösung der vorigen Aufgabe ist:

$$S_2 = bh(L-l)\sigma$$

oder wenn die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt werden, so ist:

Hilfsrechnungen:

2). . . 2,25 (3 — 1,2) = 2,25 . 18
1800
225
4,050 . 1800
3240
405
7290,00

3). . $\frac{1}{2}$ · 2,25 . 1800 = 900 . 2,25 = 9 . 225
= 2025

[2 . 1,2 . 1,2 + (9 — 1,44)] = 2,88 + 7,56 = 10,44
2025 . 10,44
8100
8100
20250
21141,00

4). . . 2,25 . 1800 = 225 . 18
1800
225
4050

2,4 . 2,4
96
48
5,76
+ 1,62
7,38 . 4050 =
738 . 40,5
3690
29520
29889,0

1,8 . 1,8
144
18
2 : 3,24 = 1,62

5). $\frac{\frac{1}{2}[2.1,44+(9-1,44)]}{2,4+1,8} = \frac{\frac{1}{2}[2,88+7,56]}{4,2}$

2,88
+ 7,56
10,44 : 2 = 5,22

5,22 : 4,2 = 1,24
42
102
84
180

6). . . . $\frac{\frac{1}{2}[4,8+1,8]}{[2,4+1,8]} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6,6}{4,2}$

oder:

330 : 42 = 0,7857
294
360
336
240
210
300

$$S_2 = 2,25 . 1 . (3 - 1,2) . 1800 \text{ kg}$$

oder:

$$S_2 = 7290 \text{ kg}$$ (s. Hilfsrechn. 2).

Die durch S_1 gelegte Schwerlinie ist von $\overline{BM}$ um

$$\frac{1}{2} l = 0,6 \text{ m}$$

und von $\overline{CQ}$ um

$$L - \frac{1}{2} l = 3 - 0,6 \text{ oder } 2,4 \text{ m}$$

entfernt.

Die durch S_2 gelegte Schwerlinie ist von $\overline{BM}$ um

$$\frac{1}{2}(L + l) = \frac{1}{2} \cdot 4,2 \text{ oder } 2,1 \text{ m}$$

und von $\overline{CQ}$ um

$$\frac{1}{2}(L - l) = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \text{ oder } 0,9 \text{ m}$$

entfernt.

Folglich ist nach Gleichung 3). in Auflösung der vorigen Aufgabe:

$$M = \frac{1}{2} \cdot 2,25 . 1800 \left(2 . 1,2^2 + 1 (3^2 - 1,2^2)\right)$$

oder:

A). . . . $M = 21141$ mkg (siehe Hilfsrechn. 3)

Ist aber $\overline{CQ}$ Kippkante, so ist, wenn wir in die Gleichung 4). der Auflösung der vorigen Aufgabe die entsprechenden Zahlenwerte einsetzen, das Stabilitätsmoment in Bezug auf $\overline{CQ}$:

$$M = 2,25 . 1800 \left(2 . 1,2 \left(3 - \frac{1}{2} \cdot 1,2\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 (3 - 1,2)^2\right)$$

oder:

$$M = 4050 \left(2,4 (2,4) + \frac{1}{2} (1,8)^2\right)$$

oder:

B). . . . $M = 29889$ mkg (siehe Hilfsrechn. 4).

Zur Ermittelung der dynamischen Stabilität in Bezug auf die Kante $\overline{BM}$ ist ausser dem Gesamtgewicht des Körpers auch zu wissen nötig, wie hoch der Schwerpunkt des gesamten Körpers gehoben werden muss. Zu diesem Zweck muss zunächst:

$$h = \sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2} - \overline{VS}$$

berechnet werden.

Nach Gleichung 5). in Auflösung der vorigen Aufgabe ist, wenn die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt werden:

$$\overline{WV} = \frac{\frac{1}{2}[2 . 1,2^2 + 1 (3^2 - 1,2^2)]}{[2 . 1,2 + 1 (3 - 1,2)]}$$

oder:

C). $\overline{WV} = 1,24$ (siehe Hilfsrechn. 5).

Hilfsrechnungen:

```
7). . 225 . 18
      1800
      225
      4050 . (2,4 + 1,8) = 4050 . 4,2
                              810
                             1620
                            17010

      1,24 . 1,24          0,7857 . 0,7857
          496                    54999
        1488                    39285
        1,5376                 62856
                              54999
                           0,61732449
                          + 1,5376
                           2,15492449

√2,|15|49|24|49 = 1,468
 1                 − 0,786
 2|115              0,682 . 17010
   96             = 17,01 . 682
 28|1949                  3402
   1716                  13608
 292|23324               10206
                         11600,82

8). . 2,25 . 1800
    = 4050 (2,4 + 1,8) = 4050 . 4,2
                       = 17010

    1,76 . 1,76          0,7857 . 0,7857
        1056           = 0,61732449
        1232           + 3,0976
        176            √3,|71|49|24|49 = 1,9274
        3,0976           1
                         2|271
    1,9274                 261
  − 0,7857               38|1049
    1,1417                  764
                         384|28524
  17010 . 1,1417             26929
= 11417 . 1,701          3854|159549
      11417
     799190
     11417
     19420,317
```

Nach Gleichung 6). in Auflösung der vorigen Aufgabe ist, wenn die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt werden:

$$\overline{SV} = \frac{\frac{1}{2}\left[2^2 . 1,2 + 1^2 (3 - 1,2)\right]}{\left[2 . 1,2 + 1 (3 - 1,2)\right]}$$

oder:

D). $\overline{SV} = 0,7875$ (siehe Hilfsrechn. 6).

Setzen wir nun in Gleichung 7). in Auflösung der vorigen Aufgabe die entsprechenden Zahlenwerte ein, so ergibt sich als dynamische Stabilität in Bezug auf die Kante $\overline{BM}$:

$$A = 2,25 . 1800 \left[2 . 1,2 + 1 (3 - 1,2)\right] . \left[\sqrt{1,24^2 + 0,7857^2} - 0,7857\right]$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 7).:

E). . . . $A = 11600,82$ mkg

Endlich ist nach Gleich. 8). in Auflösung der vorigen Aufgabe unter Anwendung der entsprechenden Zahlenwerte die dynamische Stabilität in Bezug auf die Kante $\overline{CQ}$:

$$2,25 . 1800 \left[2 . 1,2 + 1 (3 - 1,2)\right] . \left[\sqrt{(3 - 1,24)^2 + 0,7857^2} - 0,7857\right]$$

oder:

$$A = 17010 \left[\sqrt{1,76^2 + 0,7857^2} - 0,7857\right]$$

oder:

F). . . . $A = 19420,317$ mkg (siehe Hilfsrechn. 8)

Aufgabe 185. Ein Granitblock in Form einer abgestumpften Pyramide von quadratischem Querschnitt, hat an der Grundfläche 1 m, an der oberen Fläche $^1/_2$ m Kantenlänge bei 1 m Höhe. Wie gross ist das Stabilitätsmoment, wenn die Pyramide

a) auf der grösseren,

b) auf der kleineren

der beiden parallelen Flächen steht und wenn 1 cbm Granit 2800 kg wiegt?

Auflösung. Zunächst muss das Volumen des Granitblocks ermittelt werden. Dasselbe ist (nach Kleyers Lehrb. der Körperberechn. I. Buch, Seite 38):

$$V = \frac{H}{3}\left(G + \sqrt{Gg} + g\right)$$

Hilfsrechnung.

1). $\frac{1}{3}(1+\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4})$

$\sqrt{5} = 2,236$

$= \frac{1}{3}(1+1,118+0,25)$

$= \frac{1}{3}\cdot 2,368$

$= 0,789$

oder wenn man die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt:

$$V = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\right)$$

oder:

$$V = 0,789 \text{ cbm} \text{ (siehe Hilfsrechn. 1)}$$

Da 1 cbm Granit 2800 kg wiegt, so wiegt der Block

$$0,789 \,.\, 2800 = 2209,2 \text{ kg}$$

Liegt die Pyramide auf der grösseren Parallelfläche, so beträgt der Abstand der senkrechten Schwerlinie von jeder Stützkante $= \frac{1}{2}$ m und somit ist nach Antwort auf Frage 137 die statische Stabilität:

$$M = 2209,2 \cdot \frac{1}{2}$$

oder:

$$M = 1104,6 \text{ mkg}$$

Liegt dagegen die Pyramide auf der kleineren Parallelfläche, so ist ihre Standfestigkeit bedeutend geringer. Der Abstand der Schwerlinie von jeder Stützkante beträgt in diesem Fall $= \frac{1}{4}$ m und somit ist das Stabilitätsmoment:

$$M = 2209,2 \cdot \frac{1}{4}$$

oder:

$$M = 552,3 \text{ mkg}$$

Aufgabe 186. Eine Mauer von dem Querschnitt Fig. 212 habe bei $\overline{AB}$ eine Breite $= b$, eine Höhe $\overline{BC} = h$ und $\overline{ED}$ sei $= nh$, d. h. die Mauer erhalte bei 1 m Höhe eine Ausladung[1]) von n Metern. Wie gross ist die Stabilität a) wenn E, b) wenn C die Kippkante ist und wenn das spez. Gewicht des Mauerwerks $= \gamma$ ist?

[1]) Siehe Erkl. 195.

Erkl. 195. Unter Ausladung versteht man in der Baukunst den Vorsprung eines Bauteils vor den übrigen.

Auflösung. Mit Bezug auf Figur 213 ist das Stabilitätsmoment für die durch E gehende Seitenkante:

$$M = S_1 \,.\, \overline{EO} + S_2 \,.\, \overline{EQ}$$

Nun ist das Gewicht der Mauer vom Querschnitt AED:

$$S_1 = \frac{1}{2} h^2 n l \gamma$$

und der Arm, an dem dieses Gewicht wirkt:

$$\overline{EO} = \frac{2}{3} h n$$

folglich ist:

$$S_1 \,.\, \overline{EO} = \frac{1}{2} h^2 n l \gamma \cdot \frac{2}{3} h n$$

Ferner ist das Gewicht des Mauerwerks vom Querschnitt ABCD:

$$S_2 = h b l \gamma$$

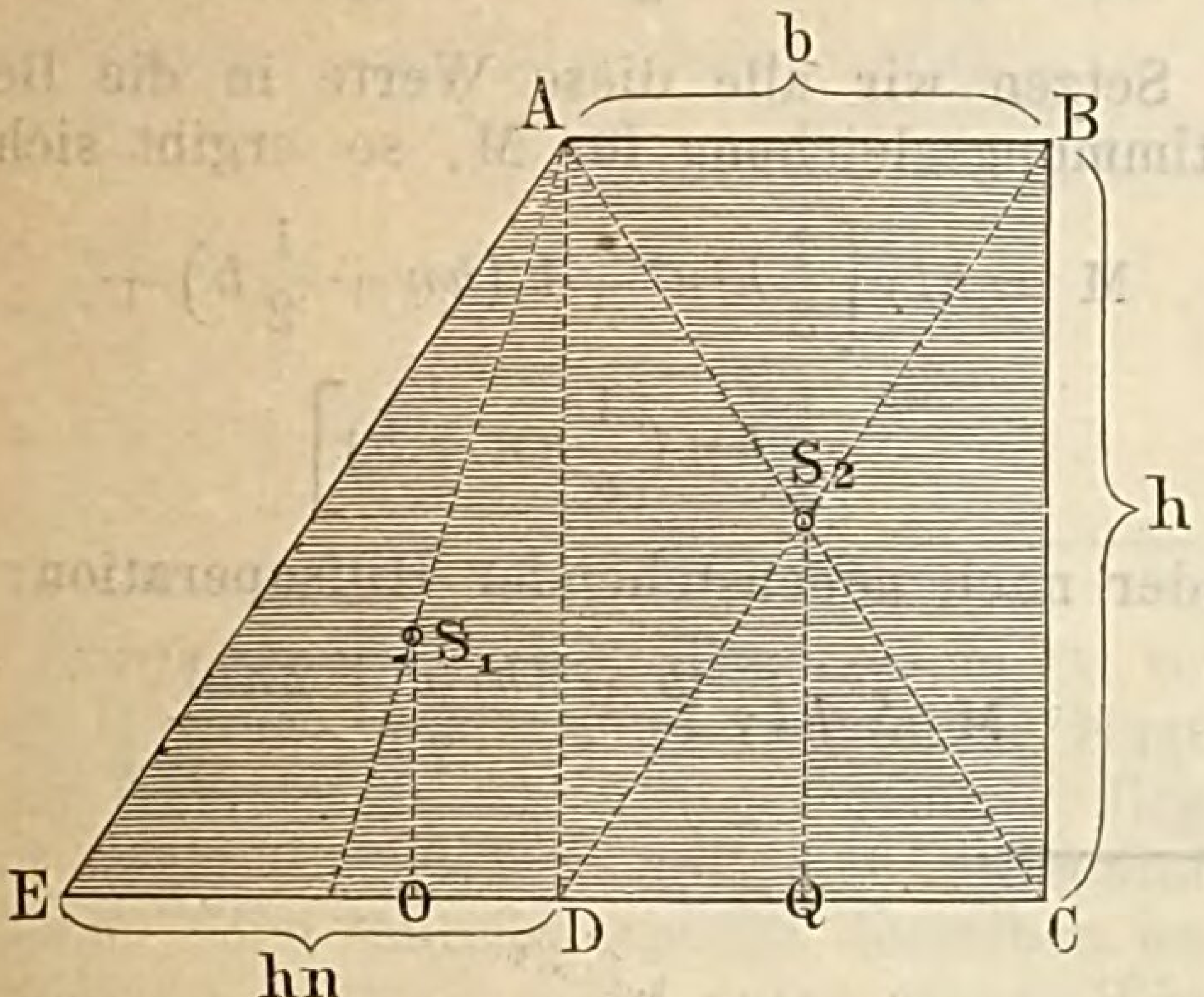
und der dazu gehörige Arm:

$$\overline{EQ} \text{ oder } \overline{ED} + \overline{DQ} = hn + \frac{1}{2}b$$

folglich

$$S_2 . \overline{EQ} = hbl\gamma\left(hn + \frac{1}{2}b\right)$$

Figur 212.



Setzen wir diese Werte in die Bestimmungsgleichung für M, so ergibt sich als Mass der Stabilität mit Bezug auf die Kante E:

$$\text{A)}. . . M = hl\gamma\left(\frac{1}{3}h^2n^2 + b\left(hn + \frac{1}{2}b\right)\right)$$

In Bezug auf die durch C gehende Seitenkante ist:

$$M = S_1 . \overline{CO} + S_2 . \overline{CQ}$$

Da nun:

$$S_1 = \frac{1}{2}h^2nl\gamma$$

$$\overline{CO} = b + \frac{1}{3}hn$$

so ist:

$$S_1 . \overline{CO} = \frac{1}{2}h^2nl\gamma\left(b + \frac{1}{3}hn\right)$$

ferner ist:

$$S_2 = hbl\gamma$$

$$\overline{CO} = \frac{1}{2}b$$

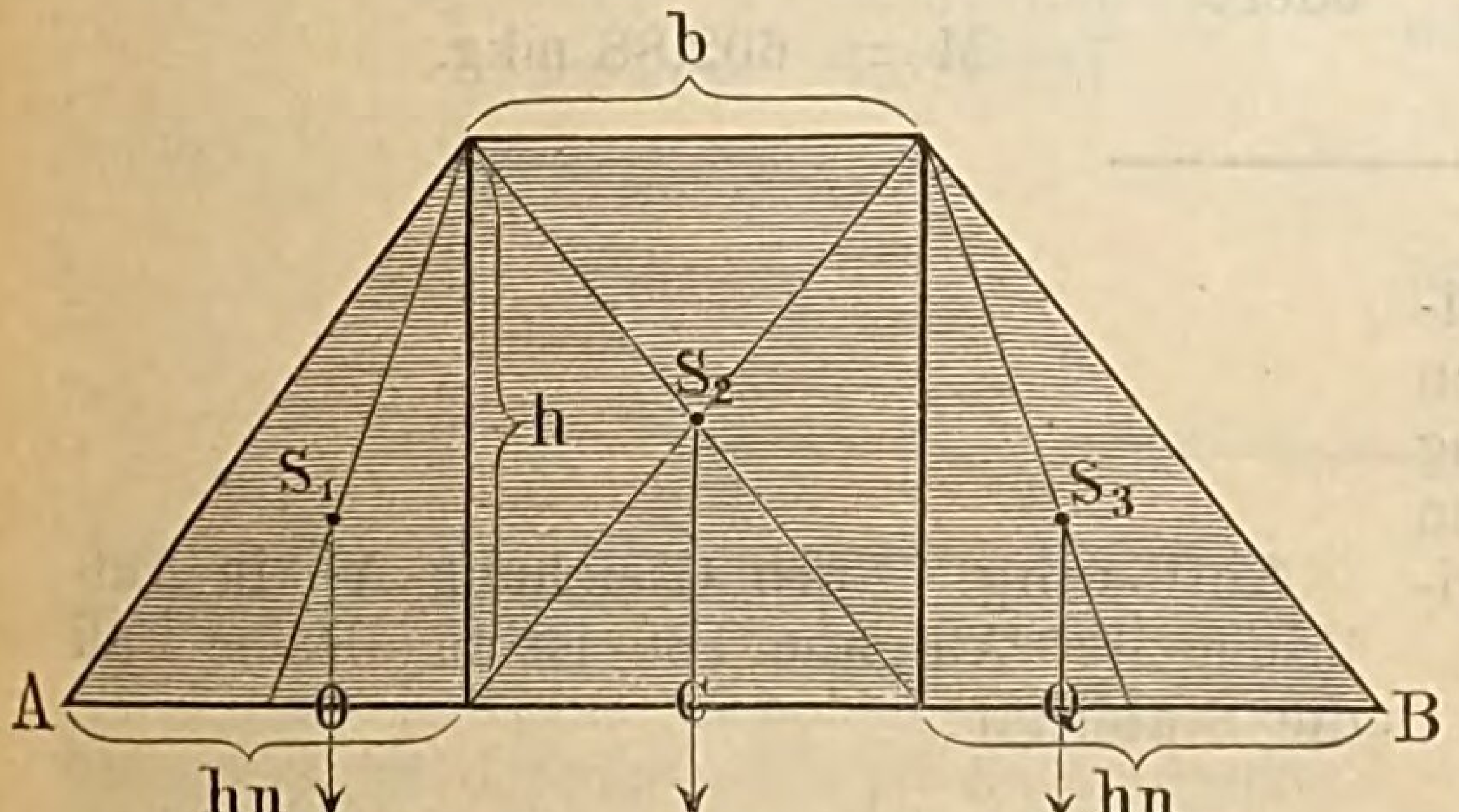
folglich: $S_2 . \overline{CO} = \frac{1}{2}b^2hl\gamma$

diese Werte in die Bestimmungsgleichung für M eingesetzt, gibt:

$$M = hl\gamma\left(hn\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{6}hn\right) + \frac{1}{2}b^2\right)$$

Aufgabe 187. Es sei (Fig. 213) die Mauer nach beiden Seiten auf gleiche Weise geböscht. Wie gross ist dann, dieselben Bezeichnungen vorausgesetzt wie in der vorigen Aufgabe, in diesem Fall die Stabilität?

Figur 213.



Auflösung. Die Stabilität der in Fig. 213 im Querschnitt dargestellten Mauer beträgt

$$M = S_1 . \overline{AO} + S_2 . \overline{AC} + S_3 . \overline{AQ}$$

in welcher Gleichung S_1, S_2, S_3 die resp. Gewichte bedeutet. Nun ist:

$$S_1 = \frac{1}{2}h^2nl\gamma$$

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}hn$$

mithin: $S_1 . \overline{AO} = \frac{1}{3}h^3n^2l\gamma$

$$S_2 = hbl\gamma$$

$$\overline{AC} = hn + \frac{1}{2}b$$

mithin: $S_2 . \overline{AC} = hbl\gamma\left(hn + \frac{1}{2}b\right)$

ferner ist:

$$S_3 = \frac{1}{2} h^2 n l \gamma$$

$$\overline{AQ} = hn + b + \frac{1}{3} hn = \frac{4}{3} hn + b$$

mithin: $S_3 . \overline{AQ} = \frac{1}{2} h^2 n l \gamma \left(\frac{4}{3} hn + b\right)$

Setzen wir alle diese Werte in die Bestimmungsgleichung für M, so ergibt sich:

$$M = hl\gamma \left[\frac{1}{3} h^2 n^2 + b\left(hn + \frac{1}{2} b\right) + \frac{1}{2} hn \left(\frac{4}{3} hn + b\right)\right]$$

oder nach nebenstehender Hilfsoperation:

$$M = hl\gamma \frac{(b + nh)(b + 2nh)}{2}$$

Die nebenstehende eckige Klammer weiter ausgerechnet, gibt:

$$\left(\frac{1}{3} h^2 n^2 + bhn + \frac{1}{2} b^2 + \frac{2}{3} h^2 n^2 + \frac{1}{2} bhn\right) = h^2 n^2 + \frac{3}{2} bhn + \frac{1}{2} b^2$$

$$= \frac{2h^2 n^2 + 3bhn + b^2}{2}$$

$$= \frac{(b + nh)(b + 2nh)}{2}$$

Aufgabe 188. Wie gross ist die Stabilität einer parallelepipedischen Mauer von 3,14 m Höhe und 40 cm Breite auf je 1 m Länge, wenn dieselbe aus Bruchsteinen aufgeführt ist und das spezifische Gewicht für trockenes Mauerwerk von Bruchsteinen 2,4 beträgt?

Auflösung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 180.

Auf jeden Meter Länge beträgt das Volumen der Mauer:

$$V = 0{,}4 . 1 . 3{,}14$$

oder:

$$V = 1{,}256 \text{ cbm}$$

Da jeder Kubikmeter Mauerwerk 2400 kg schwer ist, so beträgt das Gewicht der Mauer auf 1 m Länge:

$$G = 1{,}256 . 2400$$

oder:

$$G = 3014{,}4 \text{ kg}$$

Der Abstand der senkrechten Schwerlinie von einer der unteren Längskanten beträgt:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}4 = 0{,}2 \text{ m}$$

und somit ist das Stabilitätsmoment:

$$M = 3014{,}4 . 0{,}2$$

oder:

$$M = 602{,}88 \text{ mkg.}$$

Hilfsrechnung.

```
125,6 . 24
  5024
 2512
 3014,4 . 0,2
  602,88
```

Aufgabe 189. Wie gross ist die Stabilität einer Mauer, wenn sie an der rechten Seite von oben bis unten eine Böschung aus demselben Material erhält, welche unten 63 cm heraustritt und wenn die rechte Seitenkante als Kippkante angesehen wird?

Auflösung. Nach Gleichung A). in Auflösung der Aufgabe 186 ist in diesem Fall die Stabilität:

$$M = hl\gamma\left(\frac{1}{3} h^2 n^2 + b\left(hn + \frac{1}{2} b\right)\right)$$

Hilfsrechnung:

$$3{,}14 \,.\, 2400 = 314 \,.\, 24 \qquad\qquad 0{,}63 \,.\, 0{,}63$$

```
3,14 . 2400 = 314 . 24        0,63 . 0,63
              1256                  189
              628                   378
              7536              0,3969 : 3
                                0,1323
7536 (0,1323 + 0,332) = 7536 . 0,4643
                           22608
                          30144
                         45216
                        30144
                        3498,9648
```

Setzen wir in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte, so ergibt sich:

$$M = 3{,}14 \,.\, 1 \,.\, 2400 \left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}63^2 + 0{,}4\,(0{,}63 + 0{,}2)\right)$$

oder:

$$M = 3{,}14 \,.\, 2400 \left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}63^2 + 0{,}4 \,.\, 0{,}83\right)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$M = 3499 \text{ mkg}$$

Aus dieser und der vorigen Aufgabe folgt, dass die Stabilität durch Vergrösserung der Breite in hohem Grad vermehrt wird.

Aufgabe 190. Ein Kugelabschnitt von der Höhe $h = 30$ cm und zu einer Kugel vom Halbmesser $r = 20$ cm gehörig, liegt mit seiner Grundfläche auf einer Horizontalebene. Eine im Schwerpunkt desselben angreifende Kraft P wirkt unter einem Winkel $\alpha = 15^0$ gegen den Horizont auf Umwerfen des Körpers, dessen spez. Gewicht $\gamma = 0{,}7$ ist. Es ist die Grösse der Kraft P zu finden, so dass der Körper sich auf der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen befinde.

Hilfsrechnungen:

1). . . $\frac{3{,}14 \,.\, 30 \,.\, 30}{3}\left(60 - 30\right) . 0{,}7$

$= 3{,}14 \,.\, 10 \,.\, 30 \,.\, 30 \,.\, 0{,}7$

$= 314 \,.\, 3 \,.\, 30 \,.\, 0{,}7$

```
= 942 . 21
    942
  1884
  19782 g = 19,782 kg
```

2). . . $\frac{19{,}782}{\cos 15^0} = \log 19{,}782 - \log \cos 15^0$

log 19,782	=	1,2962702
— log cos 15⁰	=	—9,9849438—10
log P	=	1,3113264

mithin: P = 20,48

Auflösung. Zunächst ist das Volumen des Kugelabschnitts zu berechnen, und dieses mit dem spez. Gew. 0,7 zu multiplizieren. Das Volumen beträgt:

$$V = \frac{\pi h^2}{2}\left(3r - h\right)$$

(siehe Kleyers Lehrb. der Körperberechnungen, I. Buch)

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte und multiplizieren mit 0,7, so erhalten wir das Gewicht des Kugelabschnitts:

$$G = \frac{3{,}14 \,.\, 30^2}{3}\left(3 \,.\, 20 - 30\right) . 0{,}7$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$G = 19{,}782 \text{ kg}$$

Diese Kraft würde nötig sein, wenn P horizontal wirkte. Da die Kraft P aber unter einem Winkel von 15^0 gegen den Horizont wirkt, so ergibt sich für

$$P = \frac{G}{\cos\alpha}$$

oder die Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{19{,}782}{\cos 15^0}$$

und hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 2).:

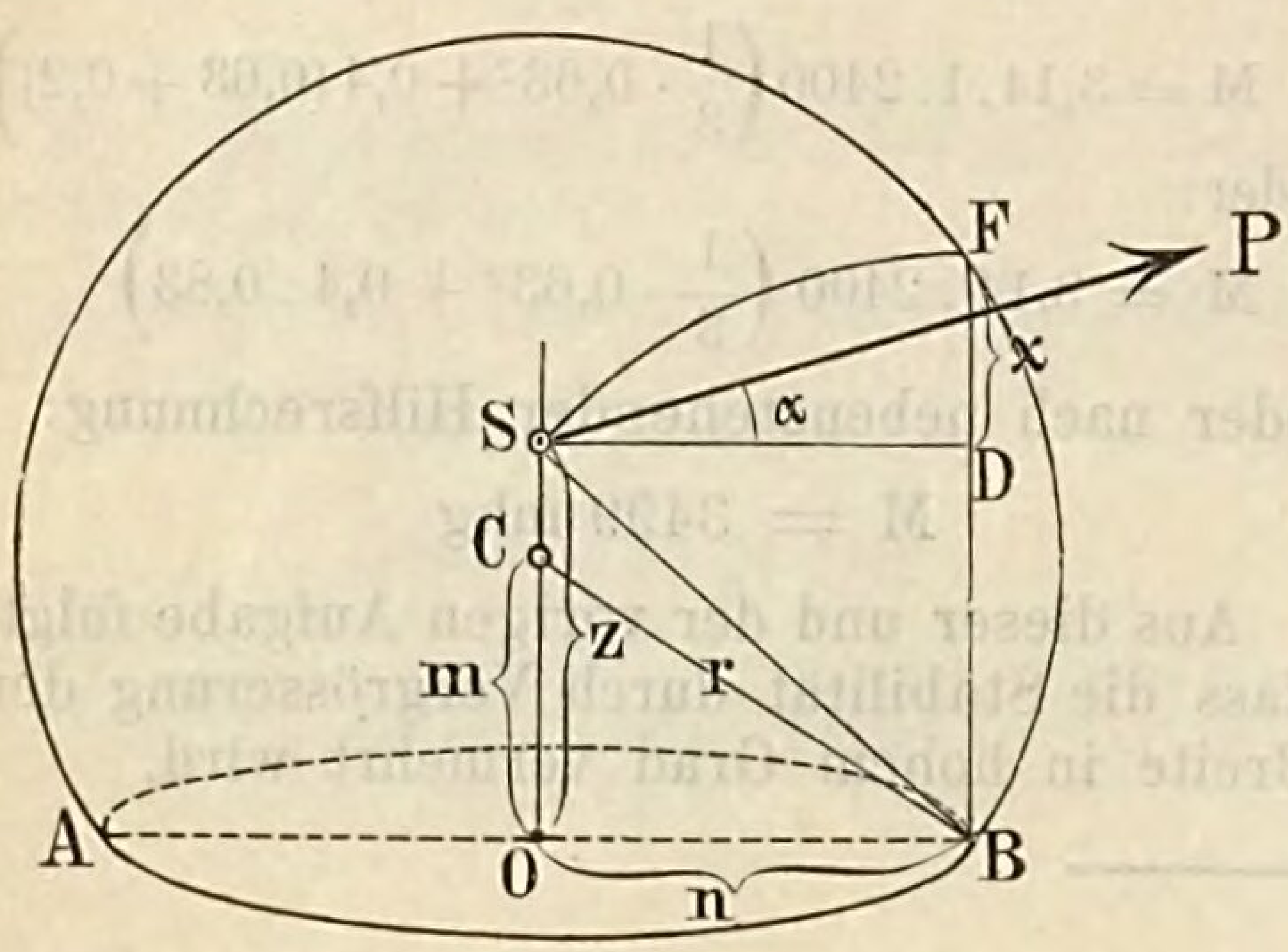
$$P = 20{,}48 \text{ kg}$$

Aufgabe 191. Bis zu welcher Höhe muss der Schwerpunkt des in voriger Aufgabe erwähnten Körpers gehoben werden und wie gross ist demnach die zu leistende mechanische Arbeit oder die dynamische Standfestigkeit des betreffenden Körpers?

Auflösung. In Bezug auf Fig. 214 ist die Kathete

$$m = h - r$$

Figur 214.



Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt{r^2-(h-r)^2} = \sqrt{r^2-(h^2-2hr+r^2)}$
$= \sqrt{r^2-h^2+2hr-r^2} = \sqrt{2hr-h^2}$
$= \sqrt{h(2r-h)}$

2). . . . $h-r+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)^2}{(3r-h)}$

$= \frac{(h-r)[4(3r-h)]+3(2r-h)^2}{4(3r-h)}$

$= \frac{(h-r)(12r-4h)+3(2r-h)^2}{4(3r-h)}$

$= 12hr-4h^2-12r^2$
$+ 4hr+3h^2+12r^2$
$-12hr$

$= \frac{4hr-h^2}{4(3r-h)} = \frac{h(4r-h)}{4(3r-h)}$

3). . . $\sqrt{30.10} = \sqrt{3|00} = 17{,}32$

```
   1
 2|200
   189
34|1100
   1029
346|7100
```

4). . . $\frac{30(80-30)}{4(60-30)} = \frac{30.50}{4.30} = 12\frac{1}{2}$

5). . .

```
 12,5 . 12,5         17,32 . 17,32
    625                   3464
  1500                    5196
 156,25                  12124
 299,9824                 1732
 456,23                299,9824
```

und demnach die Kathete

$$n = \sqrt{r^2-(h-r)^2}$$

oder:

$$n = \sqrt{h(2r-h)}$$ (siehe Hilfsrechn. 1)

Nach den Schwerpunktsbestimmungen (s. Antw. auf Frage 107) ist der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt beim Kugelabschnitt, also in Fig. 215:

$$\overline{CS} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)^2}{3r-h}$$

um nun den Abstand des Schwerpunkts von der Stützfläche zu finden, muss zu vorstehendem Wert für $\overline{CS}$ noch

$$\overline{CO} = h - r$$

addiert werden. Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 2). für

$$Z = \frac{h(4r-h)}{4(3r-h)}$$

Setzen wir in die Bestimmungsgleichungen für n und Z die gegebenen Zahlenwerte, so ergibt sich für

$$n = \sqrt{30(2.20-30)}$$

oder:

$$n = 17{,}32 \text{ cm}$$ (siehe Hilfsrechn. 3)

ferner erhält man für

$$Z = \frac{30(80-30)}{4(60-30)}$$

oder:

$$Z = 12\tfrac{1}{2}$$ (siehe Hilfsrechn. 4)

Aus n und Z lässt sich:

$$\overline{SB} = \overline{FB}$$

berechnen. Es ist:

$$\overline{FB} = \sqrt{Z^2+n^2}$$

Die Höhe, bis zu welcher der Schwerpunkt gehoben werden muss, ist somit:

$$x = \sqrt{Z^2+n^2} - Z$$

oder die berechneten Zahlenwerte eingesetzt:

$$x = \sqrt{12\tfrac{1}{2}^2 + 17{,}32^2} - 12\tfrac{1}{2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 5).:

$$x = 8{,}86 \text{ cm oder } 0{,}0886 \text{ m}$$

Multipliziert man aber das Gewicht des Körpers mit der Höhe, bis zu welcher der Schwerpunkt beim Umkippen gehoben wird, so erhält man die dynamische Stabilität des Körpers, d. h.:

$$A = Gh$$

oder:

$$A = 19{,}782 \,.\, 0{,}0886 \text{ m}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 6).:

$$A = 1{,}753 \text{ mkg}$$

Hilfsrechnung.

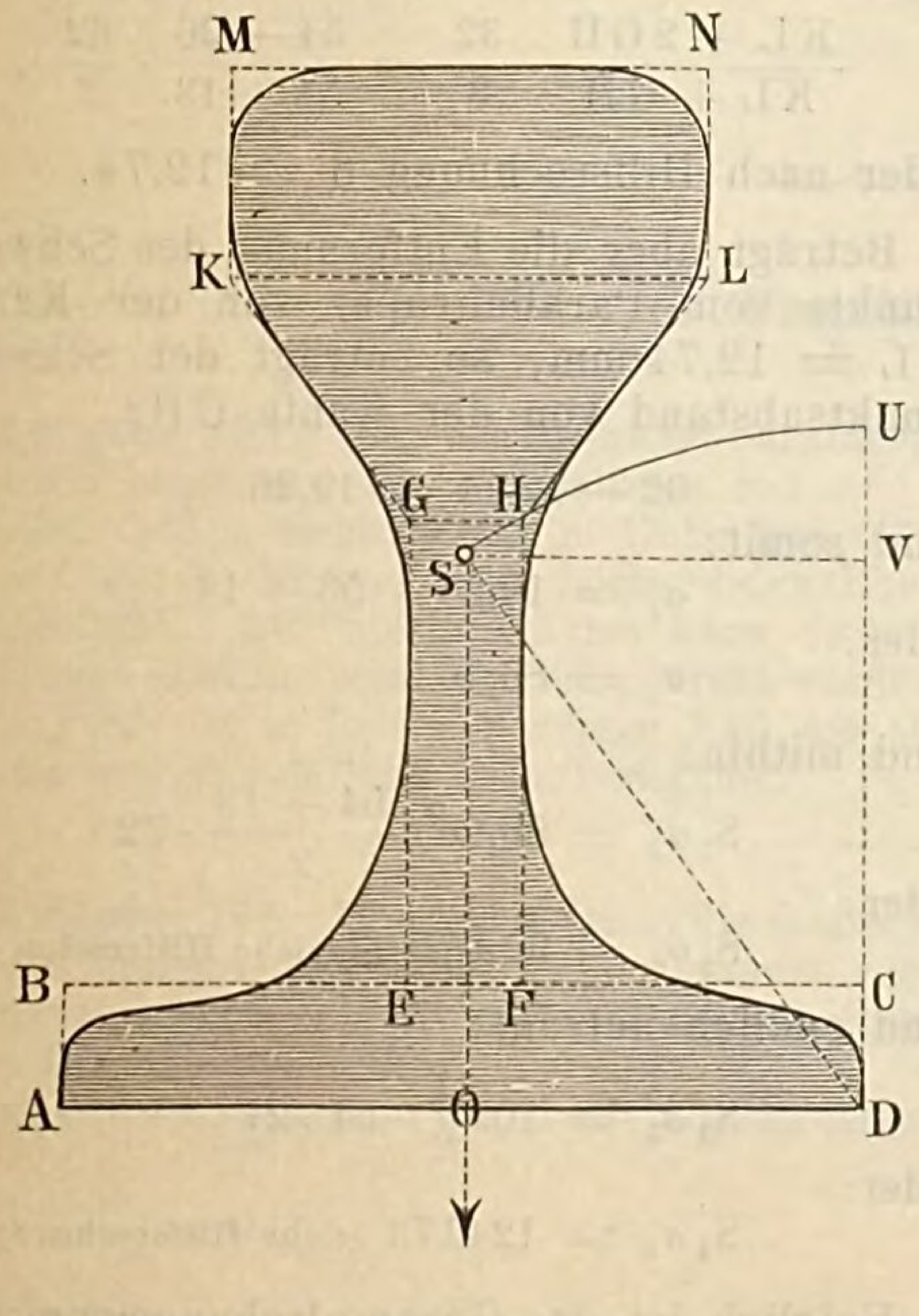
$\sqrt{4\,56,\!23} = 21{,}36$
4
4 | 56
41
42 | 1523
1269
426 | 25400

21,36
−12,5
8,86

6). 19,782 . 0,0886
118692
158256
158256
1,7526852

Aufgabe 192. Wie gross ist a) die statische, b) die dynamische Stabilität einer Eisenbahnschiene von dem Querschnitt der Fig. 215 auf je 1 m Länge, wenn bei der Berechnung die krummlienigen Begrenzungen durch die in der Figur angegebenen geraden Umrisse ersetzt werden, wobei $\overline{AB} = 14$ mm, $\overline{AD} = 93$ mm, $\overline{EF} = 13$ mm, $\overline{EG} = 53$ mm, $\overline{KL} = 54$ mm, $\overline{KM} = 21$ mm und die Höhe des Paralleltrapezes GHLK = 32 mm ist und das spez. Gewicht der Schiene = 7,82 beträgt?

Figur 215.



Auflösung. a). Zur Ermittelung beider Arten der Standfestigkeit ist zunächst das Gewicht des Körpers auf 1 m Länge zu berechnen.

Die Fläche ABCD beträgt		14 . 93	= 1302 qmm
„ „ EFHG	„	13 . 53	= 689 „
„ „ GHLK	„	$\frac{54+13}{2} \cdot 32$	= 1072 „
„ „ KLNM	„	54 . 21	= 1134 „
folglich die Gesamtquerschnittsfläche			= 4197 qmm

Die in Betracht kommende Länge beträgt 1 m = 1000 mm

und demnach das Volumen des Körpers:

$$4197 \,.\, 1000 = 4197000 \text{ cmm}$$

oder:

$$V = 4197 \text{ ccm}$$

Jeder Kubikcentimeter wiegt 7,82 g und demnach beträgt das Gewicht der Schiene auf 1 m Länge:

$$G = 4197 \,.\, 7{,}82 \text{ g}$$

oder:

$$G = 32{,}82 \text{ kg}$$ (s. Hilfsrechn. 2).

Da nun der Abstand der vertikalen Schwerlinie von der Kante A oder D $= \frac{1}{2}\overline{AD}$ beträgt, so ist die statische Stabilität:

$$M = 32{,}82 \cdot \frac{1}{2} \cdot 93 \text{ mm}$$

oder:

$$M = 32{,}82 \,.\, 0{,}0465 \text{ m}$$

oder:

$$M = 1{,}526 \text{ mkg}$$ (siehe Hilfsrechn. 3).

b). Zur Ermittelung der dynamischen Stabilität ist es nötig, die Höhe des Schwerpunkts des Schienenprofils zu berechnen. Dieselbe ergibt sich aus der Summe der Drehungsmomente, dividiert durch die Gesamtquerschnittsfläche. Nennen wir die Schwerpunkte der einzelnen Flächenstücke der Reihe nach S_1, S_2, S_3 und S_4, sowie

Hilfsrechnungen:

1). 93 . 14	53 . 13	33,5 . 32	54 . 21
372	159	670	54
93	53	1005	108
1302	689	1072,0	1134

die ihnen zugehörigen Arme σ_1, σ_2, σ_3 und σ_4, so ergibt sich für das Moment des Schwerpunkts der Fläche ABCD:

$$S_1 \sigma_1 = 14 . 93 . 7$$

oder:

$$S_1 \sigma_1 = 9114$$ (siehe Hilfsrechn. 4).

Der Schwerpunkt der Fläche EFHG liegt um

$$\frac{1}{2} \text{GE} = \frac{1}{2} \cdot 53$$

über EF, oder um

$$\frac{1}{2} \cdot 53 + 14 = 40^1/_2 \text{ mm}$$

über der Unterstützungsfläche, und somit ist das Moment des Schwerpunkts dieser Fläche:

$$S_2 \sigma_2 = 40\frac{1}{2} \cdot 13 . 53$$

oder:

$$S_2 \sigma_2 = 27\,904{,}5$$ (siehe Hilfsrechn. 5).

Der Abstand des Schwerpunkts im Paralleltrapez GHLK von der Kante $\overline{\text{LK}}$ beträgt nach den früher erwiesenen Schwerpunktsbestimmungen:

$$\frac{\text{KL} + 2\,\text{GH}}{\text{KL} + \text{GH}} \cdot \frac{32}{3} = \frac{54 + 26}{54 + 13} \cdot \frac{32}{3}$$

oder nach Hilfsrechnung 6 $= 12{,}74$.

Beträgt aber die Entfernung des Schwerpunkts vom Paralleltrapez von der Kante $\overline{\text{KL}} = 12{,}74$ mm, so beträgt der Schwerpunktsabstand von der Kante $\overline{\text{GH}}$:

$$32 - 12{,}74 = 19{,}26$$

und somit:

$$\sigma_3 = 19{,}26 + 53 + 14$$

oder:

$$\sigma_3 = 86{,}26$$

und mithin:

$$S_3 \sigma_3 = 86{,}26 \cdot \frac{54 + 13}{2} \cdot 32$$

oder:

$$S_3 \sigma_3 = 92\,472{,}06$$ (siehe Hilfsrechn. 7)

und endlich beträgt:

$$S_4 \sigma_4 = 109\frac{1}{2} \cdot 54 . 21$$

oder:

$$S_4 \sigma_4 = 124173$$ (siehe Hilfsrechn. 8).

Folglich ist das Gesamtdrehungsmoment:

$$S\sigma = 253\,663{,}56$$ (s. Hilfsrechn. 9).

Dividiert man dieses Moment durch die Summe der Querschnittsflächen:

$$14 . 93 + 13 . 53 + 32 . 33\frac{1}{2} + 54 . 21 = 4197$$

(siehe Hilfsrechn. 10)

Hilfsrechnungen.

```
2). . . . 4197 . 7,82          3).  32,82 . 0,0465
          8394                         16410
         33576                         19692
         29379                         13128
         32820,54 g                    1,526130
       = 32,82 kg              oder =  1,526 mkg

4). . . . 14 . 7 . 93          5).  53 . 13 . 40,5
        = 98 . 93                   159
          294                       53
          882                       689 . 40,5
          9114                         3445
                                      2756
                                      27904,5
```

6). . . $\frac{54 + 26}{54 + 13} = \frac{80}{67}$ $\frac{80}{67} \cdot \frac{32}{3} = \frac{2560}{201}$

```
        2560 : 201 = 12,74
        201
         550
         402
         1480
         1407
           730

7). . . 86,26 . 32             8).  109,5 . 54
        17256                         4380
       25878                         5475
       2760,36 . 33,5                 5913 . 21
         1380180                      5913
         828108                      11826
        828108                       124173
        92472,060
```

9). . . .

$$S_1\sigma_1 = 9114$$
$$S_2\sigma_2 = 27904{,}5$$
$$S_3\sigma_3 = 92472{,}06$$
$$S_4\sigma_4 = 124173$$
$$253663{,}56$$

```
10).  93 . 14      53 . 13      32 . 33,5      54 . 21
       372          689          670             54
       93                       1005            108
      1302                      1072,0          1134
     + 689
     +1072
     +1134
      4197

11). . . . 4197 | 253663,56 = 60,44
                  25182
                   18435
                   16788
                    16476
```

Hilfsrechnungen:

```
12). . . 60,44 . 60,44          46,5 . 46,5
         24176                   2325
         24176                  2790
        362640                  1860
        3652,9936               2162,25
       +2162,25
      √57|15,|24|36  = 75,6
       49             —60,44
      14|815           15,16 mm
         725
      150|9024
          9036

13). . . . . . 32,82 . 0,01516
                    19692
                    3282
                   16410
                   3282
                 0,4975512
```

so erhält man den Abstand des Gesamtschwerpunkts:

$$\sigma = \frac{253\,663{,}56}{4197}$$

oder:

$$\sigma = 60{,}44 \text{ mm}$$ (siehe Hilfsrechn. 11).

Aus $\overline{SO}$ und $\overline{OD}$ lässt sich $\overline{DS} = \overline{DU}$ ermitteln, denn es ist:

$$\overline{DS} = \sqrt{60{,}44^2 + 46{,}5^2}$$

und folglich:

$$\overline{VU} = \overline{DS} - \overline{OS}$$

oder:

$$\overline{VU} = \sqrt{60{,}44^2 + 46{,}5^2} - 60{,}44$$

oder:

$$\overline{VU} = 15{,}16 \text{ mm}$$ (s. Hilfsrechn. 12)

oder:

$$\overline{VU} = 0{,}01516 \text{ m}$$

Da nun der Schwerpunkt mit einer wagerecht im Schwerpunkt angreifenden Kraft von 32,82 kg um 0,01516 m beim Umwerfen gehoben werden muss, so beträgt die zu leistende Arbeit pro 1 m Länge:

$$A = 32{,}82 \,.\, 0{,}01516$$

oder:

$$A = 0{,}4975 \text{ mkg}$$ (s. Hilfsrechn. 13).

d. Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 193. Ein rechtwinklig parallelepipedisch behauener Eichenholzblock von 2,65 m Länge, 0,68 m Breite, 0,52 m Höhe und 0,707 spez. Gewicht ist von einer horizontalen Ebene unterstützt. Auf wieviele Arten kann derselbe aufliegen und um seine Kanten gedreht werden? Wie gross ist in jedem einzelnen Fall die statische und dynamische Standfestigkeit?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 180.

Aufgabe 194. Wie gross ist a) die statische, b) die dynamische Stabilität einer geraden regulären sechsseitigen Pyramide, wenn eine Kante der Grundfläche 52 cm, die Höhe 2,48 m beträgt und 1 Kubikmeter der Masse 2700 kg wiegt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 181. Die reguläre Sechsecksfläche lässt sich leicht nach dem pythag. Lehrsatz als auch trigonometrisch berechnen, wenn man dieselbe vom Mittelpunkt aus in 6 reguläre Dreiecke zerlegt und auf deren Grundlinien Lote gefällt denkt.

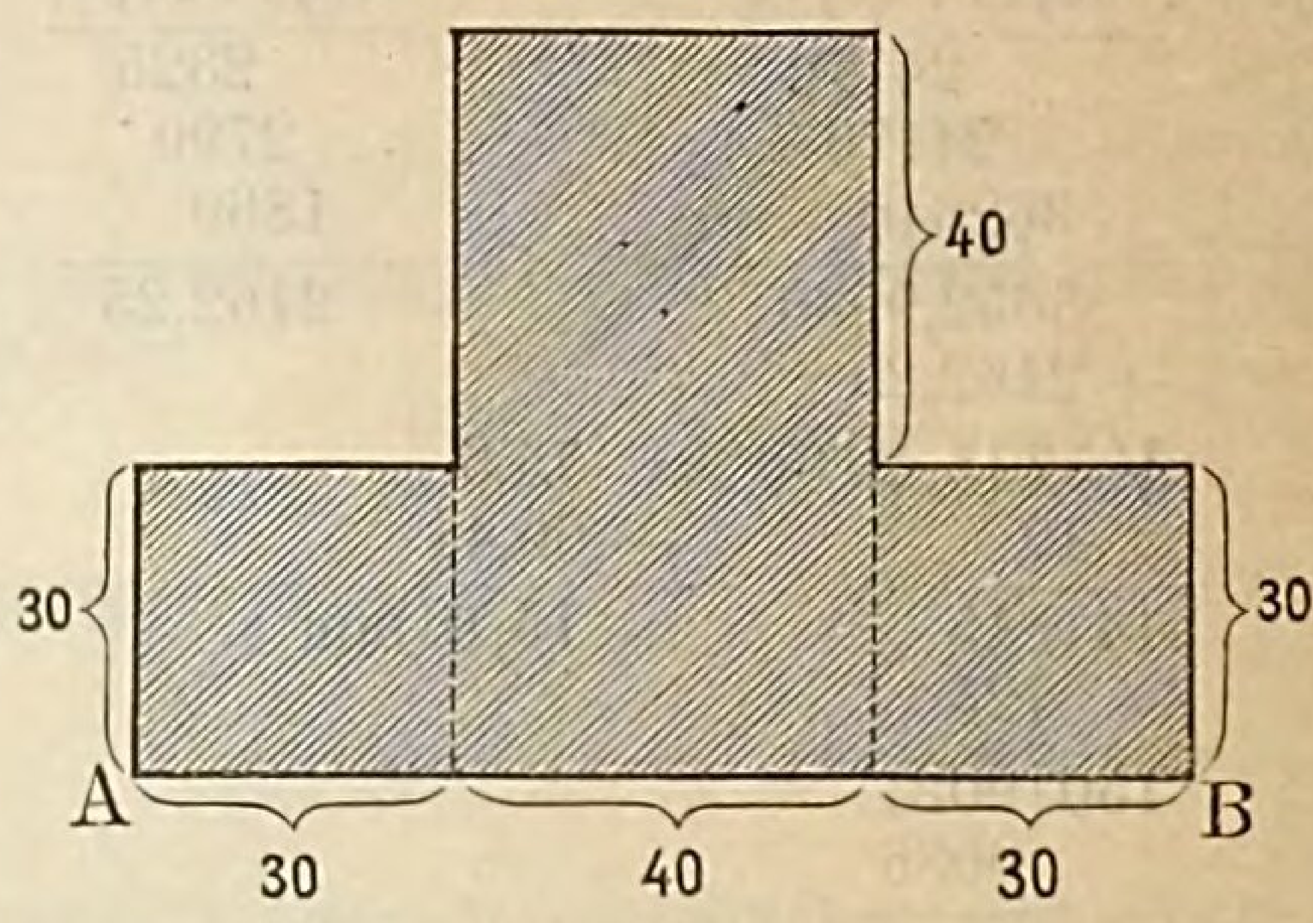
Aufgabe 195. Wie gross ist das Stabilitätsmoment eines Schornsteins von 30 m Höhe, welcher an seinem unteren Ende 2,1 m, an seinem oberen Ende 1,2 m Durchmesser hat, bei einer Wandstärke von 0,36 cm, wenn das spez. Gewicht für trockenes Mauerwerk von Ziegelsteinen 1,47 ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 182.

Aufgabe 196. Ein Sandsteinblock (spez. Gewicht = 2,64) bestehe aus drei rechtwinkligen Parallelepipedon mit den in Fig. 216 angegebenen Massgrössen in cm, während seine Ausdehnung von vorn nach hinten 50 cm beträgt. Wie gross ist seine statische und dynamische Stabilität a) in Bezug auf die von vorn nach hinten durch A gehende wagerechte Kante, b). in Bezug auf die Kante $\overline{AB}$?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog den gelösten Aufgaben 183 und 184.

Figur 216.



Aufgabe 197. Ein Zinnblock in Form einer abgestumpften Pyramide von regulärem sechsseitigem Querschnitt hat an der Grundfläche 12 cm, an der oberen Fläche 9 cm Kante bei 30 cm Höhe. Wie gross ist das Stabilitätsmoment, wenn die Pyramide

a). auf der grösseren,
b). „ „ kleineren

der beiden parallelen Flächen steht und wenn 1 ccm Zinn = 7,29 g wiegt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 185. Der Inhalt der regulären Sechsecksflächen lässt sich nach dem pythag. Lehrsatz oder auch auf trigonometrischem Wege finden, wenn man dieselben von ihrem Mittelpunkt aus in 6 reguläre Dreiecke zerlegt denkt. Uebrigens sei hier bemerkt, dass der Flächeninhalt eines solchen regulären Dreiecks von der Kante a $F = 0{,}433\,a^2$ und somit der Inhalt der regulären Sechseckfläche von der Kante a

$$F = 2{,}598\,a^2$$

beträgt.

Aufgabe 198. Eine Mauer von dem Querschnitt Fig. 213 habe eine untere Breite von 75 cm, eine obere Breite von 50 cm bei $2^1/_4$ m Höhe. Wie gross ist die Stabilität auf 1 m Länge, wenn a) die linke, b). die rechte Seitenkante als Kippkante angesehen wird und wenn das spez. Gewicht des trockenen Mauerwerks = 1,6 ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog den gelösten Aufgaben 186 und 189.

Aufgabe 199. Eine 8 m lange Mauer vom Querschnitt Fig. 214 hat eine untere Breite von 1 m und eine obere Breite von 50 cm bei 2,85 m Höhe. Wie gross ist bei einem spez. Gewicht des Mauerwerks von 2,5 die Stabilität der Mauer?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 187.

Aufgabe 200. Ein Kugelabschnitt aus dichtem Kalkstein (spez. Gewicht = 2,7) habe eine Höhe von 50 cm bei einem Radius von 38 cm und liege mit seiner Grundfläche auf einer Horizontalebene. Eine im Schwerpunkt desselben angreifende Kraft P wirke unter einem Winkel von 30° gegen den Horizont gerichtet auf Umwerfen des Körpers.

a). Wie gross müsste eine horizontal wirkende, im Schwerpunkt des Körpers angreifende Kraft sein?

b). Wie gross ist die unter einem Winkel von 30° angreifende Kraft?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog den Auflösungen der Aufgaben 190 und 191.

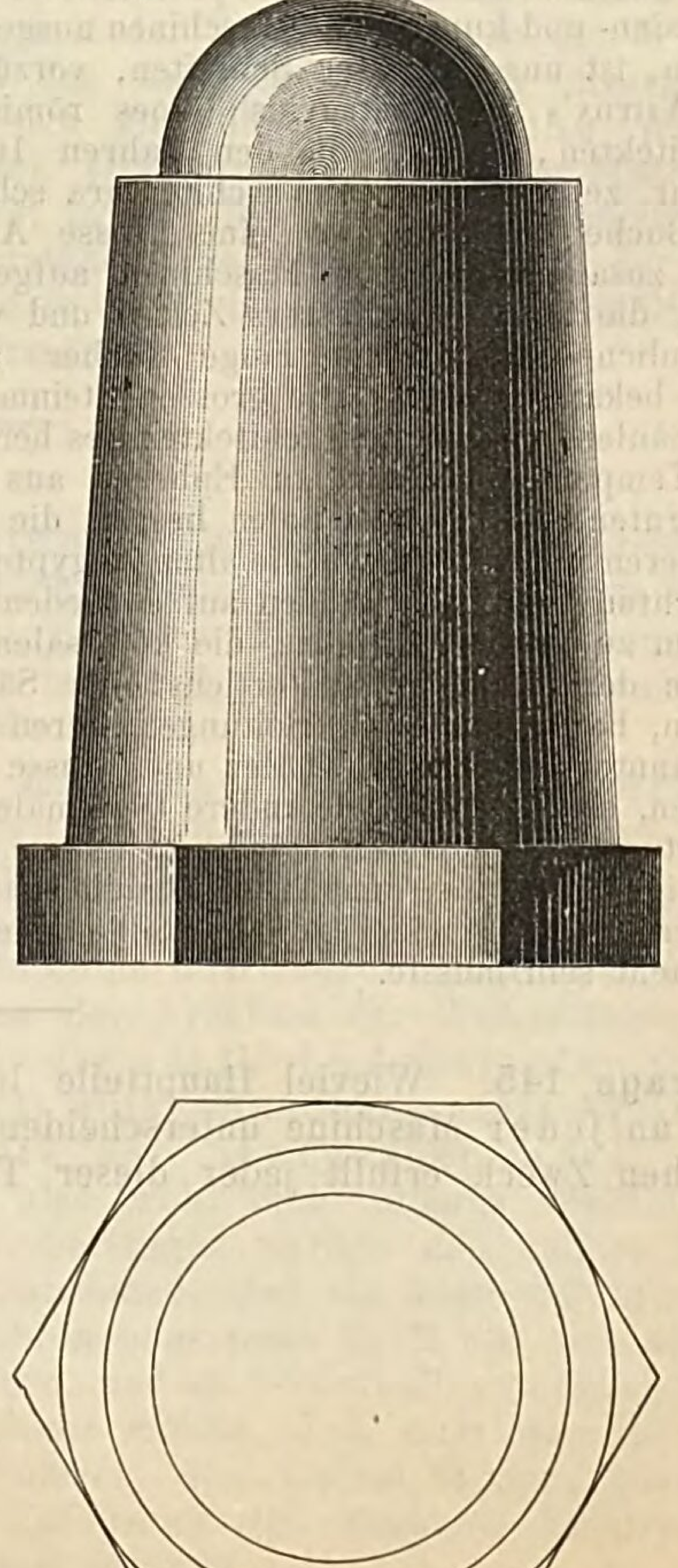
c). Wie hoch muss der Schwerpunkt gehoben werden, ehe er senkrecht über die Kippkante zu liegen kommt?

d). Wie gross ist überhaupt die dynamische Stabilität?

Aufgabe 201. Ein Meilenstein, siehe Fig. 217, hat zur Basis einen prismatischen Unterbau mit regulärer sechsseitiger Grundfläche, auf welcher ein Kegelstumpf ruht, dessen Grundfläche von einem dem Sechseck des Unterbaus einbeschriebenen Kreis von 16 cm Radius gebildet wird und dessen obere Kreisfläche 12 cm Radius hat. Auf der oberen Fläche dieses Kegelstumpfs ruht eine Halbkugel von 10 cm Halbmesser. Wie gross ist a). die statische, b). die dynamische Stabilität dieses Körpers, wenn die Höhe des sechseckigen Unterbaus 10 cm, die Höhe des Kegelstumpfs 70 cm und das spez. Gewicht des Sandsteinkörpers 2,5 beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 192, indem man für jedes einzelne Stück des gegebenen Körpers das Drehungsmoment und hieraus den Abstand des Schwerpunkts des gesamten Körpers berechnet. Die Grundfläche ergibt sich aus dem dem Sechseck einbeschriebenen Kreis.

Figur 217.



11). Von den einfachen Maschinen oder mechanischen Potenzen.

a. Von den Maschinen überhaupt.

Frage 144. Was versteht man im allgemeinen unter einer Maschine und woraus ergibt sich die Notwendigkeit ihrer Anwendung?

Erkl. 195. Eine Maschine allein kann als tote Masse nach dem Gesetz der Trägheit keine mechanische Arbeit hervorbringen, sondern nur eine zweckmässige Uebertragung derjenigen Arbeitsgrösse vermitteln, welche von den auf die Maschine einwirkenden Kräften ausgeübt wird. Dass schon die Alten, wenn auch weniger auf theoretischem als vielmehr auf praktischem Wege sehr sinn- und kunstreiche Maschinen ausgeführt haben, ist uns aus ihren Schriften, vorzüglich aus Vitruv's oder Vitruvius' (eines römischen Architekten, welcher in den Jahren 16—13 v. Chr. zehn Bücher: De architectura schrieb) 10. Buche bekannt, wo eine grosse Anzahl sehr zusammengesetzter Maschinen aufgezählt wird, die zu des Verfassers Zeiten und wahrscheinlich auch schon lange vorher allgemein bekannt waren. Die grossen Steinmassen und Säulen, welche die Architekten des berühmten Tempels der Diana zu Ephesus aus sehr entfernten Steinbrüchen holen liessen, die noch grösseren Lasten, welche die alten Aegypter zur Errichtung ihrer Pyramiden auf so bedeutende Höhen zu bringen wussten, die kolossalen Gebäude der Römer, ihre Porticus oder Säulenhallen, Bäder und Wasserleitungen, deren weitgespannte Bogen über Thäler und Flüsse wegsetzten, diese und soviele andere Denkmäler des Altertums sind uns hinlängliche Zeugnisse, dass die eigentliche Instrumental-Mechanik schon in frühen Zeiten zu einer grossen Vollkommenheit gebracht sein musste.

Antwort. Fast nie können die mechanischen oder physischen Kräfte in der Form, in welcher sie in der Natur auftreten, direkt zur Arbeitsleistung angewandt werden; überall bedarf es erst gewisser Vorrichtungen, um die Kraft des Wassers, des Windes, des Dampfes, der Elektricität, der ziehenden Pferde etc. in zweckmässige Arbeit umzuwandeln und durch diese Naturkräfte die Kraft des Menschen zu ersetzen. Solche Vorrichtungen nun, durch welche der Angriffspunkt, die Richtung oder die Grösse einer Kraft geändert oder eine Arbeit übertragen wird, heisst Maschine. Oder (nach *Redtenbacher*): Eine Maschine ist eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, dass durch dieselbe mechanische Naturkräfte genötigt werden können, unter bestimmten Bedingungen zu wirken. Diese Wirkung besteht gewöhnlich in der Ueberwindung eines Widerstands oder einer Last Q, erzeugt durch eine Kraft P.

Frage 145. Wieviel Hauptteile lassen sich an jeder Maschine unterscheiden und welchen Zweck erfüllt jeder dieser Teile?

Antwort. An jeder solcher Vorrichtung, die nach obiger Erklärung den Namen „Maschine" verdient, lassen sich drei Teile, jeder einen besonderen Zweck erfüllend, unterscheiden: der erste nimmt die Einwirkung der Naturkraft so vollständig als möglich auf, weshalb er nach der Natur der letzteren gebaut sein muss; der zweite hat sie auf bestimmte Weise umzuwandeln, was auf verschiedenem Wege geschehen kann; der dritte endlich verrichtet die beabsichtigte Arbeit und muss auf die Beschaffenheit dieser berechnet sein. Bald sind diese drei Teile, wie in den meisten Handwerkszeugen, höchst einfach und in einen Körper vereinigt, bald hingegen bestehen sie selbst wieder aus einer Reihe mit- und nacheinander wirkender Teile. Auch im letzteren Fall

kann aber jeder solcher Teil als eine einfache Maschine betrachtet werden, welche von der einen Seite die Wirkung eines früheren bewegenden Teils empfängt, nach der andern sie an einen folgenden widerstehenden Teil abgibt.

Frage 146. Wievielfacher Art sind die von einer Maschine zu überwindenden Widerstände und was versteht man unter Nutzleistung und Nebenleistung einer Maschine?

Antwort. Die von einer Maschine zu überwindenden Widerstände sind teils solche, in deren Ueberwindung eben die eigentliche Arbeit und Aufgabe, der Zweck der Maschine besteht (nützliche Widerstände), teils solche, welche bei der Thätigkeit der Maschine durch die Reibung, durch die Steifigkeit der Seile und durch den Widerstand des umgebenden Mittels unvermeidlich sich einstellen (schädliche Widerstände). Die Nutzleistung einer Maschine besteht in der Ueberwindung der nützlichen Widerstände, die Nebenleistung der Maschine in der Ueberwindung der schädlichen Widerstände.

Frage 147. Um eine klare und richtige Vorstellung von den Wirkungen einer Maschine zu bekommen, sind welche Fundamentalsätze der Mechanik zu wissen nötig?

Erkl. 196. Die so zahlreich angestellten Versuche zur Herstellung eines Perpetuum mobile beruhen auf der irrigen Voraussetzung, als könne man mehrere einfache Maschinen so verbinden, dass ein erster Teil die in ihm vorhandene Kraft unvermindert auf einen zweiten, dieser ebenso auf einen dritten etc. und endlich der letzte wieder auf den ersten übertragen.

Erkl. 197. Ist demnach eine Maschine so eingerichtet, dass die Last nur einen sehr kleinen, die Kraft aber einen grossen Weg zurücklegt, so muss auch die Kraft P in demselben Verhältnis sehr klein gegen die Last Q sein, und man kann demnach durch eine solche Maschine mit einer sehr kleinen Kraft eine sehr grosse Last überwinden. Nur muss die Kraft einen langen Weg zurücklegen, während die Last sich wenig fortbewegt.

Antwort. Um eine klare und richtige Vorstellung von den oft angestaunten Wirkungen einer Maschine zu bekommen, merke man sich folgende Fundamentalsätze der Mechanik:

1). Eine Maschine kann nur Arbeit leisten, wenn sie vorher solche empfangen hat (siehe Erkl. 195).

2). Da die von der bewegenden Kraft auf die Maschine übertragene Arbeit gleich der Summe der Arbeiten der Widerstände ist, so ist die nützliche Arbeit (der Nutzeffekt) einer Maschine stets kleiner, als die der bewegenden Kraft. Es kann also wohl eine anfangs vorhandene Kraft übertragen werden und andere Formen annehmen, aber sie kann sich niemals vermehren oder neue Kraft aus sich selbst erzeugen, und es ist deshalb unmöglich, ein Perpetuum mobile, d. i. eine Maschine zu konstruieren, die, einmal in Gang gesetzt, ohne Zuführung von äusseren Kräften in Ewigkeit fortgeht.

3). Die Arbeit der Kraft ist gleich der Arbeit der Last, d. h. das Produkt aus Kraft mal Kraftweg ist gleich dem Produkt aus Last mal Lastweg, wenn die Maschine ungestört und mit unveränderter Geschwindigkeit arbeitet, d. h. wenn dieselbe im Gleichgewicht ist. Bezeichnet man den

Kraftweg mit S, den Lastweg mit s, so ist $PS = Qs$, woraus sich ergibt, dass $P:Q = s:S$, d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie der Lastweg zum Kraftweg.

Daraus folgt die goldene Regel der Mechanik:

Soviel durch eine Maschine an Kraft gewonnen wird, ebensoviel geht an Weg oder Zeit verloren.

Da die Wege von Kraft und Last in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, so kann man das vorstehende Gesetz auch so ausdrücken:

Die Geschwindigkeiten von Kraft und Last verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen oder Gewichte.

Frage 148. Wodurch wird man in den Stand gesetzt, die Leistung irgend einer zusammengesetzten Maschine zu berechnen?

Antwort. Um die Leistung irgend einer zusammengesetzten Maschine, nämlich das Verhältnis der bewegenden Kraft zu der bewegten Last berechnen zu können, ist es nötig, dass man vorerst die Wirkung der einzelnen Teile kennen lernt, aus denen die Maschine zusammengesetzt ist.

Frage 149. Was versteht man unter Elementarmaschinen oder mechanischen Potenzen?

Antwort. So ungeheuer mannigfaltig die für das praktische Leben hergestellten Maschinen auch sein mögen, so einfach sind die Teile, aus denen sie zusammengesetzt sind. Diese zu einer Maschine verbundenen Teile nennt man Elementarmaschinen, mechanische Potenzen oder mechanische Elemente.

Frage 150. Welches sind die mechanischen Elemente oder einfachen Maschinen und wie gruppiert man dieselben?

Erkl. 198. Streng genommen sind nur der Hebel und die schiefe Ebene eigentliche Maschinenelemente, denn die Eigenschaften des Wellrads und der Rolle ergeben sich ganz aus den für den Hebel gültigen mechanischen Gesetzen, da diese Maschinen nur eigentümliche Formen des Hebels sind. Ebenso lassen sich Keil und Schraube ganz auf die schiefe Ebene zurückführen.

Antwort. Nach der Art ihrer Bewegung unterscheidet man einfache Maschinen mit drehender und solche mit fortschreitender Bewegung. Zu den ersteren gehören:

der Hebel, die Rolle und das Wellrad,

und zu den letzteren:

die schiefe Ebene, der Keil und die Schraube.

Anmerkung 5. Bei den nachfolgenden Auseinandersetzungen der bei den sechs Elementarmaschinen gültigen Gesetze bleiben zunächst die Bewegungshindernisse oder schädlichen Widerstände unberücksichtigt und es kommen nur Last und Kraft nebst ihren Wegen insoweit in Betracht, als für den Gleichgewichtszustand der Maschinen nötig ist, weil man nur die nötigen Bedingungen für das Eintreten dieses Zustands zu kennen braucht, um durch einen geringen Mehraufwand von Kraft etc. die gewünschte Bewegung zu erzeugen.

b. Der Hebel.

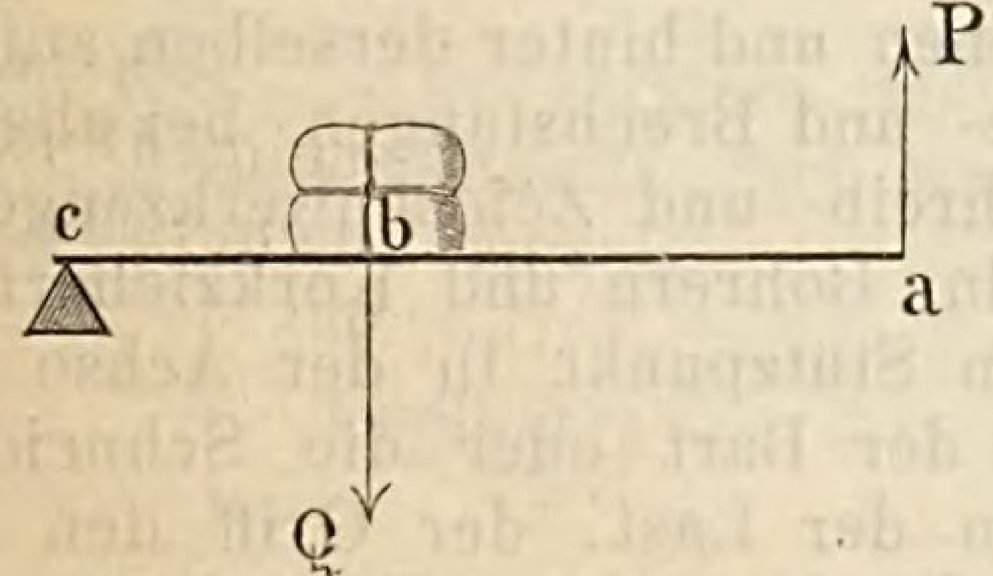
Frage 151. Was ist ein Hebel, wozu dient derselbe gewöhnlich und welches sind die bemerkenswerten Punkte an demselben?

Erkl. 199. Hebel heisst im allgemeinsten Sinn des Worts jede gerade oder krumme Linie, jede gegebene Fläche und jeder willkürlich gestaltete Körper, wenn man bei ihnen einen festen Punkt annehmen kann, um welchen sie durch eine Kraft oder durch mehrere auf willkürliche Angriffspunkte wirkende Kräfte gedreht werden können. Der Begriff des Hebels wird selbst durch die Bewegung des festen Punkts nicht aufgehoben, wie denn z. B. namentlich die Gesetze des Hebels bei dem Gliederbau der Menschen und Tiere auch bei deren Bewegungen noch in Betracht kommen. Um aber dieses vielseitige Ganze unter einen gemeinsamen Begriff zu vereinigen, unterscheidet man den mathematischen und den physischen Hebel, konstruiert die Gesetze an dem ersteren und wendet sie dann auf den letzteren an.

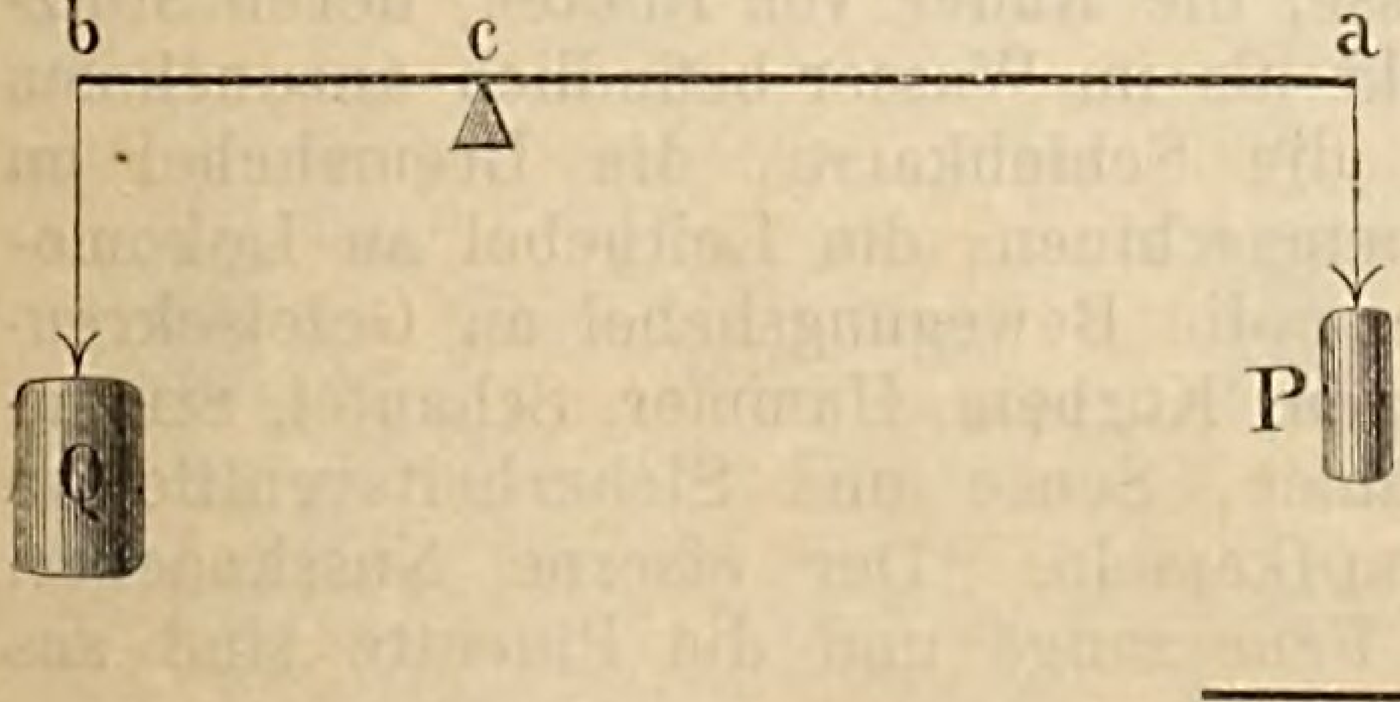
Antwort. In seiner einfachsten Form ist der Hebel eine unbiegsame, meist gerade, zuweilen aber auch gekrümmte oder knieförmig gebogene Stange, welche an irgend einem Punkt, dem Umdrehungs- oder Unterstützungspunkt auf einer Unterlage oder Stütze so aufliegt, dass sie sich um denselben drehen kann, und auf welche an verschiedenen Punkten ausserhalb des Ruhepunkts zwei oder mehrere Kräfte wirken. Gewöhnlich wird mit Hilfe des Hebels eine grössere Kraft, welche als Widerstand oder als zu fördernde Last erscheint, durch eine kleinere Triebkraft, z. B. die Muskelkraft der Menschen und Tiere, überwältigt; die erstere bezeichnet man deshalb durchweg als die Last = Q, die letztere als die Kraft = P. Der Punkt, an welchem beim Hebel die Last angreift, heisst der passive oder Druckpunkt, der Punkt, an welchem die Kraft angreift, ist der Angriffs- oder aktive Punkt, während der Punkt, wo der Hebel aufliegt oder unterstützt wird, Ruhepunkt, Stützpunkt, Drehpunkt, fester Punkt oder Hypomochlion (vom griech. mochlós = der Hebel) genannt wird.

Frage 152. Nach der gegenseitigen Lage der vorerwähnten drei Hebelpunkte unterscheidet man welche Arten von Hebeln?

Figur 218.



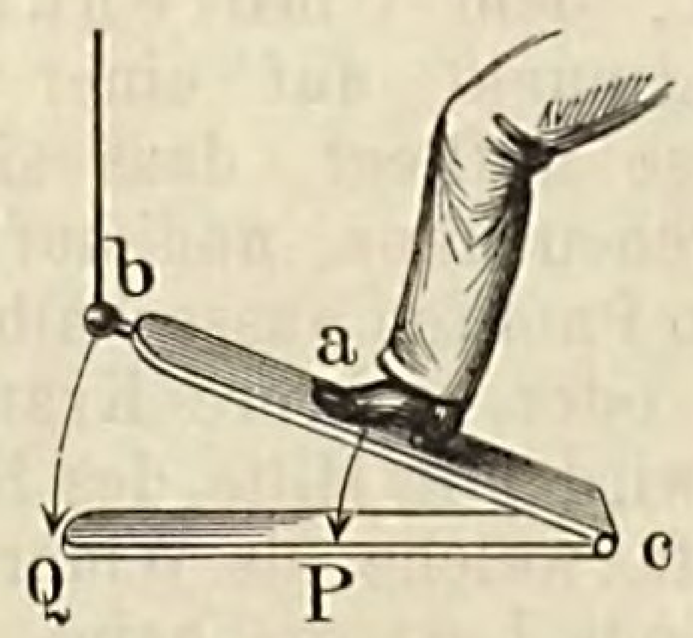
Figur 219.



Antwort. Je nach der gegenseitigen Lage der drei Hebelpunkte unterscheidet man den einarmigen Hebel (Fig. 218), bei welchem der Stützpunkt *c* an einem Endpunkt des Hebels liegt, mithin die Last Q und die Kraft P nur auf der einen Seite desselben wirken, und den zweiarmigen Hebel (Fig. 219), bei welchem der Stützpunkt *c* zwischen den Angriffspunkten von Kraft und Last liegt, folglich Kraft und Last auf den entgegengesetzten Seiten des Stützpunkts wirken.

Frage 153. Welche zwei Fälle lassen sich am einarmigen Hebel in Bezug auf die Lage der Angriffspunkte von Kraft und Last unterscheiden?

Figur 220.



Antwort. Bei dem einarmigen Hebel liegt der Widerstand oder die Last Q entweder zwischen der Stütze *c* und dem Angriffspunkt *a* der Kraft, wie in Fig. 219, oder die Kraft wirkt zwischen dem Ruhepunkt *c* und dem Angriffspunkt der Last (s. Fig. 220). Im letzteren Fall erspart man nichts an Kraft, wohl aber am Weg, indem die Kraft beim Durchlaufen eines verhältnismässig kurzen Wegs dem Angriffspunkt des Widerstands eine schnelle Bewegung erteilt, wie es z. B. der Fall ist beim Trittbrett der Nähmaschine, der Drehbank, des Schleifsteins u. s. w. Ist die Entfernung *ac* (Fig. 220) beispielsweise die Hälfte von *bc*, so beschreibt die Kraft P in derselben Zeit auch nur den halben Weg wie die Last Q, und letztere bewegt sich also doppelt so schnell als die Kraft.

Frage 154. In Anbetracht der Antworten auf die beiden vorhergehenden Fragen unterscheidet man wieviele und welche Hebelarten?

Antwort. In Anbetracht der Antworten auf die beiden vorhergehenden Fragen gibt es drei Arten von Hebeln:

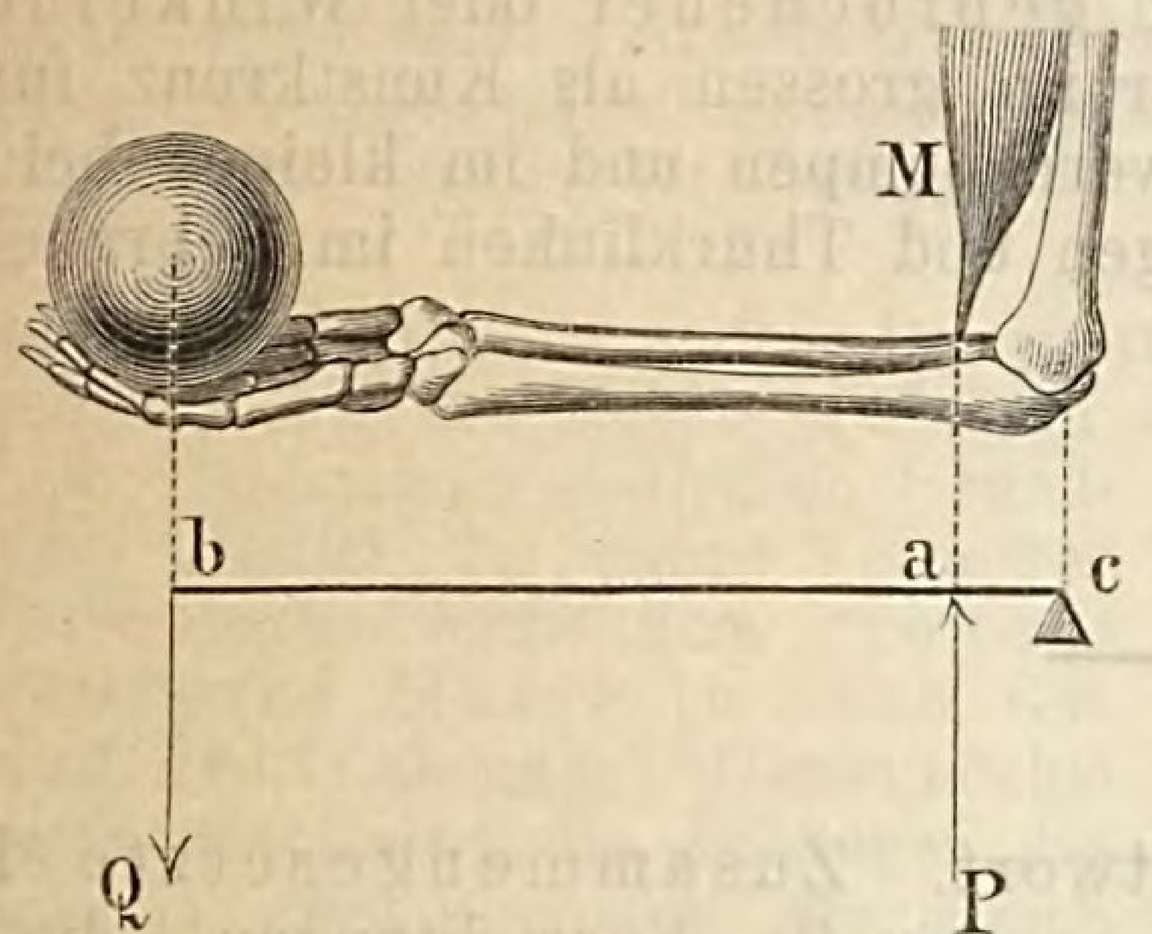
1). Zweiarmige Hebel, bei denen die Stütze zwischen Kraft und Last liegt, wie bei der Krämerwage, der Schnellwage, der Schere und Zange, dem Schlagbaum, der Klaviertaste, dem Pumpenschwengel, dem Schaukelbrett, dem Balancier der Dampfmaschine, der Hebe- und Brechstange, sobald letztere von der Last unterstützt sind.

2). Druckhebel, bei denen die Last oder der Widerstand zwischen dem Stützpunkt und dem Angriffspunkt der Kraft liegt (Fig. 219), wie z. B. bei den unter die Last geschobenen und hinter derselben aufgesetzten Hebe- und Brechstangen, bei allen Messern, Schreib- und Zeichenwerkzeugen, bei Schlüsseln, Bohrern und Korkziehern, welche ihren Stützpunkt in der Achse haben, während der Bart oder die Schneide den Hebelarm der Last, der Griff den Hebelarm der Kraft bildet. Es gehören ferner hierher die an dem einen Ende befestigten Zucker- und Brotscheren, die Stroh- und Tabakschneiden, die Zitronen- und Kartoffelpresse, die Ruder von Booten, deren Stützpunkt als im Wasser befindlich anzunehmen ist, die Schiebkarre, die Bremshebel an Hebemaschinen, die Leithebel an Lokomotiven, die Bewegungshebel an Geleisekreuzungen, Kurbeln, Hammer, Schaufel, Stimmhammer, Sense und Sicherheitsventile an Dampfkesseln. Der eiserne Nussknacker, die Feuerzange und die Pincette sind aus

je 2 einarmigen Hebeln mit einem gemeinsamen Drehpunkt zusammengesetzt.

3). W u r f h e b e l, bei denen die Kraft zwischen dem Stützpunkt und der Last wirkt (wie Fig. 220), und welche Hebel bei fast allen unseren Kraftäusserungen, sowie bei den meisten Muskelbewegungen der Tiere vorkommen, indem die Muskeln, durch welche die Knochen in ihren Gelenken gedreht werden, dem Drehungspunkt viel näher liegen als dem Schwerpunkt der zu erhebenden Last. So wirkt beim Arm des Menschen (Fig. 221) die Kraft P mittels des Muskels M ganz nahe am Stützpunkt *c* und erteilt daher der weit entfernten Last Q eine grosse Bewegung. Dreschflegel und Schleuder, sowie der Tritt an der Drehbank, dem Schleifstein u. dergl. sind ebenfalls Wurfhebel. Auch die zweiarmigen Hebel lassen sich in Druck- und Wurfhebel unterscheiden; bei ersteren liegt immer der Unterstützungspunkt mehr der Last, bei letzteren mehr der Kraft genähert.

Figur 221.



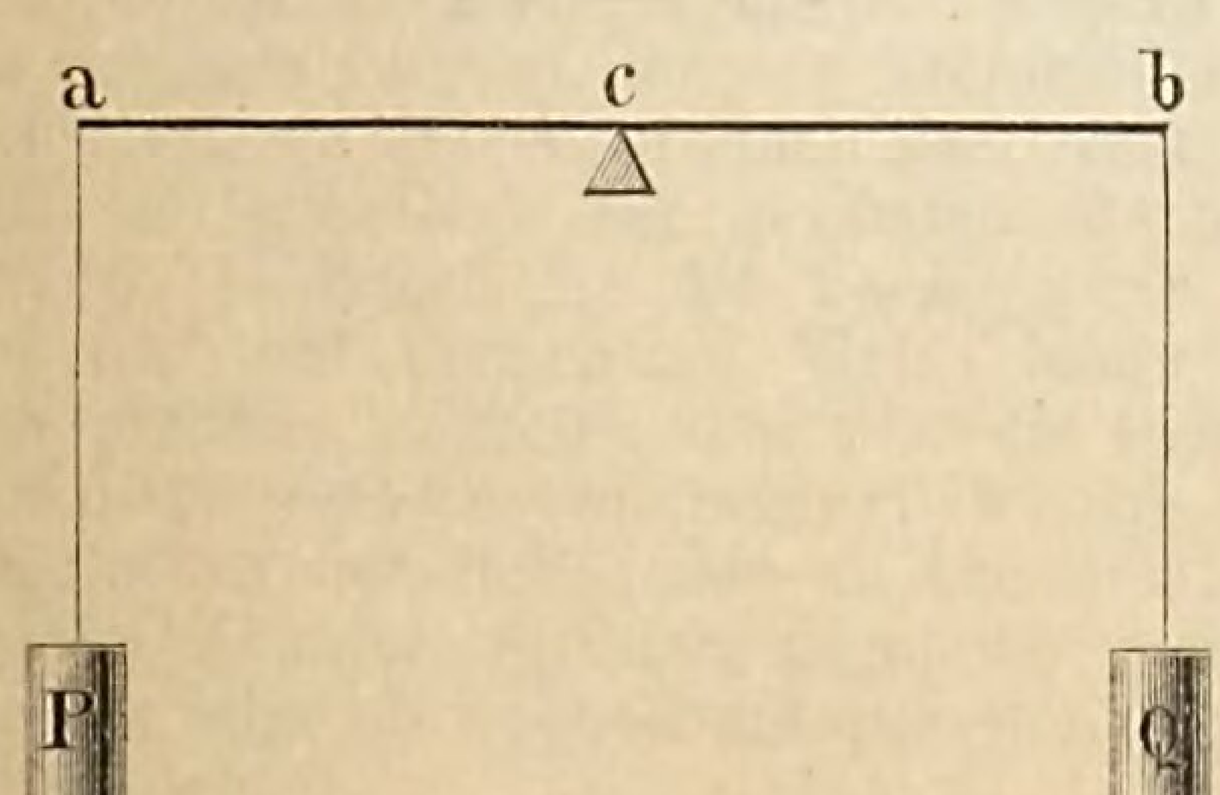
Frage 155. Wie nennt man bei allen Hebeln die senkrechten Entfernungen der Kraft und Last vom Drehpunkt?

Antwort. Die senkrechten Entfernungen der Kraft und Last vom Drehpunkt nennt man H e b e l a r m e, und zwar ist dieses Wort hier in physischem Sinn zu nehmen und nicht in der mathematischen Bedeutung, wie es bereits bei den statischen Momenten Erwähnung fand und wonach jeder Hebel soviel Arme hat, als Kräfte an demselben wirken.

Frage 156. Was versteht man unter einem m a t h e m a t i s c h e n, und was unter einem p h y s i s c h e n Hebel?

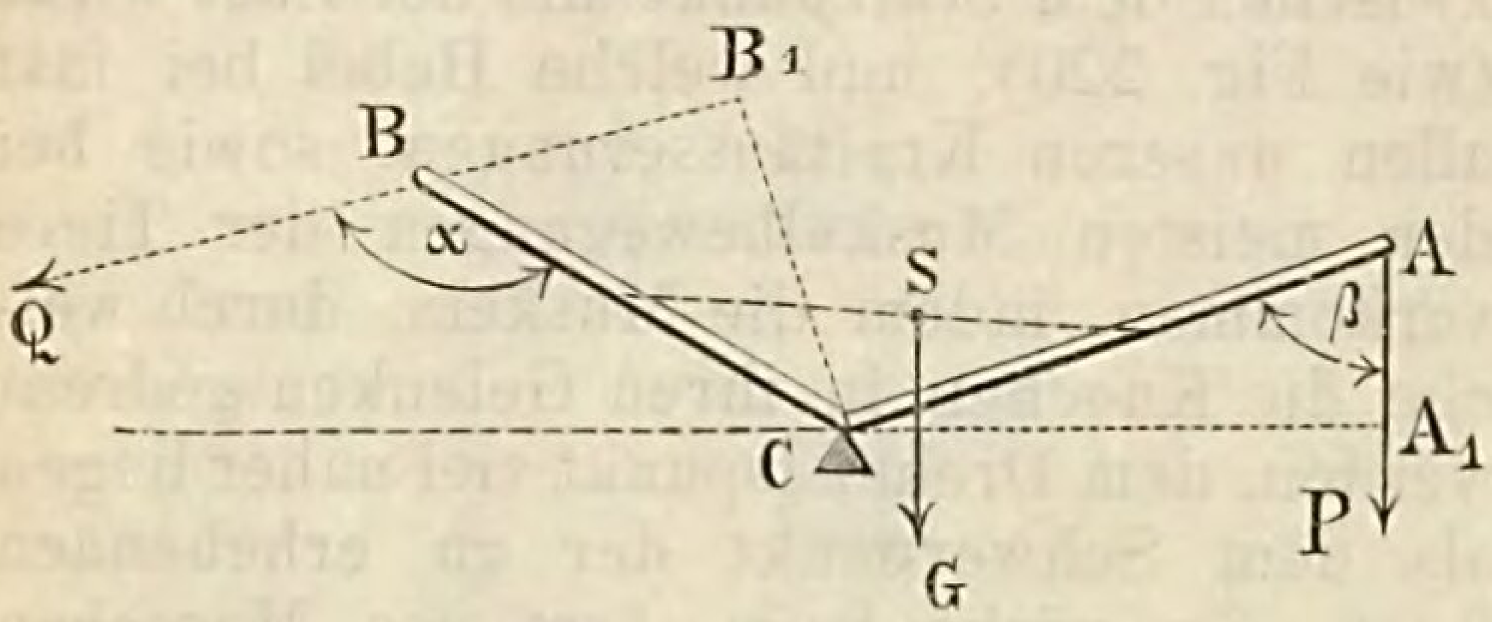
Antwort. Denkt man sich die Hebelarme vom Drehpunkt bis zu den Angriffspunkten als gewichtslose Linien, so hat man einen m a t h e m a t i s c h e n Hebel; im Gegensatz dazu nennt man den aus einem starren Körper bestehenden Hebel einen p h y s i s c h e n Hebel, und in diesem Sinn ist der zweiarmige Hebel entweder g l e i c h a r m i g, wenn der Stützpunkt *c* in der Mitte zwischen Kraft und Last liegt (Fig. 222), wie der Balken einer jeden Schalwage, oder u n g l e i c h a r m i g, wenn Kraft und Last ungleichweit vom Stützpunkt entfernt sind (Fig. 219), wie beim Schlagbaum, den meisten Scheren und Zangen, der römischen Schnellwage u. a. m.

Figur 222.



Frage 157. Was versteht man unter einem Winkelhebel?

Figur 223.



Antwort. Hat der zweiarmige Hebel die Gestalt eines Winkels oder Knies (Fig. 223), dessen Spitze der Ruhepunkt ist, so heisst er ein gebrochener oder Winkelhebel, wie er im grossen als Kunstkreuz für die Bergwerkspumpen und im kleinen bei Klingelzügen und Thürklinken im Gebrauch ist.

Frage 158. Was sind zusammengesetzte Hebel?

Antwort. Zusammengesetzte Hebel sind maschinelle Vorrichtungen, die zwei oder mehr Hebel in sich vereinigen. So sind Schere und Zange doppelte zweiarmige Hebel, die ihren gemeinschaftlichen Dreh- oder Unterstützungspunkt an der Stelle haben, wo der sie vereinigende Stift hindurchgeht; die Kamm- und Stirnräder, die Getriebe u. dergl. sind ebenfalls mehrfach zusammengesetzte Hebel.

Frage 159. Unter welchen Bedingungen herrscht an jedem Hebel Gleichgewicht?

Erkl. 200. In der Theorie des Hebels wird bloss die Frage erörtert, unter welchen Umständen hält die Kraft P der Last Q das Gleichgewicht, wie gross müssen demnach Kraft und Last sein, damit keine Drehung stattfinde? Bei der praktischen Benutzung des Hebels findet allerdings meist eine Drehung statt, indem die Kraft im Sinn ihrer Richtung den Angriffspunkt bewegt und dadurch, was bezweckt werden soll, die Last oder den Widerstand aus seiner Lage verrückt. Es genügt jedoch vollständig, die Bedingung des Gleichgewichts zu bestimmen, wobei keine Bewegung stattfindet; denn sobald dann die Kraft oder Last nur äusserst wenig zunimmt, so wird in der entsprechenden Richtung der Hebel sich bewegen.

Erkl. 201. Dieser in nebenstehender Antwort enthaltene Hauptgrundsatz beim Hebel, also bei der vorzüglichsten Fundamentalmaschine, ist in der gesamten Mechanik von grösster Wichtigkeit und war schon in den ältesten Zeiten bekannt. Archimedes aus Syrakus (der grösste Mathematiker und Physiker des Altertums, geb. 287, † 212 v. Chr.) bezog denselben auf Flächen, welche durch verschiedene Kräfte in ungleichen Abständen von einem gegebenen Punkt um letzteren gedreht werden sollen, verband ihn mit der Lehre vom Schwerpunkt und setzte ihn eigentlich als Axiom ohne Beweis voraus. Wenn es nämlich gleich im ersten Satz heisst: „Gleich

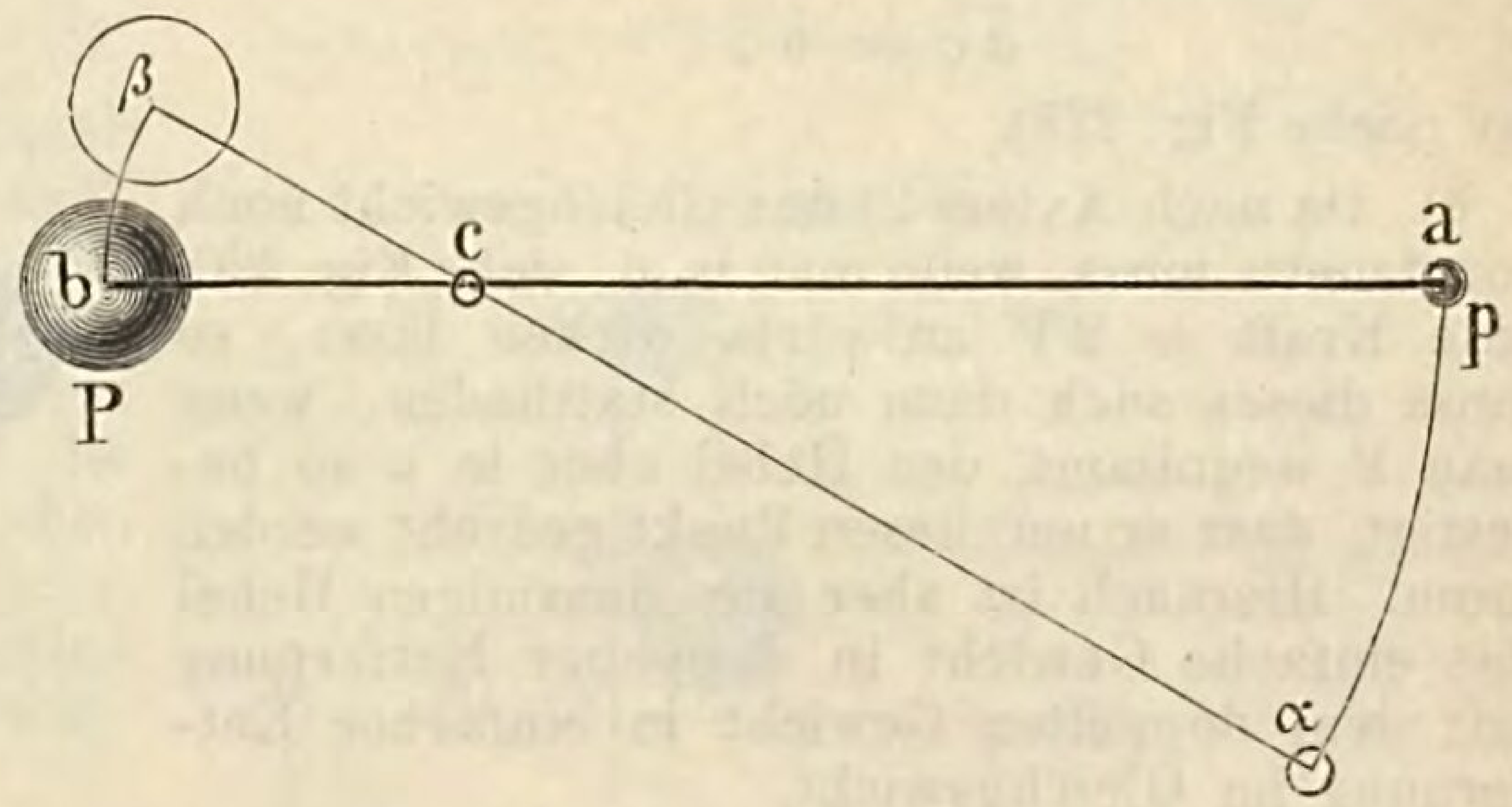
Antwort. Nach Archimedes ist die Bedingung des Gleichgewichts, dass sich die am Hebel wirkenden Kräfte umgekehrt verhalten müssen wie ihre Hebelarme, oder was dasselbe besagt, dass die Produkte von Kraft und Last mit ihren betreffenden Hebelarmen gleich sein müssen. Da man nun, wie schon früher bemerkt wurde, das Produkt aus einer Kraft und ihrem Hebelarm das statische Moment der betreffenden Kraft nennt, so halten sich also am Hebel Kraft und Last das Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente gleich sind.

$$Pp = Qq$$

schwere Grössen in gleichen Entfernungen wirkend, sind im Gleichgewicht", so gehört dieses mit Recht unter die Voraussetzungen. In der Folge ist dann die Art des archimedischen Beweises eine indirekte, indem er zeigt, dass der Satz gültig sein müsse, weil kein Grund zu einer Bewegung vorhanden sei, diese daher auch nicht eintreten könne, mithin der Zustand der Ruhe erzeugt werde.

Cartesius suchte einen andern Beweis für das allgemeine Gesetz des Hebels und fand diesen in seinem allgemeinen statischen Grundsatz, dass nämlich das wahre Vermögen einer bewegenden Kraft dem P r o d u k t d e r b e w e g t e n M a s s e i n i h r e G e s c h w i n d i g k e i t gleich sei. Dieser höchst fruchtbare Satz, den die Anhänger des Cartesius in der Mechanik für gleich wichtig hielten wie den pythagoreischen Lehrsatz in der Geometrie, beweist das Gesetz des Hebels sehr einfach:

Figur 224.



Ist nämlich der Hebel ab (s. Fig. 224) mit den beiden ungleichen Gewichten P und p im Gleichgewicht und wird er in die Lage $\alpha\beta$ gebracht, so verhalten sich die bewegten Massen wie $P:p$; die Geschwindigkeiten aber wie die durchlaufenen Räume oder wie die Bogen $a\alpha : b\beta$. Da diese Bogen aber gleichen Winkeln zugehören, so verhalten sie sich wie die Halbmesser $ac : bc$. Nach dem Gesetz des Cartesius also verhalten sich die Kräfte, womit sich P und p bewegen, wie:

$$P\,.\,\overline{ac} : p\,.\,\overline{bc}$$

und wenn

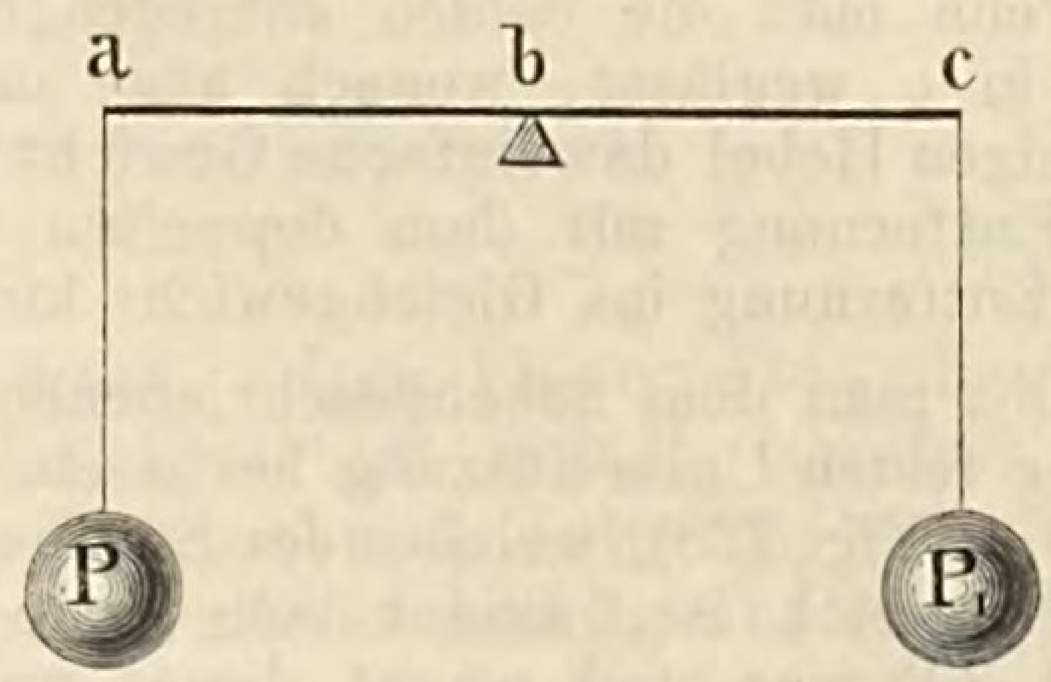
$$P : p = \overline{bc} : \overline{ac}$$

so folgt:

$$P\,.\,\overline{ac} = p\,.\,\overline{bc}$$

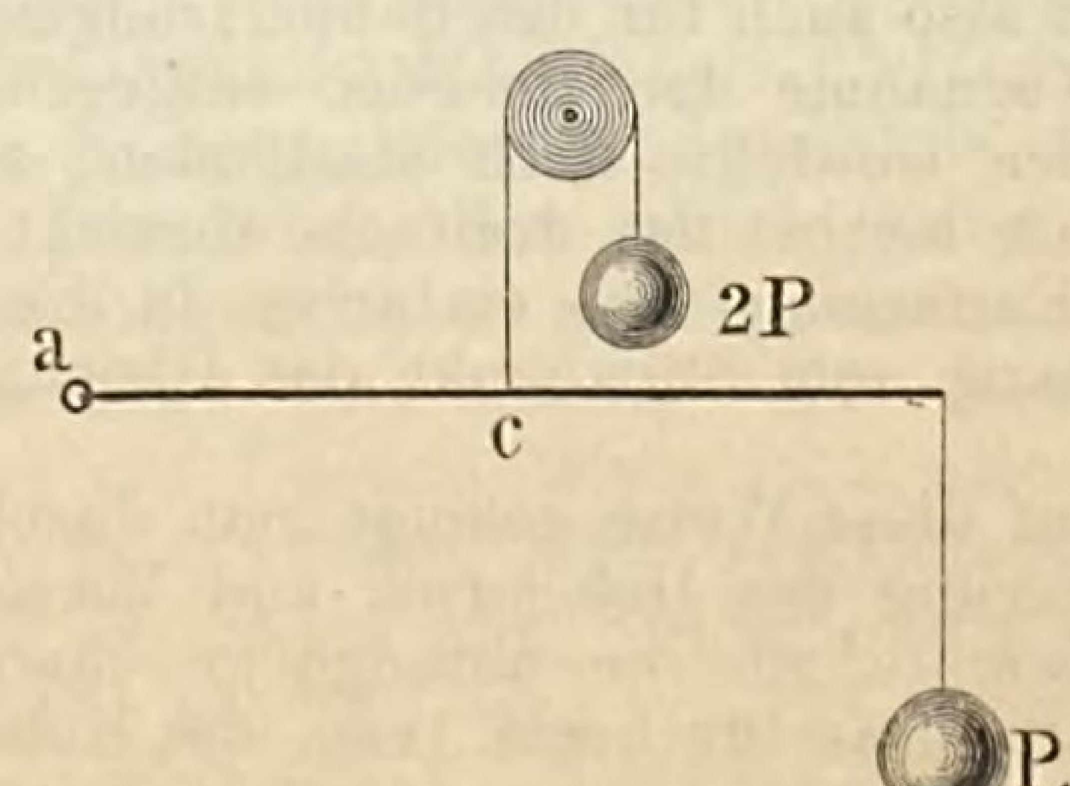
oder die bewegenden Kräfte sind einander gleich, streben aber, den Hebel nach entgegengesetzten Seiten zu drehen und müssen also nach dem allgemeinen Gesetz des Gleichgewichts in Ruhe bleiben.

Figur 225.



Newton betrat einen ganz entgegengesetzten Weg rücksichtlich der Begründung des ersten Grundsatzes der Mechanik, indem er das Gesetz des Gleichgewichts am Hebel auf das Parallelogramm der Kräfte zurückführte. Andere Gelehrte dagegen blieben der von Archimedes befolgten Methode getreu, wonach das Gesetz des Hebels als Grundlage der gesamten Mechanik erscheint. Hiernach ist die Sache zwar einfacher und auf elementare Weise leicht und klar darstellbar, zugleich aber wird ein strenger Beweis dieses Gesetzes unumgänglich nötig. Um diesen Beweis hat sich neben andern Gelehrten besonders Kästner verdient gemacht, welcher demselben folgende zwei Grundsätze oder Axiome zugrunde legte:

Figur 226.



1). Zwei gleiche Gewichte am gleicharmigen Hebel in gleichen Entfernungen vom Ruhepunkt müssen im Gleichgewicht sein, weil auf keiner Seite eine Ursache der Bewegung stattfindet.

2). Die beiden Gewichte P und P_1 drücken auf den Stützpunkt mit einer Kraft, welche der Summe ihrer Gewichte gleich ist, und wenn man daher im Mittelpunkt des Hebels eine dieser Summe gleiche aufwärts wirkende Kraft anbringt, so müssen die entgegengesetzten Kräfte $P P_1$ und $(P + P_1)$ miteinander im Gleichgewicht sein.

Die Beweisführung ist dann folgende:

a). Am gleicharmigen Hebel sind die beiden gleichen Gewichte P und P_1 nach Axiom 1) im Gleichgewicht, wenn die Entfernung:

$$\overline{ac} = \overline{bc}$$

ist (siehe Fig. 225).

b). Da nach Axiom 2) das Gleichgewicht noch fortdauern muss, wenn man in c, siehe Fig. 226, eine Kraft = 2 P aufwärts wirken lässt, so muss dieses auch dann noch stattfinden, wenn man P wegnimmt, den Hebel aber in a so befestigt, dass er um diesen Punkt gedreht werden kann. Hiernach ist aber am einarmigen Hebel das einfache Gewicht in doppelter Entfernung mit dem doppelten Gewicht in einfacher Entfernung im Gleichgewicht.

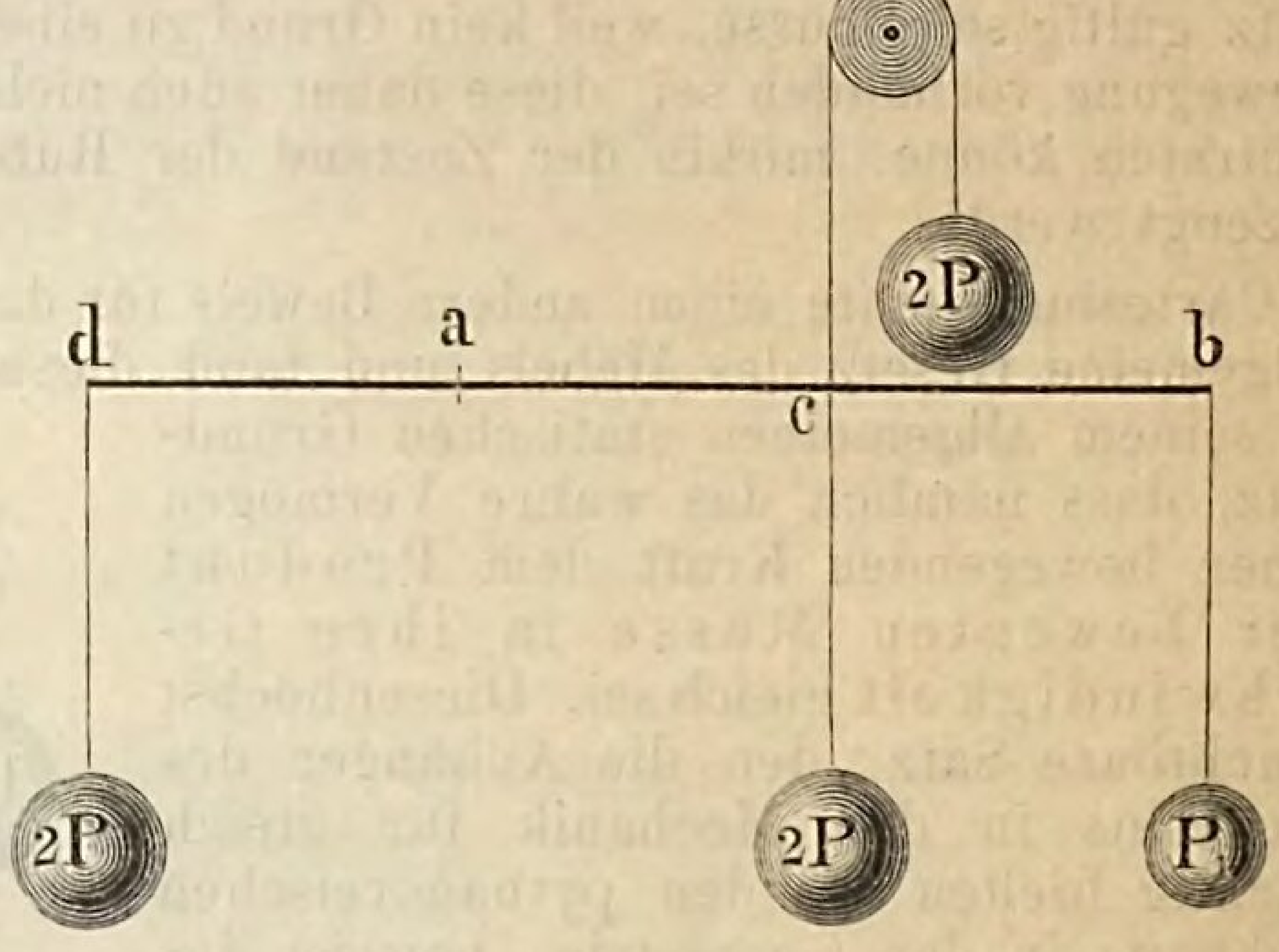
c). Wird der eben beschriebene Hebel so verändert, dass man ihn bis nach d (s. Fig. 227) verlängert, hier mit 2 P beschwert und damit zugleich 2 P in c ins Gleichgewicht bringt, so muss nach Axiom 1) das Gleichgewicht fortdauern, und dieses wird auch dann der Fall sein, wenn man die beiden entgegengesetzten Kräfte in c weglässt, wonach also auch am zweiarmigen Hebel das einfache Gewicht in doppelter Entfernung mit dem doppelten in einfacher Entfernung ins Gleichgewicht kommt.

d). Gibt man dem nebenbeschriebenen Hebel statt der festen Unterstützung bei a ein Gegengewicht (s. Fig. 228), welches der Summe beider Gewichte gleich ist, nimmt vom Ende d das Gewicht 2 P weg und macht dieses unbeweglich, so muss beim einarmigen Hebel das Gleichgewicht nach Axiom 2) abermals hergestellt sein.

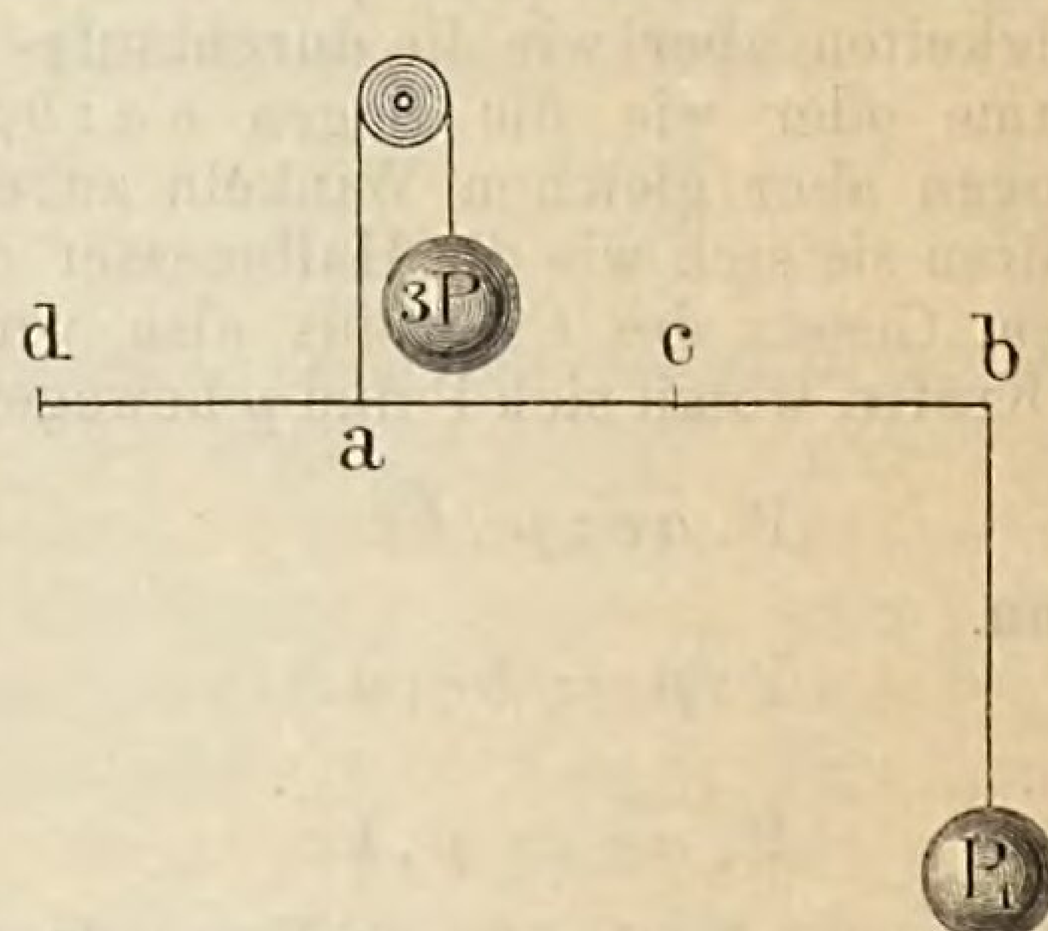
e). Verlängert man diesen Hebel bis c (siehe Fig. 229) und beschwert ihn durch die gleichen herabhängenden Gewichte = 3 P, so muss das Gleichgewicht nach Axiom 1) wieder hergestellt sein und also auch für den doppelarmigen Hebel nach Wegnahme der einander entgegengesetzt wirkenden Gewichte noch stattfinden, so dass also auch hierbei das dreifache Gewicht in einfacher Entfernung dem einfachen in dreifacher Entfernung vom Stützpunkt das Gleichgewicht hält.

f). Auf diese Weise gelangt man durch stete Verlängerung des Hebelarms und Vermehrung der Gewichte um die anfängliche Einheit zu dem Satz, dass für beide Arten des Hebels das einfache Gewicht in der n fachen Entfernung dem n fachen Gewicht in der einfachen Entfernung das Gleichgewicht hält. Um dann die völlige Allgemeinheit des Gesetzes des Hebels zu erweisen, darf nur bewiesen werden, dass

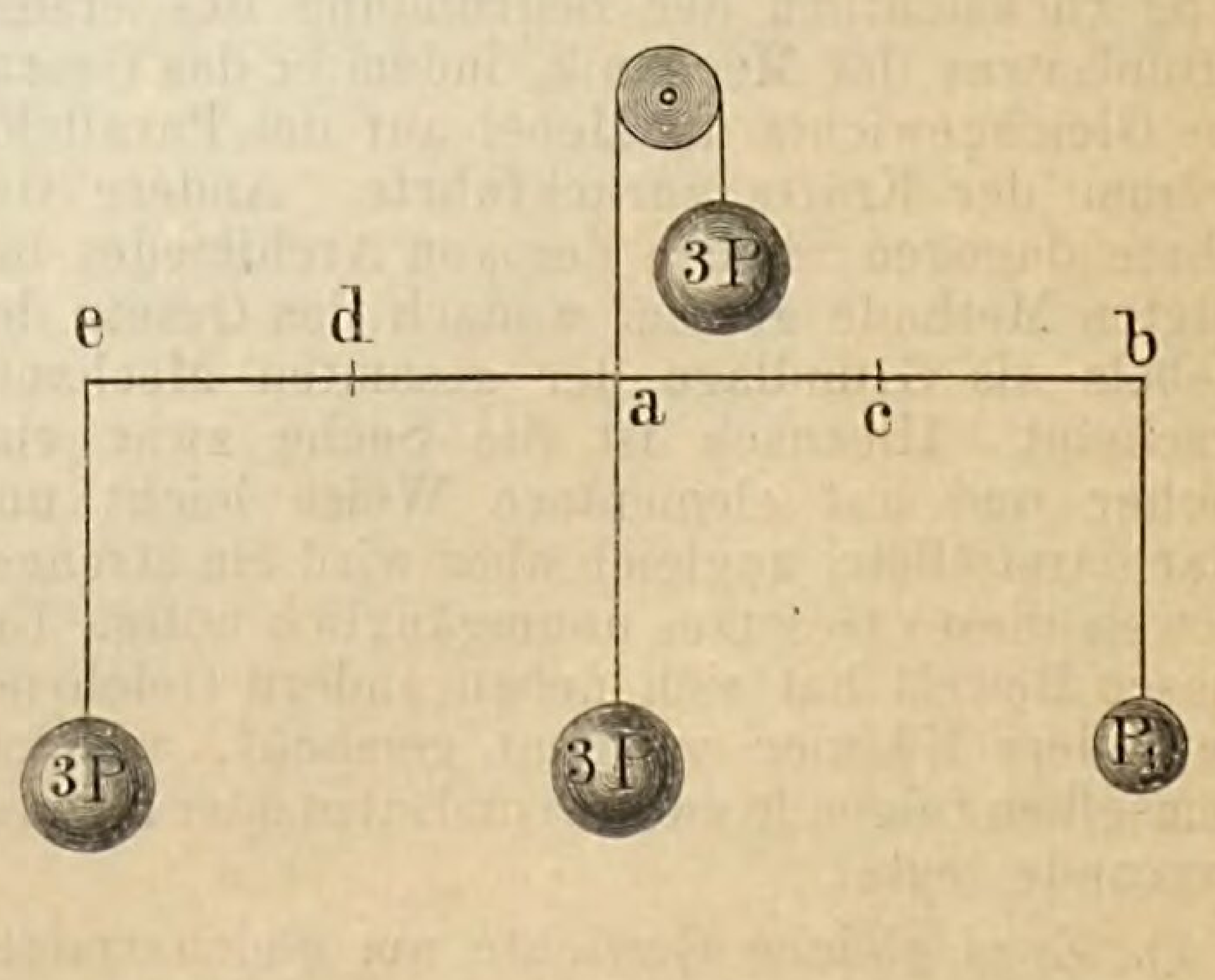
Figur 227.



Figur 228.



Figur 229.



dasselbe auch für die $(n+1)$ fache Vermehrung gilt, wenn es für die n fache erwiesen ist. Dieses kann aber auf folgende Weise geschehen:

Es sei an einem gegebenen Hebel (s. Fig. 230) $n \cdot P$ mit P im Gleichgewicht, wenn:

$$\overline{bc} = n \cdot \overline{ac}$$

ist. Wird dann in c eine $(n+1) \cdot P$ fache aufwärts wirkende Kraft angenommen, so ist nach Axiom 2) das Gleichgewicht nicht aufgehoben, wenn man den Hebelarm in a drehbar befestigt und nP wegnimmt. Verlängert man den Hebelarm von a bis d, so dass

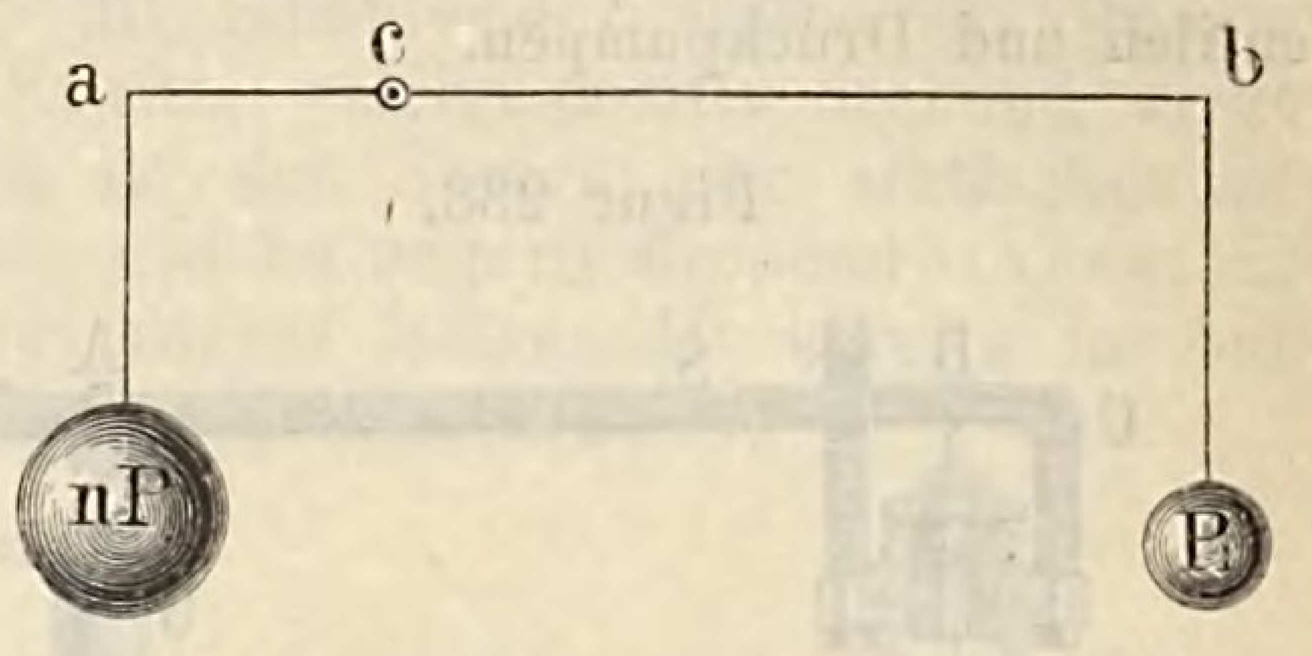
$$\overline{ac} = \overline{ad}$$

ist (s. Fig. 231) und lässt von d und c herab $(n+1)P$ hängen, so ist das Gleichgewicht nach Axiom 1) bestehend und muss auch fortbestehen, wenn die gleichen entgegengesetzten Gewichte weggenommen werden. Hiernach ist das Gesetz also für das $(n+1)$ fache Gewicht und die $(n+1)$ fache Entfernung gültig, und da es oben für $n = 3$ bewiesen ist, so ist es auch für $n = 4, 5, 6 \ldots$ gültig, wenn man diese Zahlen nacheinander $= n$ setzt, also ist seine Allgemeinheit bewiesen.

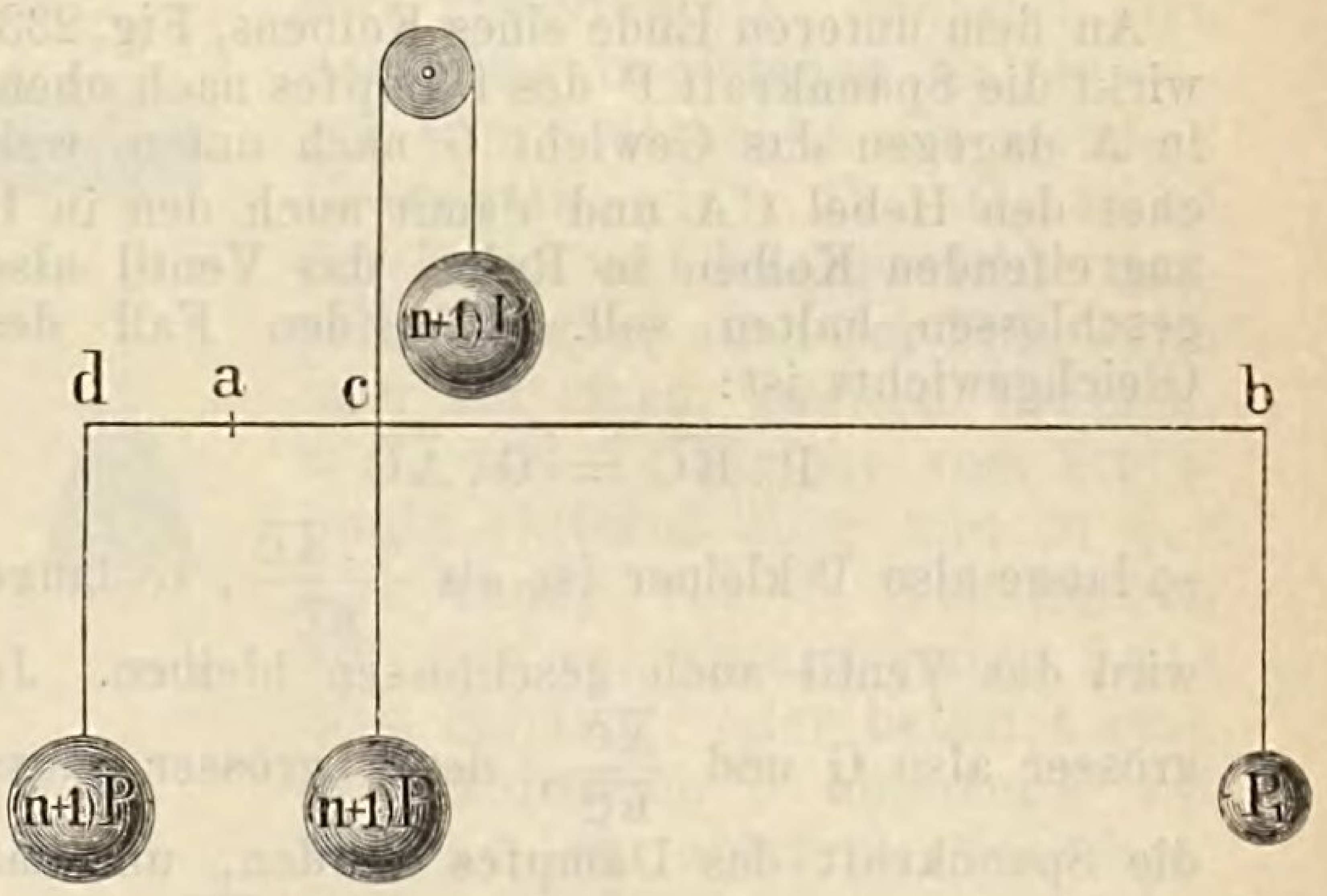
g). Aus diesem Satz lässt sich dann umgekehrt folgender allgemeine Satz ableiten:

Wenn zwei an einem Hebel der einen oder der andern Art wirkende Kräfte sich umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkt verhalten, so sind sie im Gleichgewicht.

Figur 230.

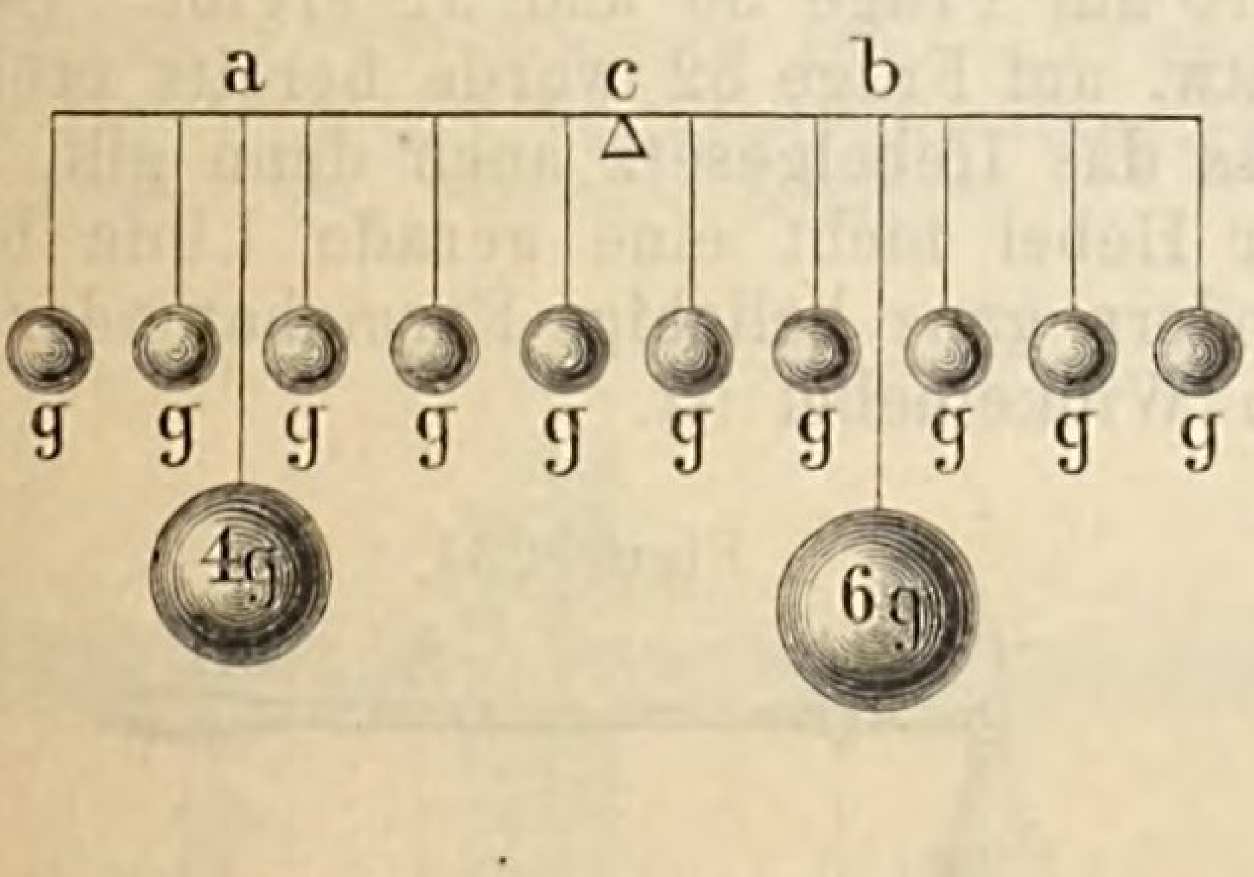


Figur 231.



Frage 160. Wie lässt sich das in Antwort auf die vorige Frage gegebene Hebelgesetz am einfachsten theoretisch beweisen?

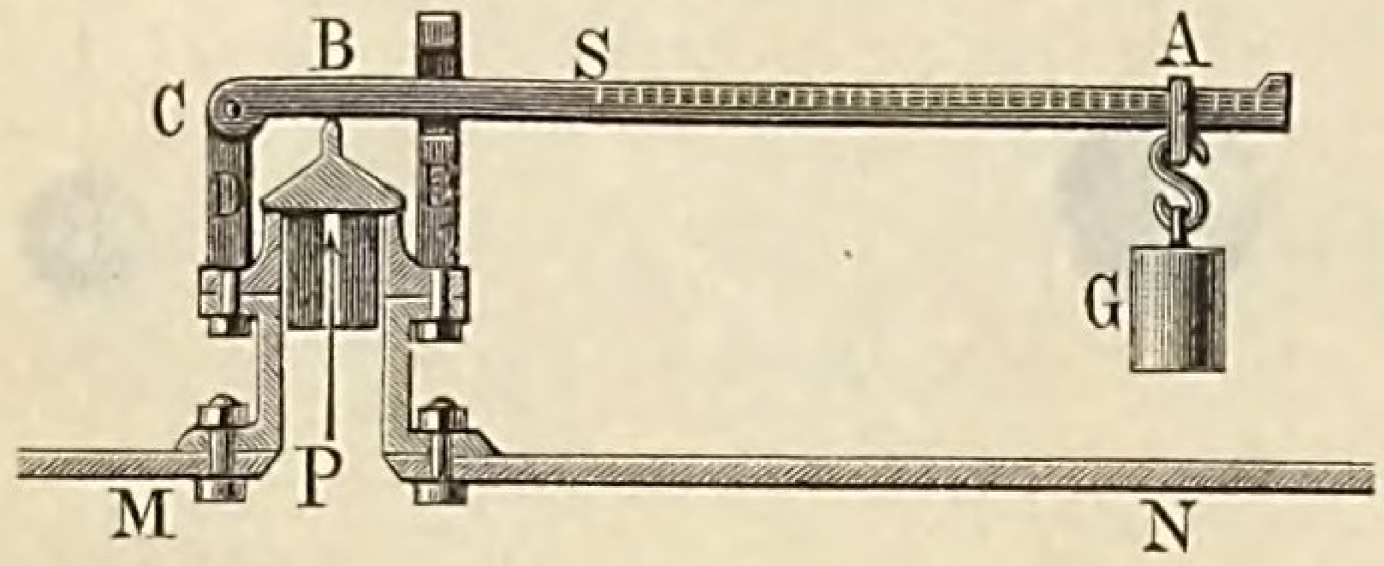
Figur 232.



Antwort. Der theoretische Beweis des Hebelgesetzes wurde bereits geführt, als im 5. Abschnitt, Seite 76, von den Wirkungen paralleler Kräfte auf einen Körper die Rede war. Dort wurde in Satz 8 nachgewiesen, dass der Angriffspunkt der Resultierenden zweier parallelen und gleichgerichteten Kräfte die Angriffslinie in zwei Stücke teilt, die sich umgekehrt verhalten wie die gegebenen Kräfte. Der Angriffspunkt dieser Resultierenden entspricht nun dem Stützpunkt des Hebels und es müssen demnach die an den Endpunkten a und b einer gerade in der Mitte unterstützten Stange aufgehängten gleichgrossen Gewichte im Gleichgewicht stehen. Der Druck, den hierbei die Unterstützung in c erleidet, ist gleich der Summe der aufgehängten Gewichte. Es wird daher gleichgültig sein, ob man in c ein Gewicht von 2 G unmittelbar aufhängt oder ob man c zum Drehungspunkt eines gleicharmigen Hebels macht, der durch zwei gleiche Gewichte belastet ist. Ebenso wird eine grössere Anzahl gleich

Erkl. 202. Von dem einarmigen Hebel macht man besonders Gebrauch bei den Sicherheitsventilen und Druckpumpen.

Figur 233.



An dem unteren Ende eines Kolbens, Fig. 233, wirkt die Spannkraft P des Dampfes nach oben, in A dagegen das Gewicht G nach unten, welches den Hebel $\overline{CA}$ und damit auch den in B angreifenden Kolben in Ruhe, das Ventil also geschlossen halten soll. Für den Fall des Gleichgewichts ist:

$$P \cdot \overline{BC} = G \cdot \overline{AC}$$

so lange also P kleiner ist als $\frac{G \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}}$, so lange wird das Ventil auch geschlossen bleiben. Je grösser also G und $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, desto grösser muss die Spannkraft des Dampfes werden, um das Ventil zu heben. Gewöhnlich ist $\overline{BC}$ unveränderlich und nur $\overline{AC}$ ändert sich durch Verschiebung des Gewichts G. Berücksichtigt man noch das im Schwerpunkt S vereinigt gedachte Gewicht G_1 des Hebels $\overline{AC}$, so erhält man für den Fall des Gleichgewichts:

$$P \cdot \overline{BC} = G \cdot \overline{AC} + G_1 \cdot \overline{SC}$$

und somit für

$$P = \frac{G \cdot \overline{AC} + G_1 \cdot \overline{SC}}{\overline{BC}}$$

Ferner benutzt man den einarmigen Hebel um mit geringer Kraft einen grossen Druck auszuüben.

Soll in dem Punkt B (Fig. 234) ein gewisser Druck X auf einen Kolben ausgeübt werden, so kann mittels des in C befestigten Hebels $\overline{CA}$ durch eine in A wirkende geringere Kraft Q d i e s e l b e Wirkung hervorgebracht werden, wenn nur

$$Q \cdot \overline{AC} = X \cdot \overline{BC}$$

ist, da dann die Kraft X sich durch Q ersetzen lässt. Es ist also:

$$X = \frac{Q \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}}$$

und, da $\overline{AC}$ grösser als $\overline{BC}$, so ist auch X grösser als Q.

grosser Gewichte, welche sich auf einer geraden Stange in gleichen Abständen von dem Stützpunkt *c*, siehe Fig. 232, befinden, im Gleichgewicht stehen (denn je 2 und 2 derselben wirken je an einem gleicharmigen Hebel) und einen gemeinschaftlichen Druck gleich ihrer Summe auf *c* ausüben. Denken wir uns 10 gleich grosse Gewichte, so lassen sich (nach dem Gesetz über parallel wirkende Kräfte) ebenso in einem Punkt *a* je 2 und 2 gleich weit von diesem Punkt abstehende Gewichte vereinigt denken, welche daselbst einen Gesamtdruck von 4 g ausüben. Gleicherweise lassen sich im Punkt *b* 6 g vereinigt wirkend denken. Es sind also die 10 Einzelgewichte zu 2 Gewichten vereinigt, die sich zu einander verhalten wie 4 : 6 oder 2 : 3, d. h. umgekehrt wie ihre Entfernungen *ac* : *bc*. Auf gleiche Weise lässt sich für alle Fälle geometrisch zeigen, dass Gleichgewicht vorhanden sein muss, sobald sich die Hebelarme umgekehrt verhalten wie die an denselben wirkenden Gewichte.

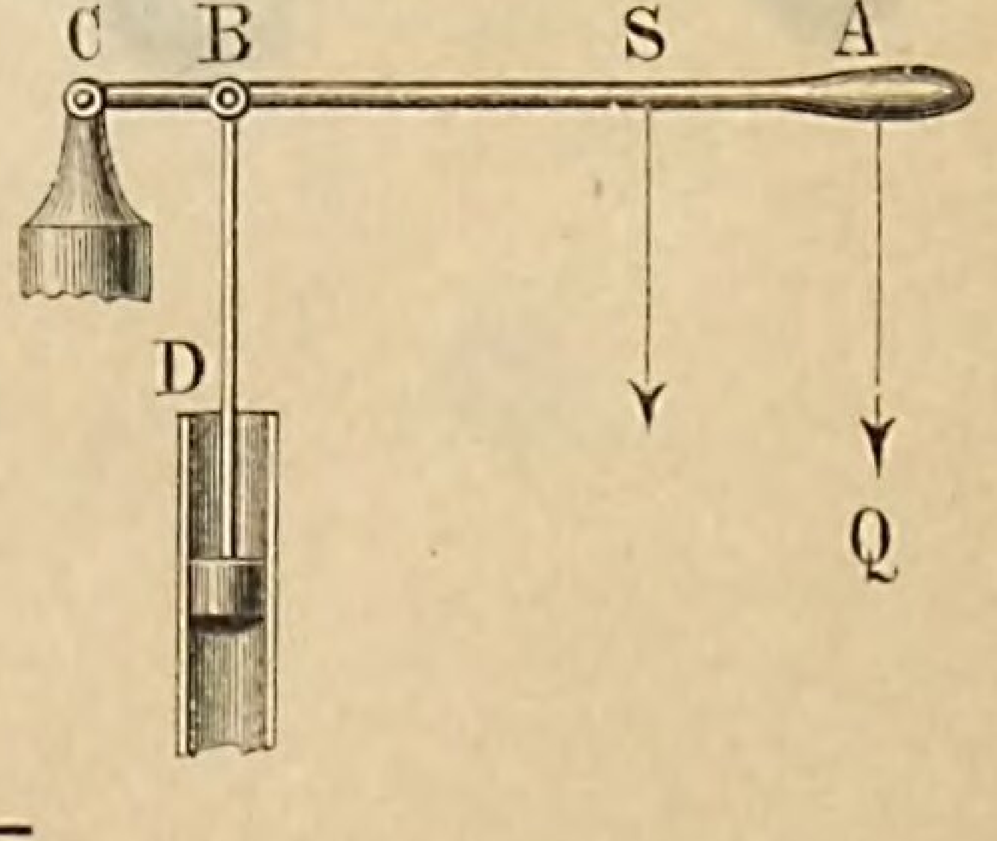
Dass aber das Hebelgesetz auch für den einarmigen Hebel gilt, das ergibt sich schon aus Antwort auf Frage 24, wenn wir in der dort gegebenen Figur 58 den Angriffspunkt *c* der Resultante als Drehpunkt des Hebels ansehen, an welchem in *a* die Last P und in *b* die Kraft Q angreift, während

$$R = P - Q$$

den auf den Stützpunkt wirkenden Druck vorstellt.

Auch für den Fall, dass die am Hebel wirkenden Kräfte n i c h t parallel laufen und n i c h t senkrecht gegen die Hebelarme gerichtet sind, herrscht Gleichgewicht, sobald nur die statischen Momente von Kraft und Last einander gleich sind, wie sich aus Antwort auf Frage 30 und 31 ergibt. Und in Antw. auf Frage 32 wurde bereits erörtert, dass das Hebelgesetz auch dann gilt, wenn der Hebel nicht eine gerade Linie bildet, sondern ganz beliebige Form hat oder auch ein Winkelhebel ist.

Figur 234.

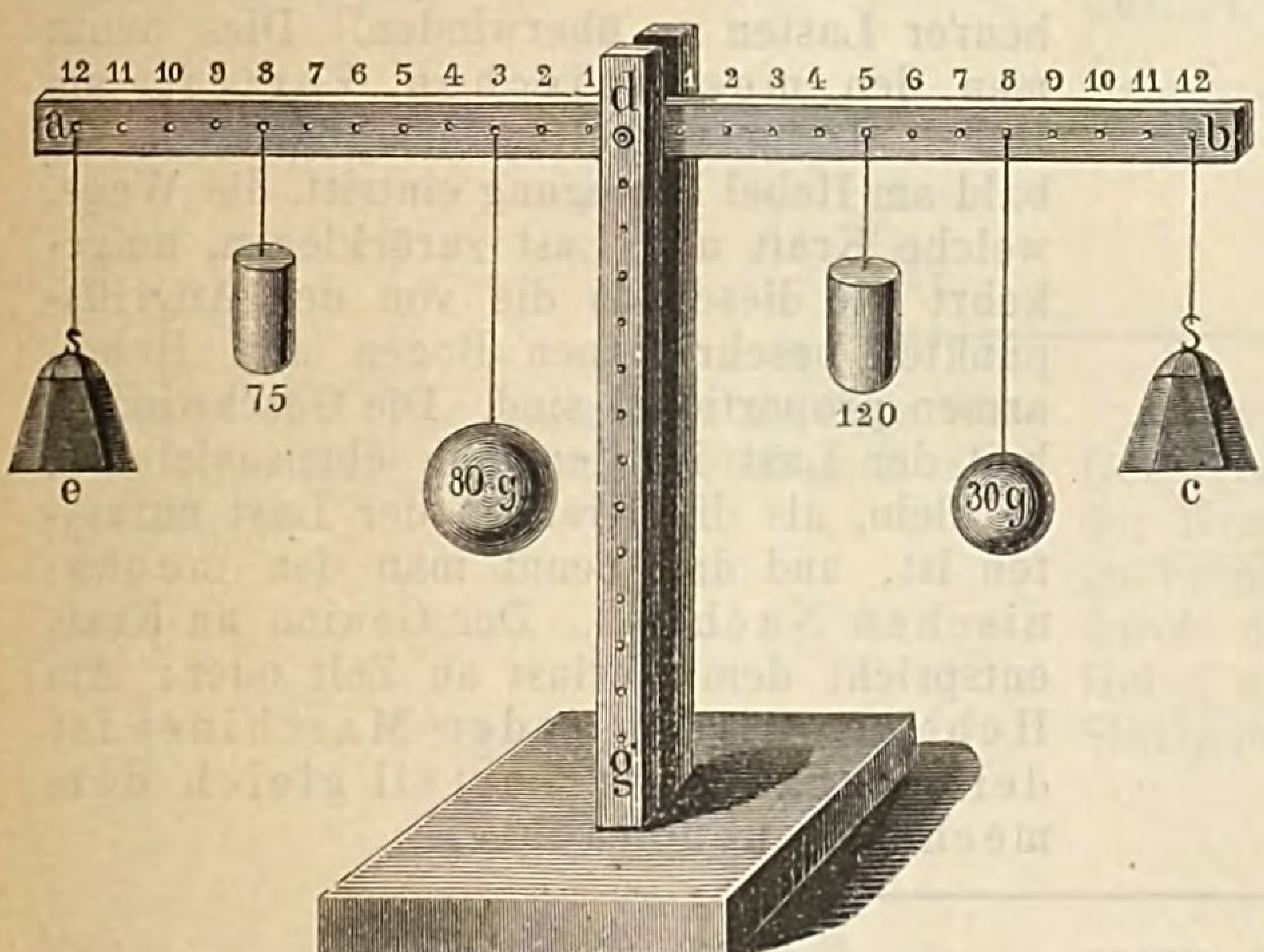


Frage 161. Wie lautet das Hebelgesetz für den Fall, dass am Hebel mehr als zwei Kräfte wirksam sind?

Antwort. Wirken mehr als zwei Kräfte am Hebel, so ist derselbe im Gleichgewicht, wenn die Summe der statischen Momente der Kräfte, welche positiv drehend wirken, gleich ist der Summe der statischen Momente, welche negativ drehend wirken. Der Beweis dieses Satzes ist bereits in Antw. auf Frage 29 enthalten.

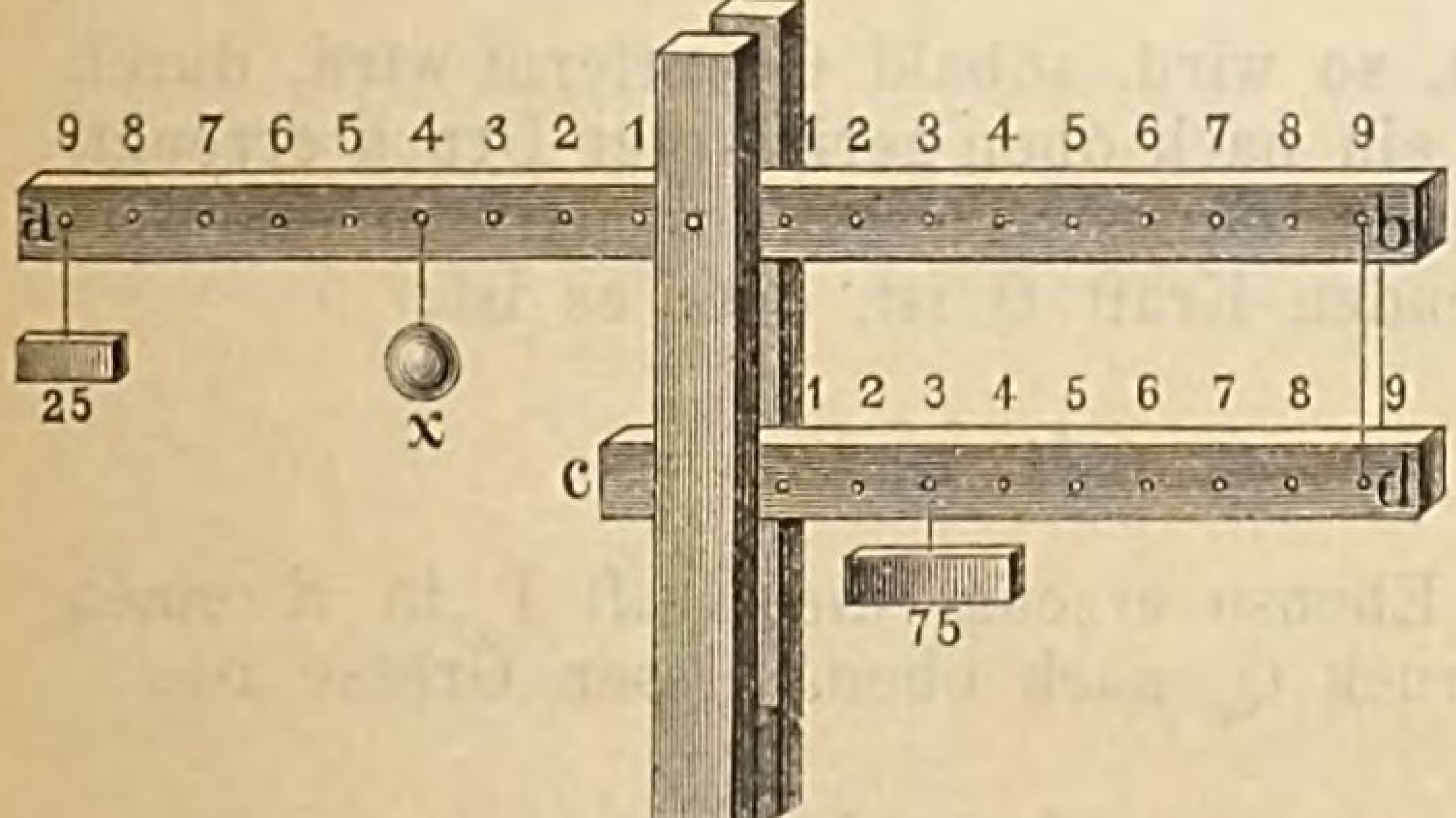
Frage 162. Wie lässt sich das Gesetz des Hebels experimentell beweisen?

Figur 235.



Erkl. 203. Derartige in nebenstehender Antwort erwähnte Hebelapparate sind, je nachdem dieselben mehr oder weniger elegant aus Holz, Eisen oder Messing angefertigt und mit verschiedenen Gewichten versehen sind, zu M. 10.— bis M. 60.— zu beziehen. Die kostspieligeren Apparate haben Vorrichtungen für schief angreifende und in entgegengesetzter Richtung (d. h. auch nach oben) wirkende Kräfte.

Figur 236.



Antwort. Der Experimentalbeweis des Hebelgesetzes wird mit Hilfe des in Fig. 235 dargestellten einfachen Hebelapparats ausgeführt[1]). Belastet man denselben in gleichen Entfernungen vom Stützpunkt mit gleichen Gewichten, wie z. B. $C\,C_1$, so ist der Hebel im Gleichgewicht; dasselbe ist aber auch der Fall, wenn man bei einem zweiten Versuch, z. B. drei Teilstriche vom Stützpunkt entfernt 80 g und in der Entfernung von 8 Teilstrichen auf der entgegengesetzten Seite 30 g anhängt; oder belastet man den Teilstrich 5 einerseits mit 120 g, so entsteht Gleichgewicht, wenn man auf der andern Seite den Teilstrich 6 mit 100 g, oder den Teilstrich 8 mit 75 g, oder den Teilstrich 10 mit 60 g, oder den Teilstrich 12 mit 50 g belastet u. s. w.

Auch lassen sich leicht mehr als zwei Gewichte ins Gleichgewicht bringen.

Um aber die Richtigkeit des Hebelgesetzes für den einarmigen Hebel nachzuweisen, werde ein an seinem Ende mit einer Achse versehener Stab mittels einer Schnur in der in Fig. 236 angedeuteten Weise mit einem zweiarmigen Hebel verbunden, dessen linker Arm zunächst durch ein Gegengewicht x so zu belasten ist, dass beide Hebel wagerecht stehen. Belastet man dann den einarmigen Hebel cd im Teilstrich 3 z. B. mit 75 g, so entsteht Gleichgewicht, wenn man an der entgegengesetzten Seite des zweiarmigen Hebels im Teilstrich 9 25 g oder im Teilstrich 5 45 g u. s. w. anbringt.

[1]) Siehe Erkl. 203.

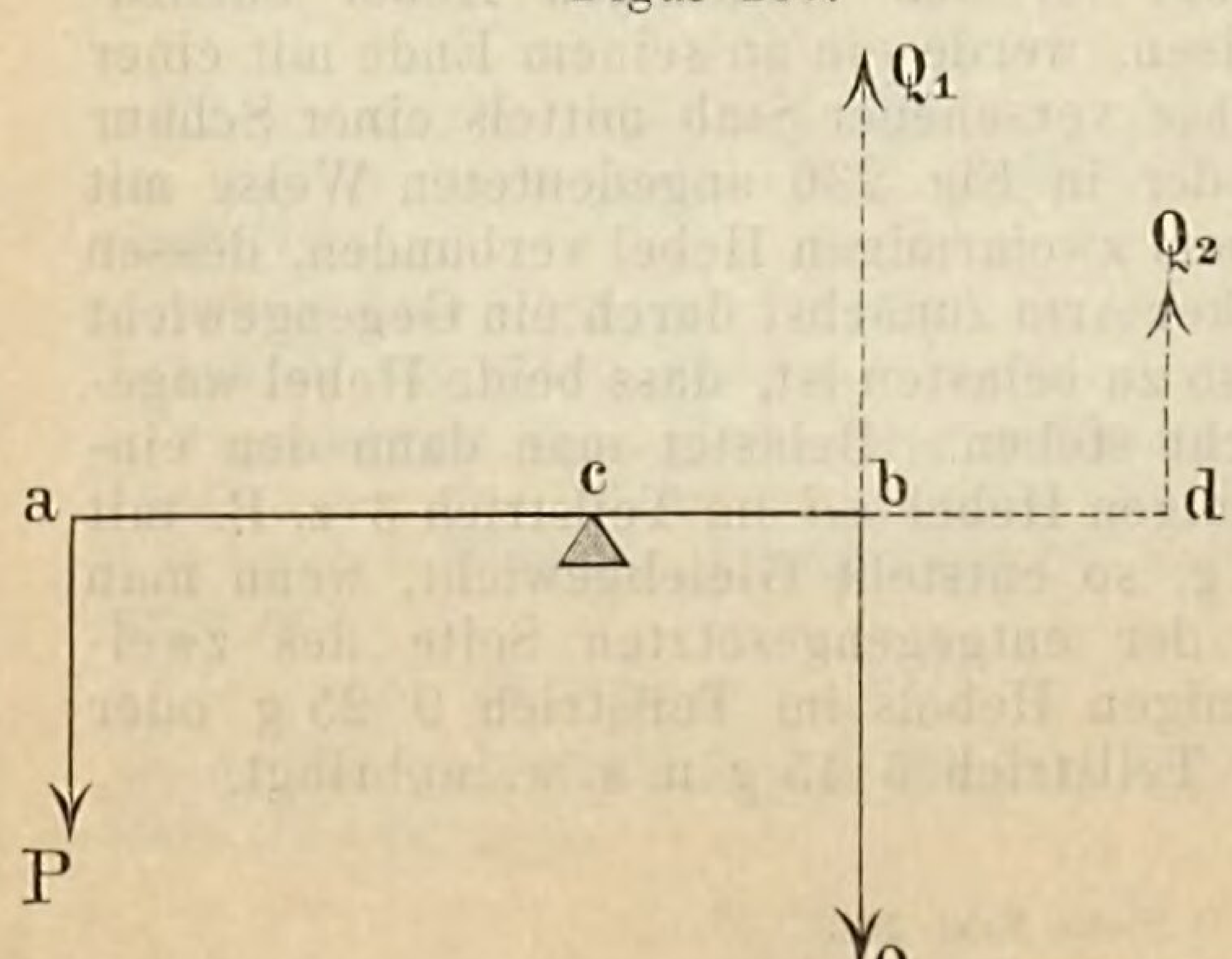
Erkl. 204. Die bisher für den mathematischen Hebel entwickelten Gesetze haben für den wirklichen oder physischen Hebel nur dann volle Giltigkeit, wenn derselbe in seinem Schwerpunkt oder doch senkrecht über demselben unterstützt ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat man das Gewicht der Hebelstange als eine im Schwerpunkt wirkende Kraft anzusehen und das statische Moment derselben mit in Rechnung zu bringen. (Siehe die folgenden gelösten Aufgaben.)

Frage 163. Was versteht man unter dem mechanischen Vorteil und Nachteil eines Hebels?

Antwort. Durch Verkürzung des Hebelarms der Last und Verlängerung des Hebelarms der Kraft ist man im stande, mit einer sehr kleinen Kraft den Widerstand ungeheurer Lasten zu überwinden. Dies nennt man den mechanischen Vorteil am Hebel. Dafür verhalten sich aber auch, sobald am Hebel Bewegung eintritt, die Wege, welche Kraft und Last zurücklegen, umgekehrt wie diese, da die von den Angriffspunkten beschriebenen Bogen den Hebelarmen proportional sind. Die Geschwindigkeit der Last ist demnach ebensoviel mal so klein, als die Kraft in der Last enthalten ist, und dies nennt man den mechanischen Nachteil. Der Gewinn an Kraft entspricht dem Verlust an Zeit oder: Am Hebel (sowie an jeder Maschine) ist der mechanische Vorteil gleich dem mechanischen Nachteil.

Frage 164. Was versteht man unter der Reduktion einer am Hebel wirkenden Kraft?

Figur 237.



Antwort. Wenn man aus einer an einem Hebel wirkenden Kraft den Druck bestimmt, den diese Kraft in irgend einem gegebenen Punkt des Hebels ausübt, so sagt man, dass man die gegebene Kraft auf den gegebenen Punkt reduziere.

Wirkt z. B. an dem in c unterstützten Hebel (s. Fig. 237) in a eine Kraft P, welche der in b angreifenden Last Q das Gleichgewicht hält, so dass also:

$$P\,.\,\overline{ac} = Q\,.\,\overline{bc}$$

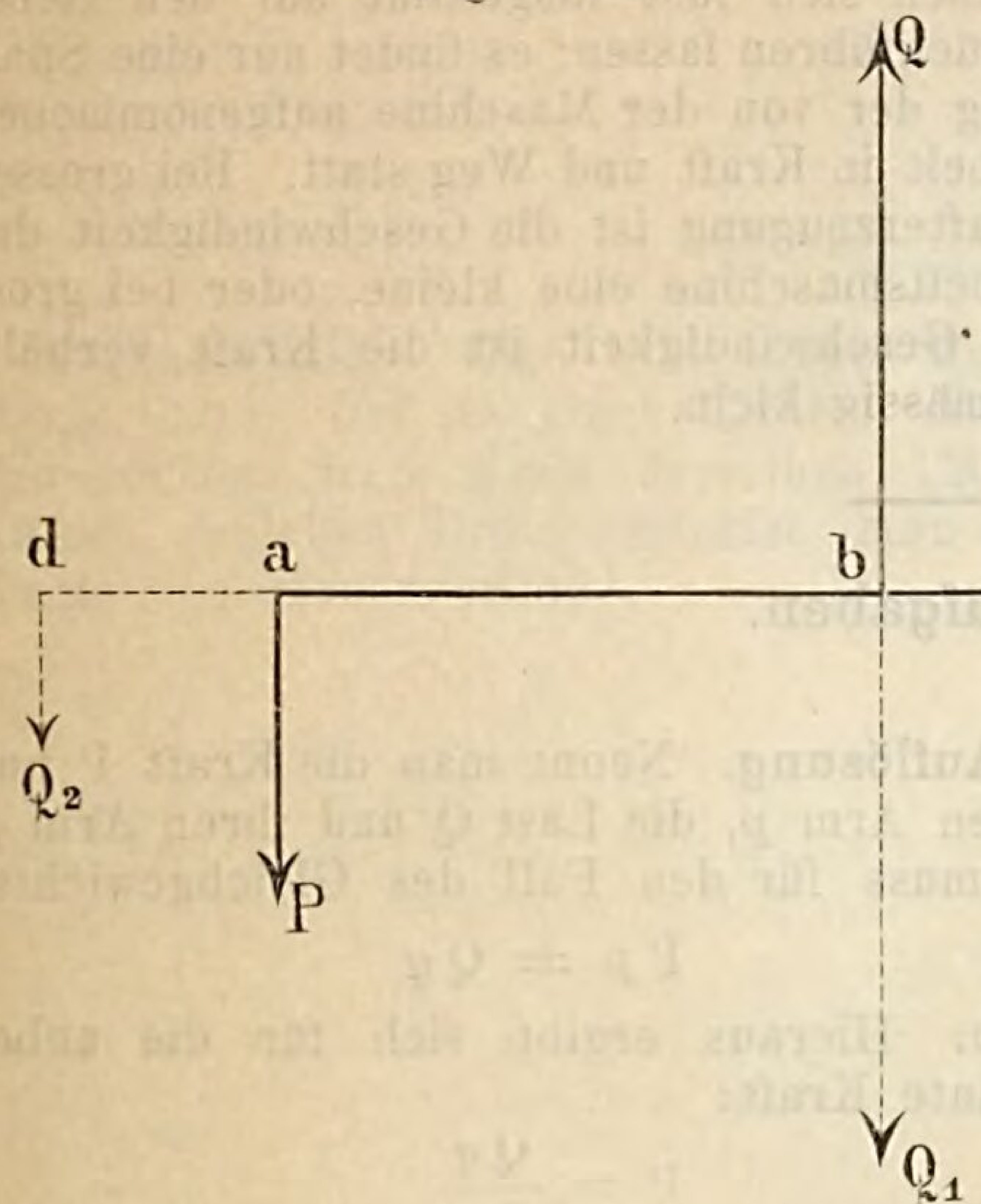
ist, so wird, sobald Q entfernt wird, durch P ein nach oben gerichteter Druck erzeugt, dessen Grösse gleich der nach unten wirkenden Kraft Q ist, oder es ist:

$$Q_1 = P \cdot \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$$

Ebenso erzeugt die Kraft P in d einen Druck Q_2 nach oben, dessen Grösse ist:

$$Q_2 = P \cdot \frac{\overline{ac}}{\overline{cd}}$$

Figur 238.



Man erkennt hieraus sofort, dass bei der Reduktion einer Kraft auf einen gegebenen Punkt der Druck für diesen Punkt um so grösser ist, je mehr sich der Punkt dem Stützpunkt des Hebels nähert, und umgekehrt.

Dasselbe gilt auch für den einarmigen Hebel: Wenn (s. Fig. 238) die Kraft P im Punkt a des einarmigen Hebels ac wirkt, so erzeugt sie in dem Punkt b einen Druck Q_1 von der Grösse:

$$Q_1 = P \cdot \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$$

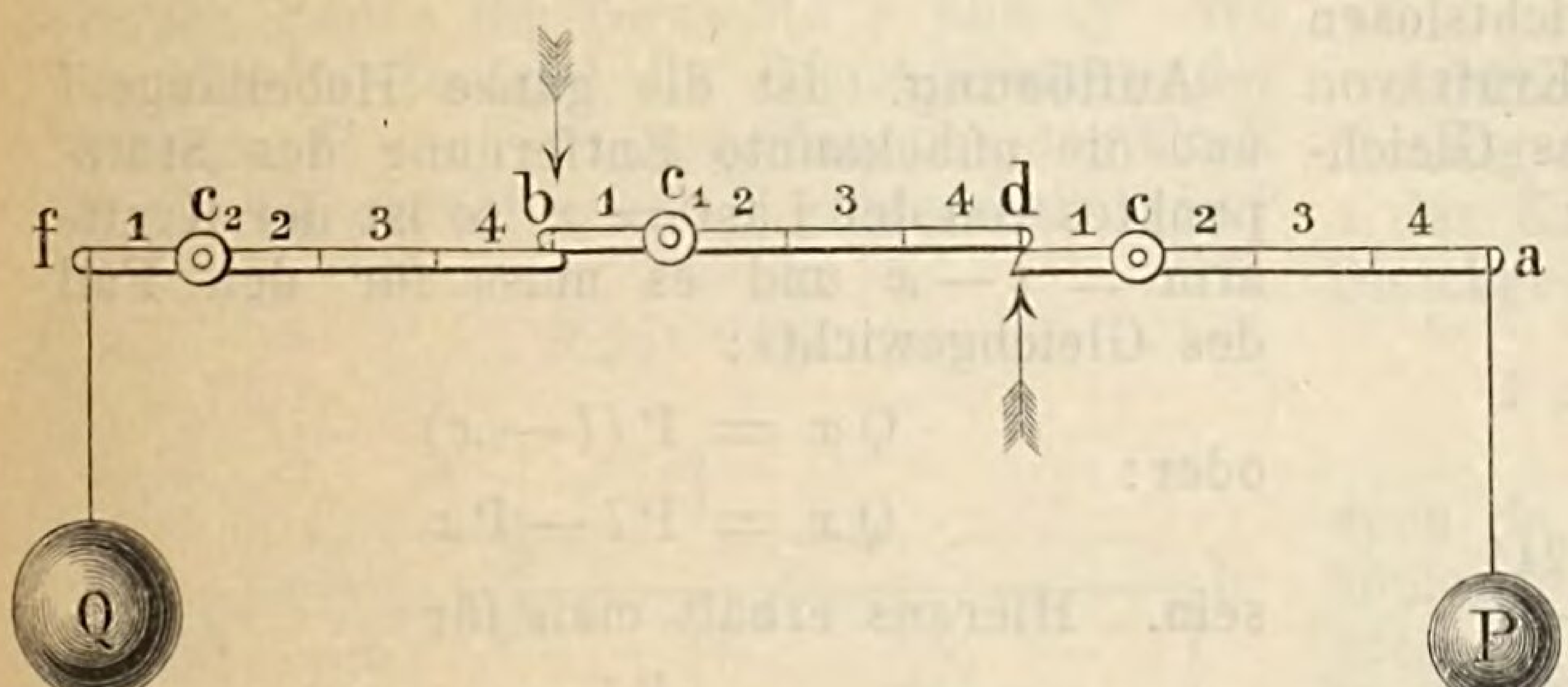
Dieselbe Kraft P auf den Punkt d reduziert, gibt:

$$Q_2 = P \cdot \frac{\overline{ac}}{\overline{cd}}$$

Frage 165. Wodurch kann man die Wirkung einer Kraft auf einen Hebel noch mehr verstärken?

Antwort. Durch Verbindung mehrerer Hebel miteinander kann man die Wirkung der Kraft noch mehr verstärken, und zwar im Verhältnis des Produkts der Verstärkung durch die einzelnen Hebel. Wenn die 3 Hebel ad, db, bf (s. Fig. 239) mit ihren Stützpunkten $c\,c_1\,c_2$ und entsprechend gleichen Hebelarmen in der Art aufeinander einwirken, dass die bei a angreifende Kraft P den Punkt d aufwärts, dadurch b abwärts und f wieder in die Höhe zu ziehen sucht, und wenn das Verhältnis jedes längeren Hebelarms zu jedem kürzeren 3 : 1 ist, so kann die Kraft 1 eine Last von 3 . 3 . 3 = 27 überwinden. Anwendung finden derartige Hebelzusammensetzungen bei ineinandergreifenden Räderwerken, wo die sich berührenden Zähne die Angriffspunkte der Kräfte und ihre Entfernungen von den Radmittelpunkten die Hebelarme darstellen. Dabei arbeitet die kleinere Kraft mit einer um soviel grösseren Geschwindigkeit als die grössere, als sie in letzterer enthalten ist.

Figur 239.



Ein Wasserrad z. B. geht sehr langsam, besitzt aber an seinem Umfang eine sehr grosse Kraft im Wasserdruck. Der durch mehrfache Uebertragungen in Bewegung gesetzte Mühlstein besitzt zwar eine bedeutende Geschwindigkeit, aber eine verhältnismässig geringe Kraft. Aehnlich verhält es sich bei allen Maschinen, deren Mecha-

nismen sich fast insgesamt auf den Hebel zurückführen lassen; es findet nur eine Spaltung der von der Maschine aufgenommenen Arbeit in Kraft und Weg statt. Bei grosser Krafterzeugung ist die Geschwindigkeit der Arbeitsmaschine eine kleine, oder bei grosser Geschwindigkeit ist die Kraft verhältnismässig klein.

α). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 202. Eine Last von 667 kg an einem 0,3 m langen Hebelarm soll durch eine an einem 2,3 m langen Hebelarm wirkende Kraft im Gleichgewicht erhalten werden. Wie gross ist ohne Rücksicht auf das Gewicht des Hebels die anzuwendende Kraft?

Hilfsrechnung.

$$\frac{667 \,.\, 0{,}3}{} = 200{,}1 : 2{,}3$$

oder $2001 : 23 = 87$

$$\begin{array}{r} 184 \\ \hline 161 \\ 161 \\ \hline \text{" "} \end{array}$$

Auflösung. Nennt man die Kraft P und ihren Arm p, die Last Q und ihren Arm q, so muss für den Fall des Gleichgewichts:

$$\mathrm{P}p = \mathrm{Q}q$$

sein. Hieraus ergibt sich für die unbekannte Kraft:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{Q}q}{p}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$\mathrm{P} = \frac{667 \,.\, 0{,}3}{2{,}3}$$

oder:

$$\mathrm{P} = 87$$

d. h. die anzuwendende Kraft beträgt 87 kg.

Augfabe 203. An einem gewichtslosen Hebel von 5,8 m Länge hält eine Kraft von 46 kg einer Last von 244 kg das Gleichgewicht. Wo ist der Stützpunkt?

Hilfsrechnungen:

$$\mathrm{Q}x + \mathrm{P}x = \mathrm{P}l$$

$$x(\mathrm{Q}+\mathrm{P}) = \mathrm{P}l$$

$$x = \frac{\mathrm{P}l}{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}$$

$$\begin{array}{r} 46 \,.\, 5{,}8 \\ \hline 368 \\ 230 \\ \hline 266{,}8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 244 \\ +46 \\ \hline 290 \end{array}$$

$266{,}8 : 290$ oder $26{,}68 : 29 = 0{,}92$

$$\begin{array}{r} 261 \\ \hline 58 \end{array}$$

Auflösung. Ist die ganze Hebellänge l und die unbekannte Entfernung des Stützpunktes von der Last $= x$, so ist der Kraftarm $= l - x$ und es muss für den Fall des Gleichgewichts:

$$\mathrm{Q}x = \mathrm{P}(l - x)$$

oder:

$$\mathrm{Q}x = \mathrm{P}l - \mathrm{P}x$$

sein. Hieraus erhält man für

$$x = \frac{\mathrm{P}l}{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}$$

oder die entsprechenden Zahlen eingesetzt, ergibt:

$$x = \frac{46 \,.\, 5{,}8}{244 + 46}$$

oder:

$$x = 0{,}92 \text{ m}$$

d. h. der Stützpunkt liegt 92 cm vom Angriffspunkt der Last entfernt.

Aufgabe 204. Eine Kraft von 20 kg hebt eine Last von 24 Zentnern 1 cm hoch. Wie gross ist der Weg, den die Kraft zurückzulegen hat?

Auflösung. 24 Zentner sind 24 . 50 oder 1200 kg und die Kraft verhält sich demnach zur Last wie

$$20 : 1200 = 1 : 60$$

folglich muss der Weg der Kraft 60 mal so lang sein als der Weg der Last, und da die Last 1 cm hoch gehoben wurde, so beträgt der Kraftweg 60 cm.

Aufgabe 205. Eine 5 m lange Stange steckt 0,5 m tief in einer Mauer. Wenn nun auf das freie Ende derselben 120 kg wirken, welchen Druck erleidet dann die Kante des Mauerwerks?

Auflösung. Es ist hier die an dem kurzen Arm von 0,5 m eines einarmigen Hebels wirkende Last zu berechnen oder der dieser Last entsprechende Druck.

Nach dem Hebelgesetz ist:

$$\mathrm{P}\,p = \mathrm{Q}\,q$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$120 \,.\, 5 = \mathrm{Q} \,.\, 0{,}5$$

hieraus erhält man für

$$\mathrm{Q} = \frac{120 \,.\, 5}{0{,}5}$$

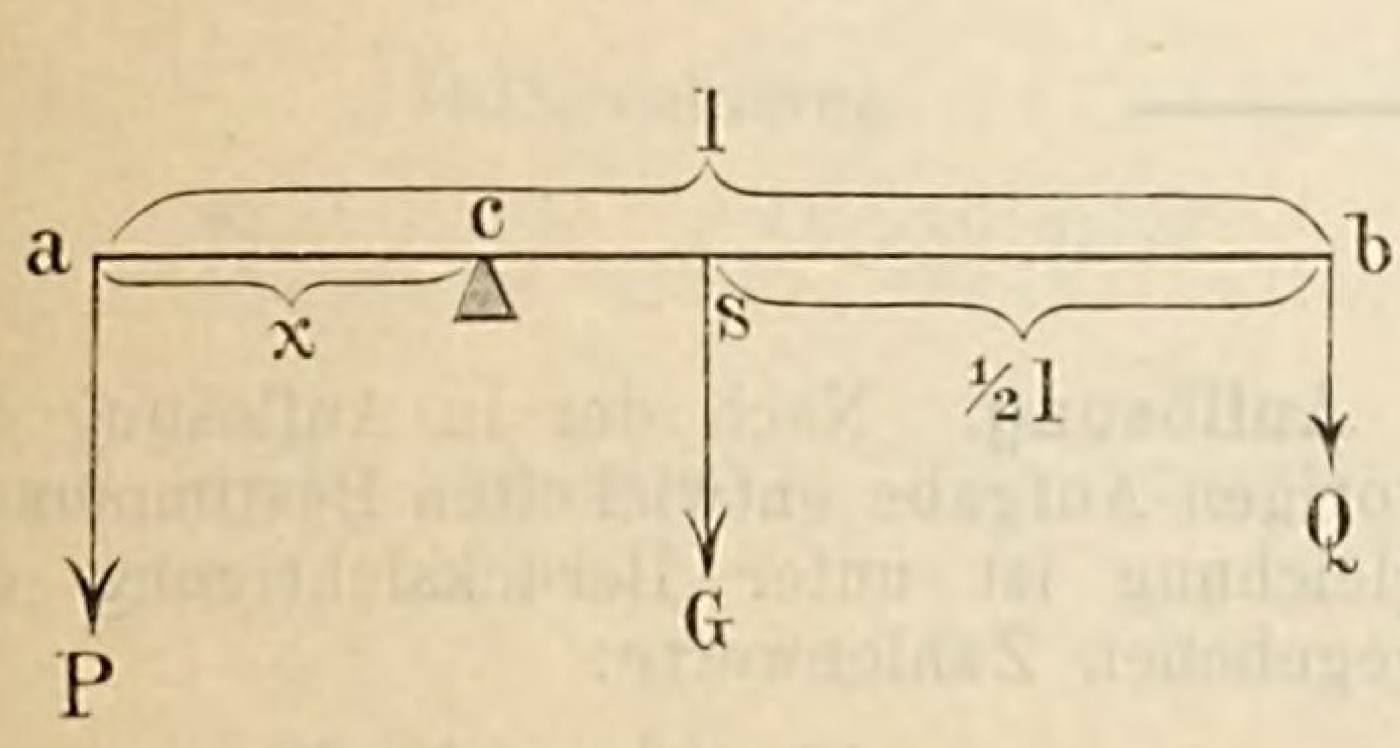
oder:

$$\mathrm{Q} = 1200$$

d. h. die Kante des Mauerwerks hat einen Druck von 1200 kg zu erleiden.

Aufgabe 206. Ein homogener Hebel von durchaus gleichem Querschnitt habe die Länge l, wiege G Kilogramm und trage an seinen Enden die Gewichte P und Q. Wo liegt beim Zustand des Gleichgewichts der Stützpunkt von dem Angriffspunkt der Kraft P aus gerechnet, wenn P grösser als Q ist?

Figur 240.



Auflösung. Nennen wir die gesuchte Entfernung des Stützpunkts c vom Angriffspunkt a der Kraft P x, so ist für den Fall des Gleichgewichts:

$$\mathrm{P}\,x = \mathrm{G}\left(\frac{1}{2}l - x\right) + \mathrm{Q}\left(l - x\right)$$

denn da der Stab (siehe Fig. 240) durchaus homogen ist, so kann man sich sein Gewicht G als eine im Schwerpunkt oder Mittelpunkt S angreifende Kraft denken; folglich ist:

$$as = \frac{1}{2}l$$

und

$$as - ac = as - x \text{ oder } \frac{1}{2}lx$$

Reduzieren wir die obige Gleichung auf x, so ergibt sich:

$$x = \frac{l\left(\frac{1}{2}\mathrm{G} + \mathrm{Q}\right)}{(\mathrm{P} + \mathrm{G} + \mathrm{Q})}$$

(siehe nebenstehende Hilfsrechn.)

Hilfsrechnung. Löst man in nebenstehender Gleichung die Klammern auf, so ergibt sich:

$$\mathrm{P}x = \frac{1}{2}\mathrm{G}l - \mathrm{G}x + \mathrm{Q}l - \mathrm{Q}x$$

oder:

$$\mathrm{P}x + \mathrm{G}x + \mathrm{Q}x = \frac{1}{2}\mathrm{G}l + \mathrm{Q}l$$

oder:

$$x(\mathrm{P} + \mathrm{G} + \mathrm{Q}) = l\left(\frac{1}{2}\mathrm{G} + \mathrm{Q}\right)$$

oder:

$$x = \frac{l\left(\frac{1}{2}\mathrm{G} + \mathrm{Q}\right)}{(\mathrm{P} + \mathrm{G} + \mathrm{P})}$$

Aufgabe 207. Ein gleichförmig dichter Hebel von durchweg demselben Querschnitt sei 85 cm lang, 12,5 kg schwer und trage an seinem einen Ende 10 kg, an seinem andern Ende 5,75 kg. Wie weit liegt der Stützpunkt von der grösseren Kraft entfernt?

Hilfsrechnung.

$$85 \cdot 12 = 1020 : 28,25$$
$$= 102000 : 2825 = 36,1$$

```
   8475
  ─────
  17250
  16950
  ─────
   3000
```

Auflösung. Nach der in der Auflösung der vorigen Aufgabe entwickelten Bestimmungsgleichung für x ergibt sich unter Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte:

$$x = \frac{85\left(\frac{1}{2} \cdot 12,5 + 5,75\right)}{(10 + 12,5 + 5,75)}$$

oder:

$$x = \frac{85\,(6,25 + 5,75)}{(10 + 12,5 + 5,75)}$$

oder:

$$x = \frac{85 \cdot 12}{28,25}$$

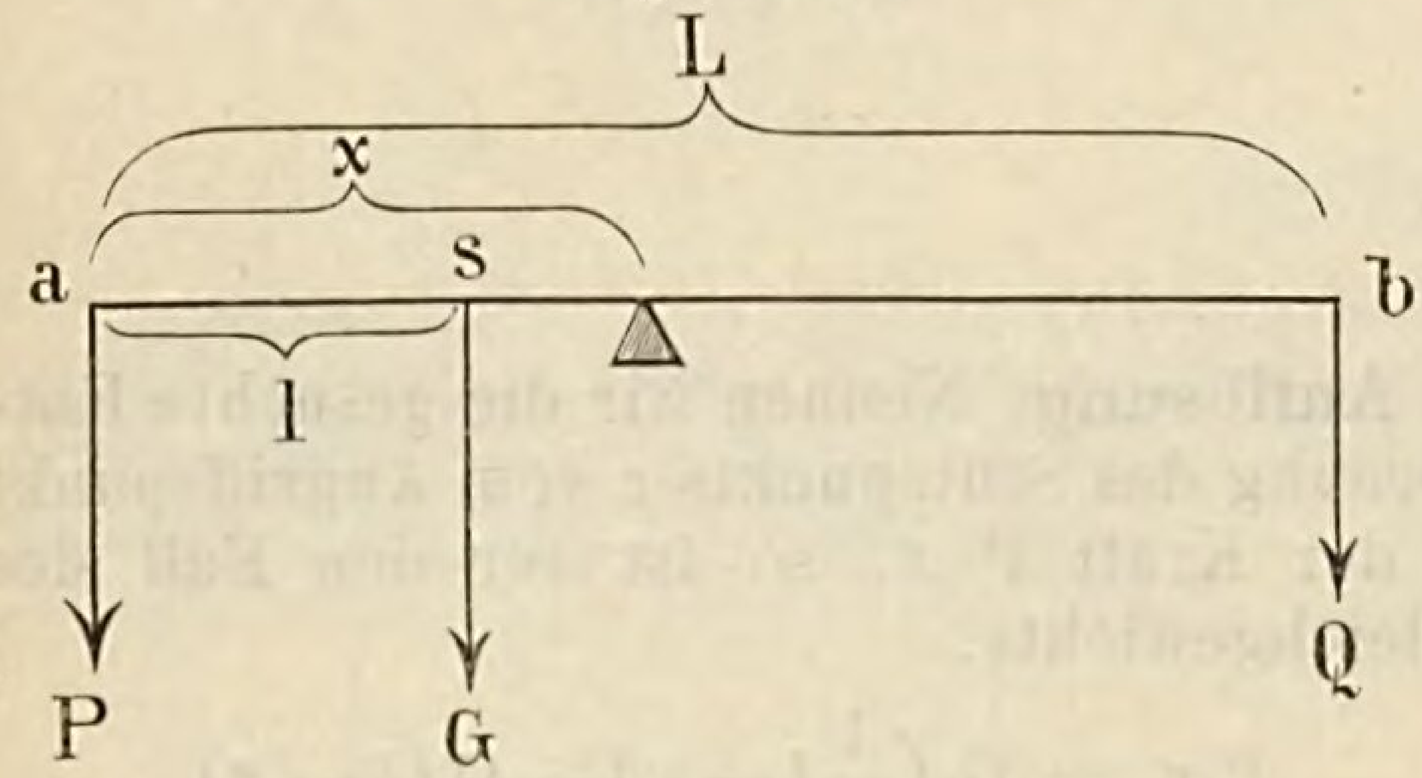
oder:

$$x = 36,1 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. der Stützpunkt ist in 36,1 cm Entfernung vom Angriffspunkt der Kraft von 10 kg anzubringen.

Aufgabe 208. Die Länge eines Hebels sei L, sein Gewicht G, die an seinen Endpunkten wirkenden Kräfte P und Q und sein Schwerpunkt S liege in der Entfernung l von P aus gemessen. Wo liegt bei herrschendem Gleichgewicht der Stützpunkt, von P aus gemessen?

Figur 241.



Auflösung. Nennt man die unbekannte Entfernung $ac = x$ (siehe Fig. 241), so ergibt sich für den Fall des Gleichgewichts, dass

$$Px + G(x - l) = Q(L - x)$$

oder:

$$Px + Gx - Gl = QL - Qx$$

oder:

$$Px + Gx + Qx = QL + Gl$$

oder:

$$x(P + G + Q) = QL + Gl$$

oder:

$$x = \frac{QL + Gl}{P + G + Q}$$

Aufgabe 209. Die Länge eines Hebels sei 120 cm, sein Gewicht 8,72 kg, die an seinen Endpunkten wirkenden Kräfte P = 21 und Q = 13 kg und sein Schwerpunkt liege 48 cm von dem Angriffspunkt der Kraft P entfernt. Wo liegt der Drehpunkt von P aus gemessen?

Hilfsrechnung.

```
 13 . 120       8,72 . 48       21
 ────────       ─────────     +  8,72
  1560            6976        +13
 +418,56          3488        ──────
 ───────         ──────        42,72
 1978,56         418,56
```

$$x = 197856 : 4272 = 46,31$$

```
   17088
   ─────
    26976
    25632
    ─────
     13440
     12816
     ─────
      6240
```

Auflösung. Nach der in Auflösung der vorigen Aufgabe entwickelten Bestimmungsgleichung ist unter Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte:

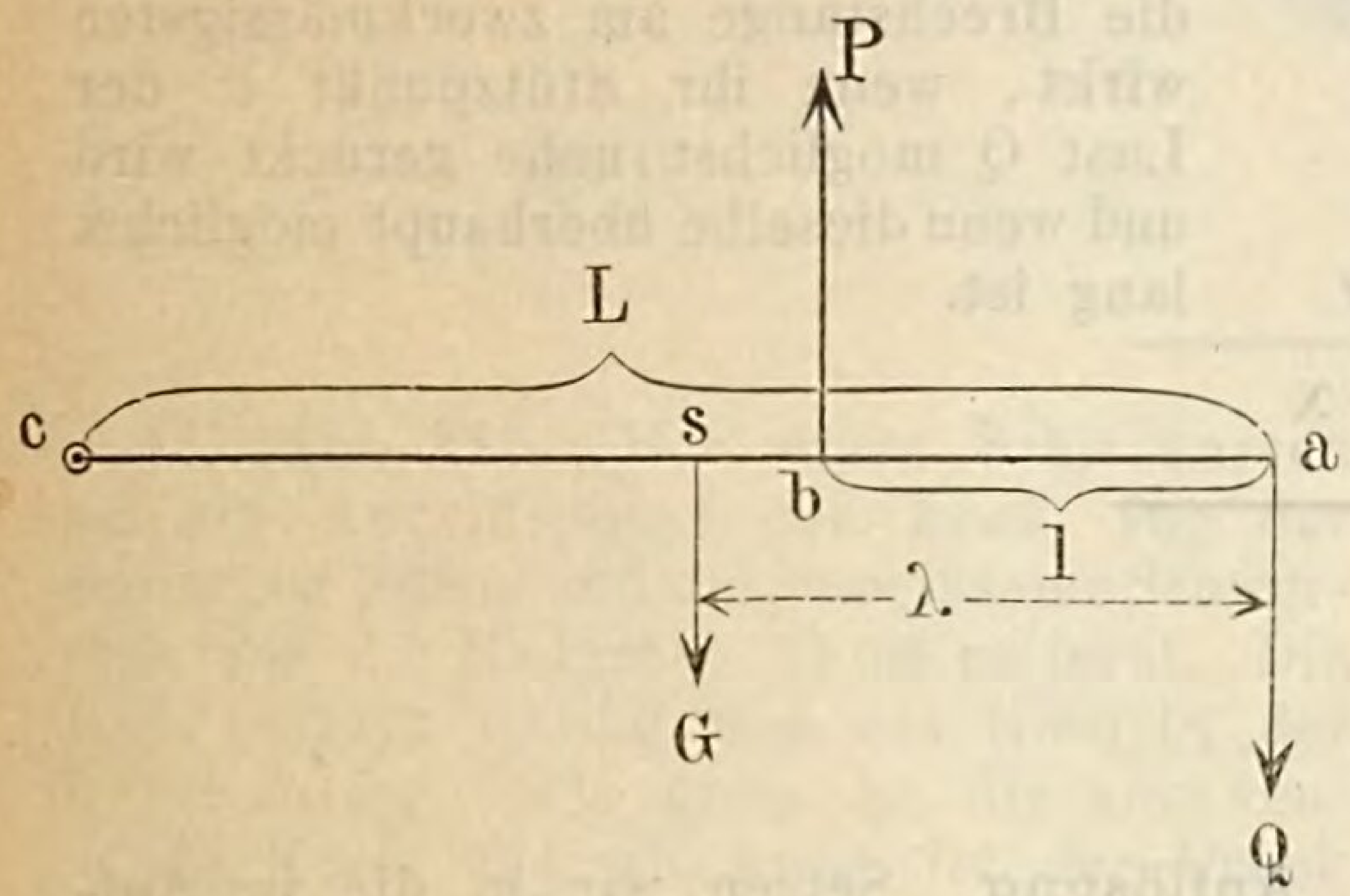
$$x = \frac{13 \cdot 120 + 8,72 \cdot 48}{21 + 8,72 + 13}$$

oder:

$$x = 46,31 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

Aufgabe 210. An einem einarmigen Hebel von der Länge L und dem Gewicht G wirkt an einem Ende eine Kraft $Q = x$ und in einer Entfernung l von demselben Ende eine andere Kraft P nach entgegengesetzter Richtung. Die Entfernung des Schwerpunkts vom Angriffspunkt der unbekannten Kraft Q beträgt λ. Wie gross ist Q?

Figur 242.



Auflösung. Da für den Fall des Gleichgewichts die Summe der positiven Momente gleich der Summe der negativen Momente sein muss, so erhält man in Bezug auf Fig. 242:

$$x\,\mathrm{L} + \mathrm{G}\,(\mathrm{L} - \lambda) = \mathrm{P}\,(\mathrm{L} - l)$$

hieraus ergibt sich für x:

$$x = \frac{\mathrm{P}\,(\mathrm{L} - l) - \mathrm{G}\,(\mathrm{L} - \lambda)}{\mathrm{L}}$$

Aufgabe 211. Die Länge des einarmigen Hebels eines Sicherheitsventils (siehe Fig. 233) betrage 40 cm, das Gewicht des Hebels selbst $1^1/_2$ kg, der Durchmesser des Sicherheitsventils sei 4 cm und seine Befestigungsstelle vom Drehpunkt des Hebels 6 cm entfernt. Wie gross muss das am Ende des Hebels anzubringende Gewicht sein, wenn sich das Ventil bei 5 kg Druck pro Quadratcentimenter öffnen soll?

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{l} 62{,}8\,.\,6 \\ \hline 376{,}8 \\ -24 \\ \hline 352{,}8 : 40 = 8{,}82 \\ \underline{32} \\ \quad 8 \end{array} \qquad 1^1/_2\,.\,16 = 24$$

Auflösung. Bei 4 cm Durchmesser beträgt die Druckfläche des Sicherheitsventils:

$$2\,.\,2\,.\,3{,}14 = 12{,}56 \text{ qcm}$$

und der Druck, bei dem sich dasselbe öffnen soll, ist demnach:

$$12{,}56\,.\,5 = 62{,}80 \text{ kg}$$

Nehmen wir nun die in Auflösung der vorigen Aufgabe enthaltene Gleichung zu Hilfe und setzen für $\mathrm{L} = 40$, $\mathrm{G} = 1^1/_2$, $(\mathrm{L} - l) = 6$, $\lambda = 24$ oder $(\mathrm{L} - \lambda) = 16$, so ergibt sich für das zu ermittelnde Gewicht:

$$x = \frac{62{,}8\,.\,6 - 1\tfrac{1}{2} \cdot 16}{40}$$

oder:

$$x = 8{,}82 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

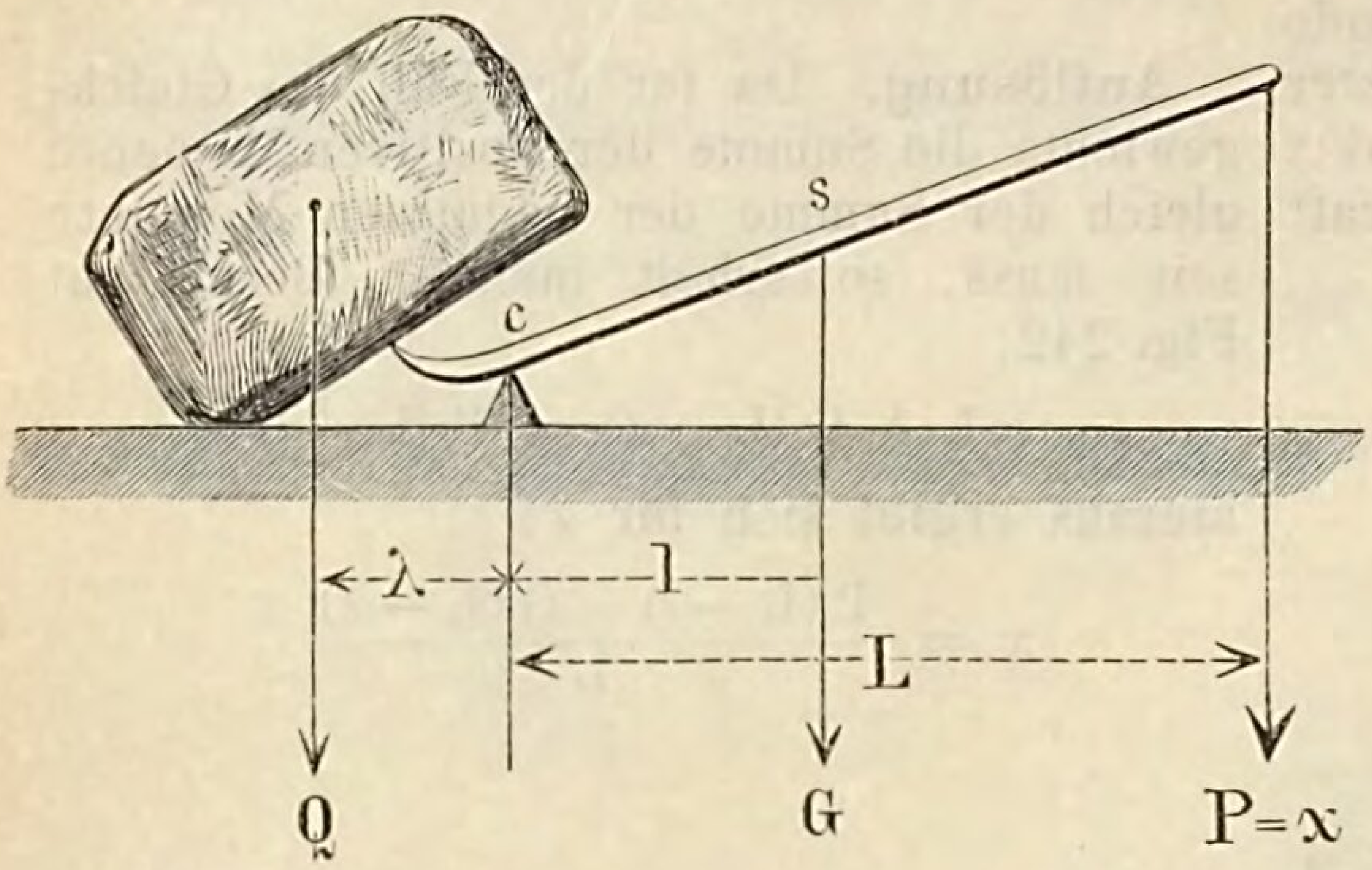
d. h. es muss am Ende des Hebelarms ein Gegengewicht von 8,82 kg angebracht werde n

Aufgabe 212. Bei einer Brechstange (sogen. Gaisfuss) sei das Gewicht derselben G, die zu erhebende Last Q, die Entfernung der senkrechten Schwerlinie vom Drehpunkt sei l, die der Last λ und die der Kraft L. Wie gross ist die anzuwendende Kraft $\mathrm{P} = x$ für den Fall des Gleichgewichts?

Auflösung. In Bezug auf Fig. 227 ist für den Fall des Gleichgewichts:

$$x\,.\,\mathrm{L} + \mathrm{G}\,l = \mathrm{Q}\,\lambda$$

Figur 243.



hieraus ergibt sich für die unbekannte Kraft:

$$x = \frac{Q\lambda - G\,l}{L}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass unter sonst gleichen Umständen die Kraft $= x$ um so kleiner werden muss, je kleiner λ wird, wodurch zugleich ein Grösserwerden von l und L bedingt ist. Daraus folgt, dass die Brechstange am zweckmässigsten wirkt, wenn ihr Stützpunkt c der Last Q möglichst nahe gerückt wird und wenn dieselbe überhaupt möglichst lang ist.

Aufgabe 213. Die mit einer Brechstange zu hebende Last sei 425 kg. Der Angriffspunkt der Kraft sei vom Stützpunkt 180 cm, der Angriffspunkt der Last vom Stützpunkt 27 cm und die vertikale Schwerlinie der Stange vom Stützpunkt 54 cm entfernt.

Welche Kraft muss angewandt werden, wenn die Stange selbst 30 kg wiegt?

Hilfsrechnung.

```
 425 . 27          30 . 54
 2975              1620
  850
 11475
 —1620
  9855 : 180 = 54,75
  900
   855
   720
   1350
   1260
     900
```

Auflösung. Setzen wir in die in Auflösung der vorigen Aufgabe enthaltene Bestimmungsgleichung die gegebenen Zahlenwerte ein, so ergibt sich für die unbekannte Kraft:

$$x = \frac{425 \cdot 27 - 30 \cdot 54}{180}$$

oder:

$$x = 54{,}75$$

Es hält somit im gegebenen Fall eine Kraft von 54,75 kg einer Last von 425 kg das Gleichgewicht.

Aufgabe 214. Das Gewicht eines Schiebkarrens (siehe Fig. 65) sei G, die zu befördernde Last Q, die Entfernung der gemeinsamen senkrechten Schwerlinie von der Radachse sei l und die Entfernung des Angriffspunkts der Kraft P von der Radachse = L. Wie gross ist die anzuwendende Kraft P und der Druck D auf die Achse des Rades?

Auflösung. Nennen wir die unbekannte Kraft $P = x$, so ergibt sich in Bezug auf Fig. 244 für den Fall des Gleichgewichts:

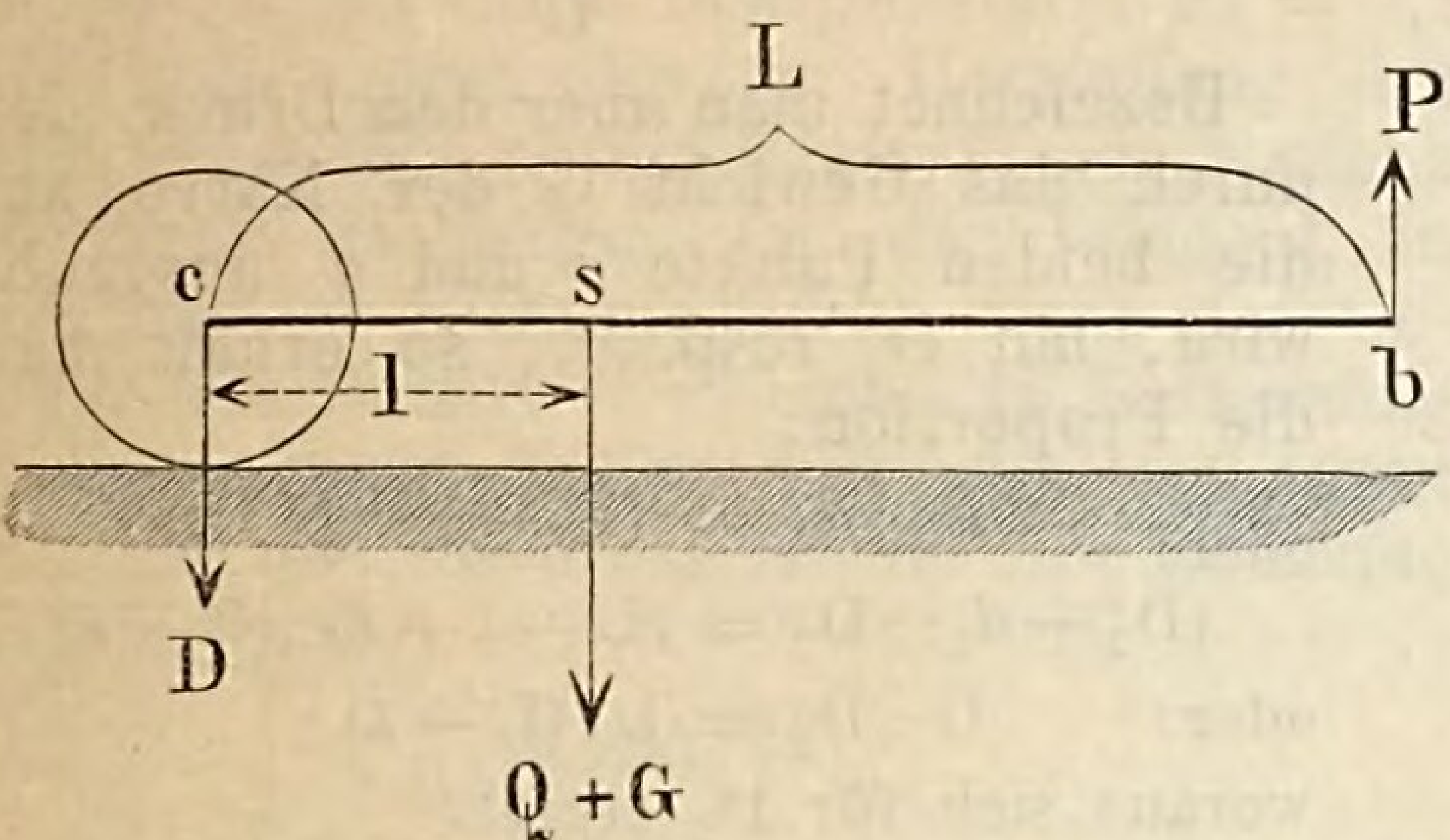
$$L \cdot x = (Q + G)\,l$$

oder:

1). . . . $$x = \frac{l\,(Q + G)}{L}$$

Der Druck von $(Q + G)$ verteilt sich auf die Radachse c und auf den Angriffspunkt b

Figur 244.



der Kraft P in dem Verhältnis der Entfernungen $sc : sb$. Nennen wir nun den auf die Radachse wirkenden Druck D und den in b wirksamen Druck d, so ergibt sich die Proportion:

$$D : d = \overline{sb} : \overline{sc}$$

oder:

$$(D + d) : D = (\overline{sb} + \overline{sc}) : \overline{sb}$$

oder die gegebenen Werte eingesetzt:

$$(G + Q) : D = L : (L - l)$$

und hieraus ergibt sich für den Druck:

$$2). \quad . \quad . \quad D = \frac{(G + Q)(L - l)}{L}$$

Aufgabe 215. Bei einem Schiebkarren sei der Angriffspunkt der Kraft von der Radachse 1,68 m und die gemeinsame Schwerlinie von der Radachse 21 cm entfernt. Die Last beträgt 100 kg und das Gewicht der Karre 20 kg. Wie gross ist die anzuwendende Kraft und wie gross ist der Druck auf die Radachse?

Hilfsrechnungen.

1). . . 21 . 120
 120
 240
 168 | 2520 = 15
 168
 840
 840

2). 120 . 147
 17640 : 168 = 105
 168
 840

Auflösung. Nach der in Auflösung der vorigen Aufgabe gegebenen Gleichung 1). ist die unbekannte Kraft:

$$x = \frac{21\,(100 + 20)}{168}$$

oder:

$$x = 15 \text{ kg} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

Nach der in Auflösung der vorigen Aufgabe gegebenen Gleichung 2). ist der auf die Radachse ausgeübte Druck:

$$D = \frac{(100 + 20)(168 - 21)}{168}$$

oder:

$$D = \frac{120 \,.\, 147}{168}$$

oder:

$$D = 105 \text{ kg} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 2)}$$

Aufgabe 216. Ist die Entfernung der Falllinie der unbelasteten Karre λ und die der Last l, wie gross ist dann, bei der gleichen Bezeichnung der übrigen Grössen wie in Aufgabe 214, die Kraft P und der Druck D?

Auflösung. In dem gegebenen Fall ist nach dem Satz der statischen Momente:

$$P L = G \lambda + Q l$$

woraus sich für P ergibt:

$$P = \frac{G \lambda + Q l}{L}$$

Bezeichnet man ferner den Druck der durch die Last Q auf die beiden Punkte c und a ausgeübt wird, mit resp. D_1 und d_1, so ist nach der Theorie der Parallelkräfte (siehe diese):

$$D_1 : d_1 = (L - l) : l$$

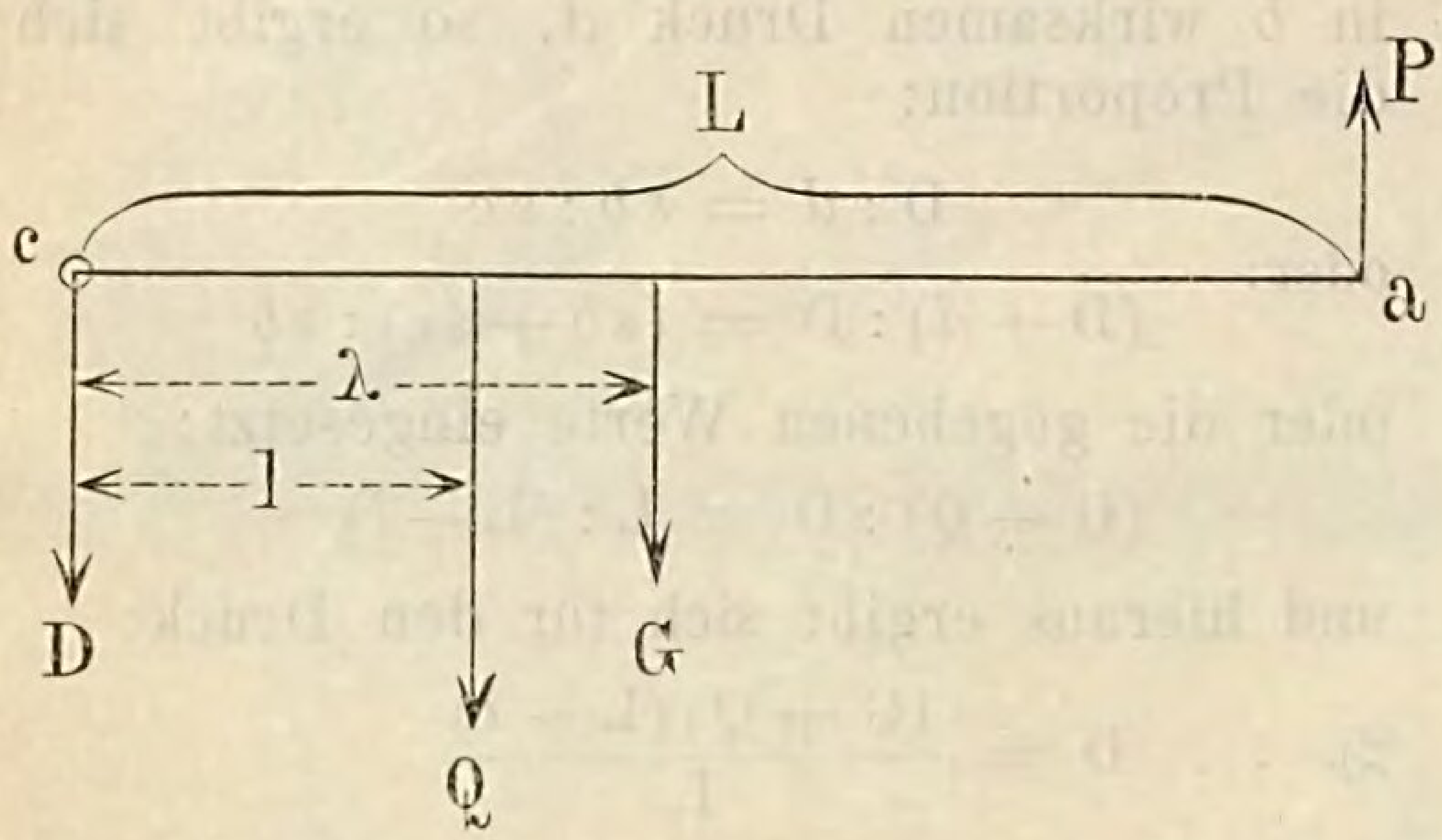
oder:

$$(D_1 + d_1) : D_1 = (L - l) + l : (L - l)$$

oder:

$$Q : D_1 = L : (L - l)$$

Figur 245.



woraus man für D_1 erhält:

$$D_1 = \frac{Q(L-l)}{L}$$

Bezeichnet man aber den Druck, der durch das Gewicht G der Karre auf die beiden Punkte c und a ausgeübt wird, mit D_2 resp. d_2, so erhält man die Proportion:

$$D_2 : d_2 = (L-\lambda) : \lambda$$

oder:

$$(D_2 + d_2) : D_2 = (L - \lambda + \lambda) : (L - \lambda)$$

oder: $G : D_2 = L : (L-\lambda)$

woraus sich für D_2 ergibt:

$$D_2 = \frac{G(L-\lambda)}{L}$$

der Gesamtdruck auf die Radachse ist aber:

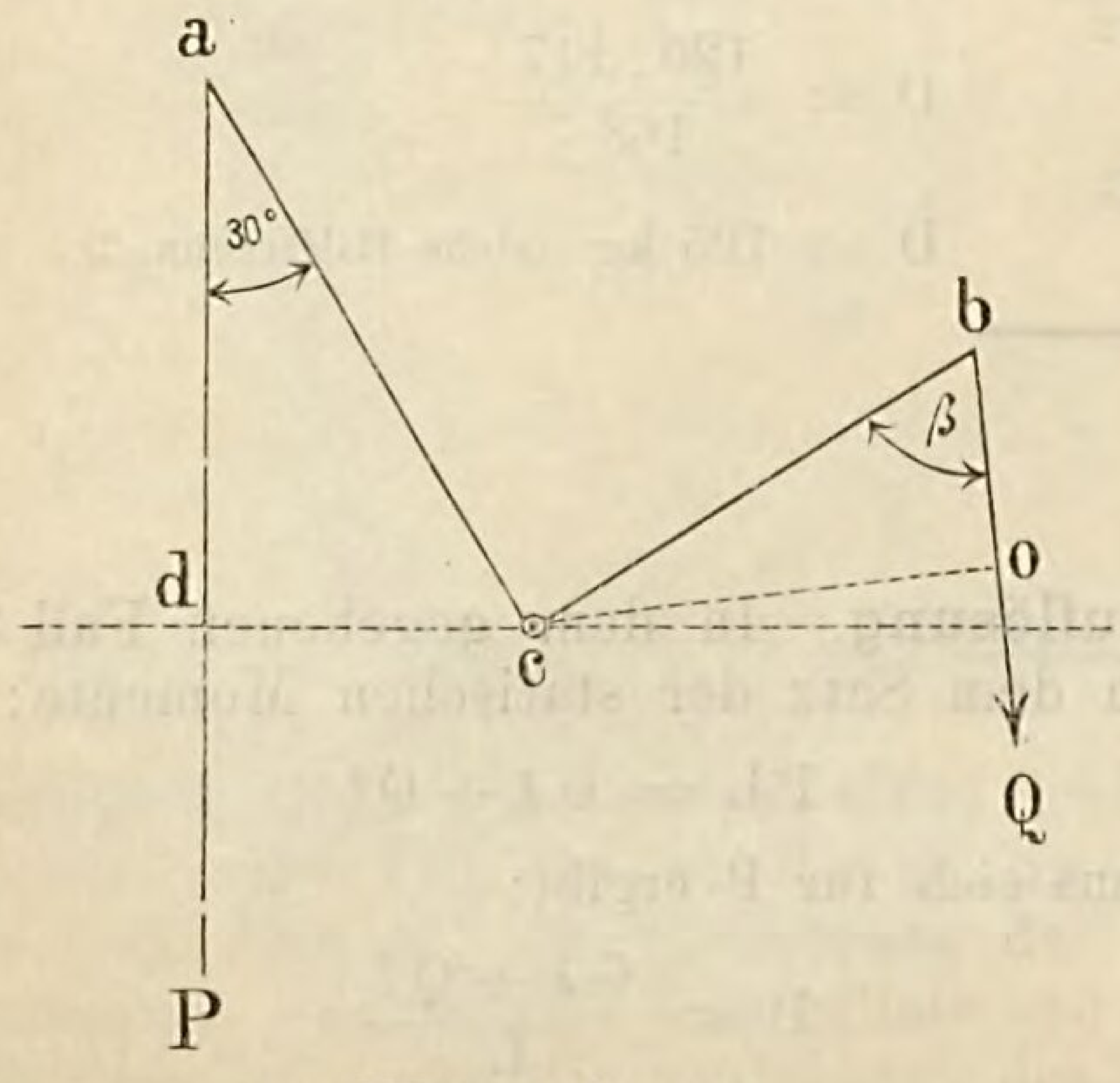
$$D = D_1 + D_2$$

oder die oben ermittelten Werte eingesetzt:

$$D = \frac{Q(L-l) + G(L-\lambda)}{L}$$

Aufgabe 217. Am Hebelarm $\overline{ac} = 3$ m eines gewichtslosen Winkelhebels acb (siehe Fig. 246) wirkt eine Kraft $P = 99$ kg, deren Richtung einen Winkel $\alpha = 30^0$ mit $\overline{ac}$ einschliesst. Am andern Hebelarm $\overline{bc} = 1^2/_3$ m ist eine Kraft $Q = 100$ kg mit jener ins Gleichgewicht gebracht. Welchen Winkel β wird ihre Richtung mit $\overline{bc}$ bilden?

Figur 246.



Auflösung. Da $\frac{\overline{dc}}{\overline{ac}} = \sin\alpha$, so ist:

$$\overline{dc} = \overline{ac} \cdot \sin\alpha$$

und demnach das Moment der Kraft P:

$$M_1 = P \cdot \overline{ac} \cdot \sin\alpha$$

Ist $\overline{co}$ ein Lot auf die Richtung der Kraft Q, so ist der Arm von Q:

$$\overline{co} = \overline{bc} \cdot \sin\beta$$

und das Moment von Q:

$$M_2 = Q \cdot \overline{bc} \cdot \sin\beta$$

Für den Fall des Gleichgewichts muss

$$M_1 = M_2$$

oder:

$$P \cdot \overline{ac} \cdot \sin\alpha = Q \cdot \overline{bc} \cdot \sin\beta$$

sein. Reduzieren wir diese Gleichung auf β, so ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{P \cdot \overline{ac} \cdot \sin\alpha}{Q \cdot \overline{bc}}$$

Setzen wir in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte ein, so ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{99 \cdot 3 \cdot \sin 30^0}{100 \cdot \frac{5}{3}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung ist der gesuchte Winkel

$$\beta = 62^0\, 59'\, 50''$$

oder: $\beta = \text{ca. } 63^0$

Hilfsrechnung.

$$\frac{99 \cdot 3 \cdot \sin 30^0}{100 \cdot {}^5/_3} = \frac{297 \cdot \sin 30^0}{166{,}67}$$

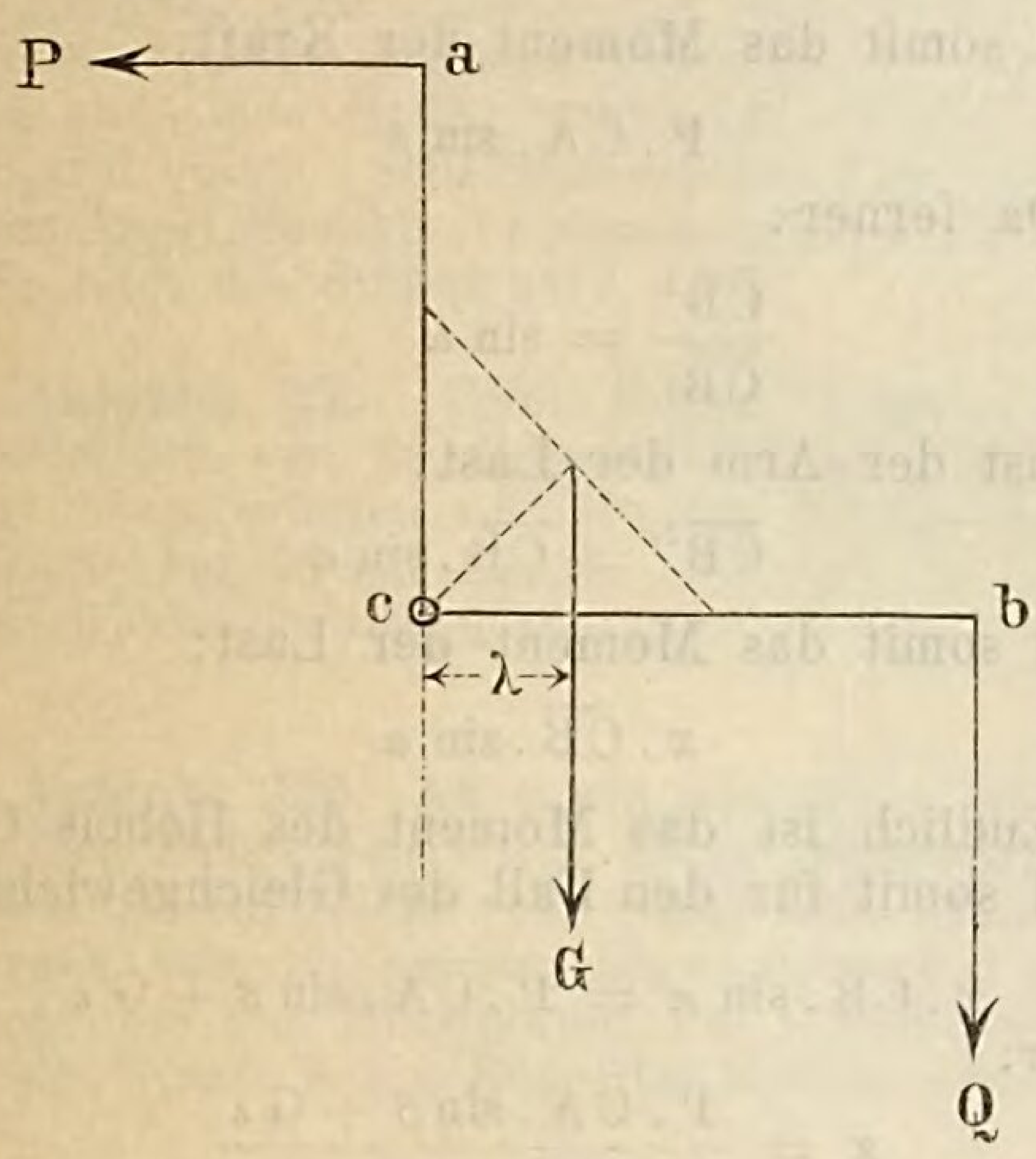
oder: $\log\sin\beta = \log 297 + \log\sin 30^0 - \log 166{,}67$

$$\begin{aligned} \log 297 &= 2{,}4727564 \\ +\log\sin 30^0 &= 9{,}6989700-10 \\ & \overline{2{,}1717264} \\ -\log 166{,}67 &= 2{,}2218574 \\ \log\sin\beta &= \overline{9{,}9498690-10} \end{aligned}$$

mithin: num-log β oder $\beta = 62^0\, 59'\, 50''$

Aufgabe 218. An einem Winkelhebel acb wirkt eine senkrecht abwärts ziehende Last Q (siehe Fig. 247) an dem Hebelarm $\overline{bc} = l_1$; wie gross muss die zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Kraft P sein, welche an einem Hebelarm von der Länge l_2 in horizontaler Richtung wirkt, wenn das Gewicht des Hebels = G und die Entfernung der senkrechten Schwerlinie vom Drehpunkt = λ ist und wie gross ist der in c wirkende Zapfendruck?

Figur 247.



Auflösung. Nach dem Momentensatz ergibt sich die Gleichung:

$$P\,l_2 = Q\,.\,l_1 + G\lambda$$

woraus man für die unbekannte Kraft:

$$1).\quad \ldots \quad P = \frac{Q\,.\,l_1 + G\lambda}{l_2}$$

erhält.

Um den Zapfendruck zu ermitteln, denke man sich P horizontal und G + Q vertikal im Punkt c angreifend. Alsdann entspricht der Zapfendruck der Resultante zweier Kräfte, deren Richtungen einen rechten Winkel miteinander bilden. Diese Resultante ist demnach:

$$2).\quad \ldots \quad R = \sqrt{P^2 + (G + Q)^2}$$

Aufgabe 219. In Bezug auf Fig. 247 sei der Hebelarm $\overline{cb} = 25$ cm, $\overline{ca} = 40$ cm, P = 100 kg, Q = 156 kg und die Entfernung der Schwerlinie vom Drehpunkt λ = 5 cm. Es herrscht Gleichgewicht. a). Wie gross ist das Gewicht des Winkelhebels? b). Wie gross ist der Zapfendruck?

Hilfsrechnungen:

1). . . 100 . 40 = 4000 156 . 25
— 3900 3900
5 | 100
= 20

2). . . 100 . 100 = 10000

176 . 176
1056
1232
176
30976
+10000
40976

$\sqrt{4\,09\,76}$ = 202,425
4
40 | 976
804
404 | 17200
16176
4048 | 102400
80964
40484 | 2143600

Auflösung. a). Aus der in Auflösung der vorigen Aufgabe enthaltenen Gleichung 1). erhält man für die unbekannte Grösse:

$$G = \frac{P\,l_2 - Q\,l_1}{\lambda}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte, so ist:

$$G = \frac{100\,.\,40 - 156\,.\,25}{5}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$G = 20\,\text{kg}$$

d. h. das Gewicht des Winkelhebels beträgt 20 kg.

b). Nach Gleichung 2). in Auflösung der vorigen Aufgabe ist der Zapfendruck:

$$D = \sqrt{100^2 + (156 + 20)^2}$$

oder:

$$D = \sqrt{100^2 + 176^2}$$

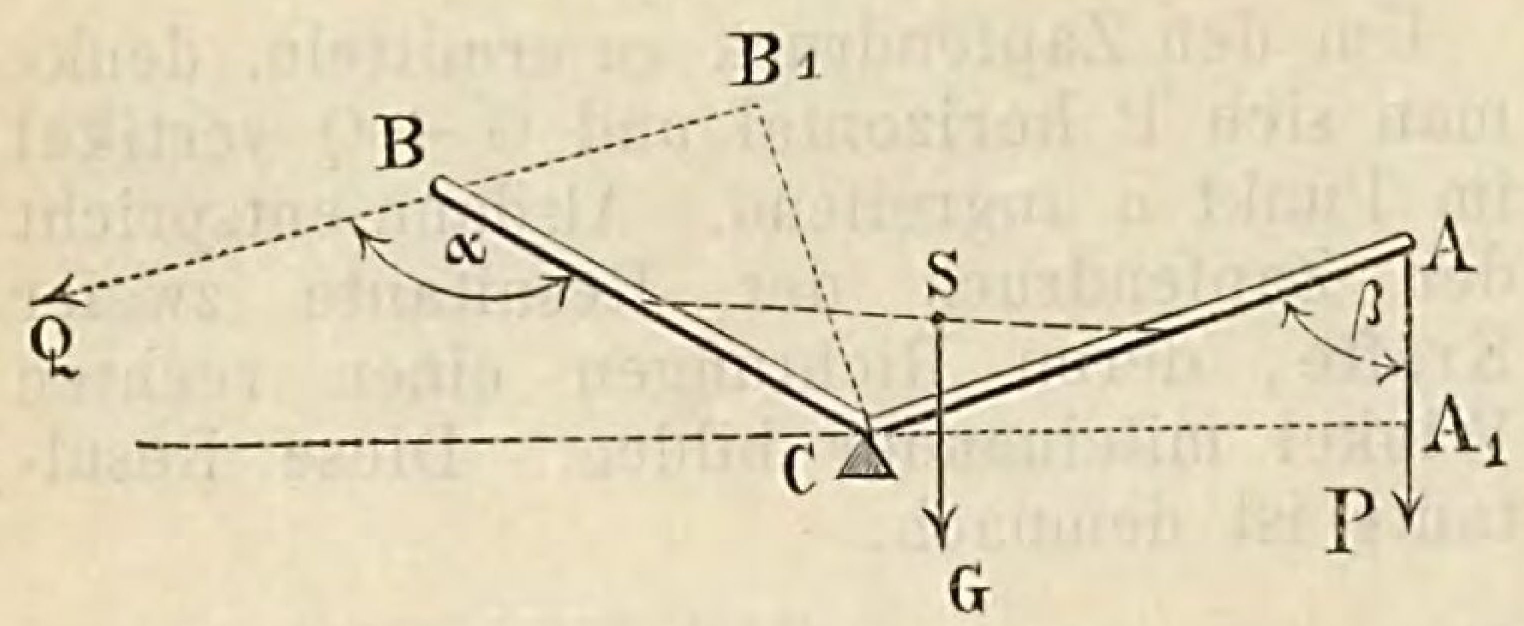
oder:

$$D = 202{,}425$$

d. h. der Druck auf den Punkt c beträgt 202,425 kg.

Aufgabe 220. An einem Winkelhebel (siehe Fig. 248) wirkt an dem Arm $\overline{BC}$ = 60 cm unter dem Winkel $\alpha = 133^0$ eine Last Q = x, welche durch die an dem andern Arm $\overline{AC}$ = 75 cm unter einem Winkel $\beta = 72^0$ wirkende Kraft P = 35 kg im Gleichgewicht erhalten wird. Wie gross ist die Last Q, wenn der Winkelhebel G = $8\frac{1}{2}$ kg wiegt und seine Schwerlinie SG vom Drehpunkt C um λ = 9 cm entfernt ist?

Figur 248.



Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} \log 2625 &= 3{,}4191293 \\ +\log \sin 72^0 &= 9{,}9782063-10 \\ &\overline{3{,}3973356} \end{aligned}$$

num-log = 2496,5
+ 76,5
2573

$$\begin{aligned} \log 60 &= 1{,}7781513 \\ +\log \sin 47^0 &= 9{,}8641275-10 \\ &\overline{1{,}6422788} \end{aligned}$$

num-log = 43,88

mithin ist:

$x = 257300 : 4388 = 58{,}6$
21940
37800
35104
26960
36328

Auflösung. Zunächst sind die Momente von Kraft und Last zu berechnen.

Da

$$\frac{\overline{CA^1}}{\overline{CA}} = \sin\beta$$

so ist der Arm der Kraft:

$$\overline{CA^1} = \overline{CA}\,.\,\sin\beta$$

und somit das Moment der Kraft:

$$P\,.\,\overline{CA}\,.\,\sin\beta$$

Da ferner:

$$\frac{\overline{CB^1}}{\overline{CB}} = \sin\alpha$$

so ist der Arm der Last:

$$\overline{CB^1} = \overline{CB}\,.\,\sin\alpha$$

und somit das Moment der Last:

$$x\,.\,\overline{CB}\,.\,\sin\alpha$$

Endlich ist das Moment des Hebels $G\lambda$ und somit für den Fall des Gleichgewichts:

$$x\,.\,\overline{CB}\,.\,\sin\alpha = P\,.\,\overline{CA}\,.\,\sin\beta + G\lambda$$

oder:

$$x = \frac{P\,.\,\overline{CA}\,.\,\sin\beta + G\lambda}{\overline{CB}\,.\,\sin\alpha}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte ein, so ist:

$$x = \frac{35\,.\,75\,.\,\sin 72^0 + 8\frac{1}{2}\cdot 9}{60\,.\,\sin(180 - 133^0)}$$

oder:

$$x = \frac{2625\,.\,\sin 72^0 + 76{,}5}{60\,.\,\sin 47^0}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 58{,}6$$

d. h. die Last beträgt unter den angegebenen Bedingungen 58,6 kg.

β). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 221. Eine Last von 782 g an einem 55 mm langen Hebelarm soll durch eine an einem 230 mm langen Arm wirkende Kraft im Gleichgewicht erhalten werden. Wie gross ist, ohne Rücksicht auf das Gewicht des Hebels, die anzuwendende Kraft?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 202.

Aufgabe 222. Ein Knabe und ein Mann tragen an einer Stange von $2^1/_2$ m Länge eine Last von 70 kg; ihre Kräfte verhalten sich zu einander wie 5 : 8. Wohin ist die Last zu hängen, damit sie (ohne Rücksicht auf das Gewicht der Stange) verhältnismässig verteilt ist, und wieviel hat jeder zu tragen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 203. Die dort angegebene Kraft und Last entspricht dem hier gegebenen Druck auf jeden der beiden Stützpunkte, während der dort gesuchte Stützpunkt dem hier gesuchten Aufhängepunkt der Last entspricht.

Aufgabe 223. Die Länge eines homogenen Hebels beträgt 3 m, sein Gewicht 15 kg und an seinen Enden hängen die Gewichte P = 8 und Q = 14 kg. Wie weit liegt der Stützpunkt von der grösseren Kraft entfernt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 206 resp. 207.

Aufgabe 224. Die Länge eines homogenen Hebels sei 320 cm, sein Gewicht $14^1/_2$ kg und die an seinen Enden wirkenden Kräfte seien 38 und 95 kg. Sein Schwerpunkt liege 100 cm vom Angriffspunkt der grösseren Kraft entfernt. Wo liegt der Stützpunkt?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus der gelösten Aufgabe 208 resp. 209.

Aufgabe 225. Zwei Kinder tragen einen Zuckerhut von 25 Pfund Gewicht Derselbe hat 28 cm unteren und $9^1/_3$ cm oberen Durchmesser bei 56 cm Länge. Wieviel hat jedes der Kinder zu tragen?

Andeutung. Man berechne zunächst die Lage des Schwerpunkts eines abgestumpften Kegels von den gegebenen Dimensionen und verteile die im Schwerpunkt vereinigt gedachte Last im Verhältnis der Angriffslinien, gleichwie bei der Lösung der Aufgabe 203 und 250.

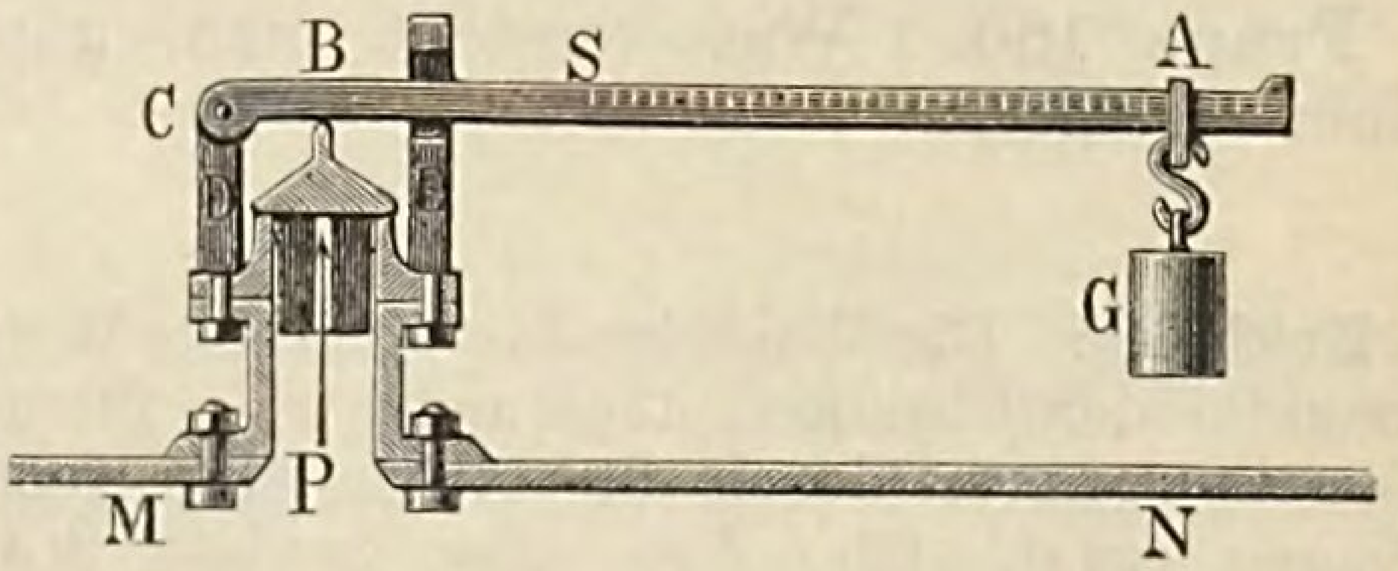
Aufgabe 226. An einem einarmigen prismatischen Hebel von $1^1/_2$ m Länge und 5 kg Gewicht ist ein 25 cm vom Stützpunkt wirkender Druck von 130 kg zu überwinden; wie gross muss die zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Kraft P am Ende des Hebels sein?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus den gelösten Aufgaben 210 u. 211.

Aufgabe 227. Ein Sicherheitsventil in Form eines einarmigen Hebels von 50 cm Länge, der in 5 cm Entfernung vom Stützpunkt einen die Oeffnung des Dampfkessels verschliessenden Kegel und am andern Ende ein Gewicht trägt (siehe Fig. 249), wiegt selbst 1,2 kg. Wie gross muss das anzuhängende Gewicht sein, wenn die Spannung des Dampfes nicht über 6 Atmosphären, d. h. pro Quadratzentimeter Kesselwand nicht über 6,18 kg betragen soll, wenn das Ventil selbst 300 g wiegt und wenn die Unterfläche des Ventils 3 Quadratzentimeter gross ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 211.

Figur 249.



Aufgabe 228. Mit einem Holzstab von 4 kg Gewicht soll eine Last von 108 kg gehoben werden. Welche Kraft ist erforderlich, wenn in 20 cm Entfernung vom Angriffspunkt der Last ein Stein als Stützpunkt unter die Stange geschoben wird? (Siehe Fig. 243.)

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich aus den Lösungen der Aufgaben 212 und 213.

Aufgabe 229. Bei einem Schiebkarren ist der Angriffspunkt der Kraft von der Radachse 1,75 m entfernt. Die Entfernung der senkrechten Schwerlinie des unbelasteten Karrens von der Radachse beträgt 80 cm und die der Last 60 cm. Es steht eine Kraft von 28 kg zur Verfügung. Wie gross darf die zu befördernde Last sein und wie gross ist der Druck auf die Radachse?

Andeutung. Man setze die hier gegebenen Zahlenwerte in die in der Auflösung der Aufgabe 216 gegebenen Bestimmungsgleichungen für P und D.

Aufgabe 230. An einem Winkelhebel, dessen Gewicht unberücksichtigt bleiben soll, seien die beiden Hebelarme 25 und 30 cm. Am ersten Arm wirke eine Kraft von 12 kg unter einem Winkel von 50° gegen diesen Arm. Wie gross wird die am andern Arm wirkende Last sein, wenn deren Richtung mit dem Hebelarm einen Winkel von 40° bildet?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 217, nur dass hier die Last unbekannt ist, während dort der Winkel gesucht wurde, unter dem die Last an ihrem Arm angreift.

Aufgabe 231. An einem Winkelhebel abc (siehe Fig. 247) wirke eine senkrecht abwärts ziehende Last von 35 kg an dem Hebelarm $bc = 63$ cm; wie gross muss die zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Kraft P sein, welche an einem Hebelarm von der Länge $ac = 94$ cm in horizontaler Richtung wirkt, wenn der Hebel selbst 8 kg wiegt und die Entfernung der senkrechten Schwerlinie vom Drehpunkt = 15 cm ist, und wie gross ist der in c wirkende Zapfendruck?

Andeutung. Man setze die hier gegebenen Zahlenwerte in die beiden Bestimmungsgleichungen, die in der Auflösung der Aufgabe 218 enthalten sind. (Siehe auch die Auflösung der Aufgabe 219.)

Aufgabe 232. An einem Winkelhebel (siehe Fig. 248) wirke an dem Arm $\overline{BC} = 75$ cm unter dem Winkel $\alpha = 128^0$ eine Last von 100 kg, welche durch die an dem andern Arm $\overline{ac} = 96$ cm unter einem Winkel von 65° wirkende Kraft P im Gleichgewicht erhalten wird.

a). Wie gross ist die Kraft P, wenn der Winkelhebel 15 kg wiegt und seine senkrechte Schwerlinie vom Drehpunkt C um 22 cm entfernt ist? b). Wie gross ist der Zapfendruck?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 220, nur dass hier die Kraft, dort die Last gesucht wird.

c. Die auf dem Prinzip des Hebels beruhenden Wagen.

Frage 166. Was versteht man unter einer Wage?

Erkl. 205. Die Wage ist das wichtigste Werkzeug für den Physiker, noch mehr aber für den Chemiker; erst durch die Anwendung feiner Wagen ergab sich, dass eine gewisse Stoffmenge oder Masse durch viele Veränderungen hindurch immer genau dieselbe bleibt, dass die chemischen Vorgänge also keine Stoffumwandlungen sind, ein Satz, welcher die Grundwahrheit der Chemie bildet; erst durch genaues Wägen wurde die Verbrennung als eine Verbindung mit Sauerstoff erkannt und hiermit der Chemie durch Lavoisier (1770) neue Bahnen geöffnet.

Antwort. Man versteht unter einer Wage vorzugsweise eine Vorrichtung, mittels welcher man die Gewichte der Körper bestimmen kann. Mittels der Wage misst man nicht eigentlich Gewichte, sondern die Stoffmengen oder Massen, aus denen die Körper zusammengesetzt sind, denn das Gewicht eines Körpers ist veränderlich und ist im Mittelpunkt der Erde und an gewissen Stellen zwischen den Weltkörpern gar nicht vorhanden, hat also keinen wirklichen Bestand; die unveränderlichen Massen dagegen haben wirklichen Bestand. Da sich nun an einem und demselben Ort der Erde die Massen zweier und mehr Körper verhalten wie ihre Gewichte, so kann man die Massen durch die Gewichte messen und vergleichen. Demnach geben uns die Wagen Aufschluss über die Massen.

Frage 167. Woraus bestehen die am meisten gebrauchten Wagen?

Antwort. Die am meisten gebrauchten Wagen bestehen entweder aus einem einfachen geradlinigen Hebel, der gleich- oder ungleicharmig sein kann, oder sie werden aus einem Winkelhebel gebildet, oder sie sind aus mehreren Hebeln zusammengesetzt.

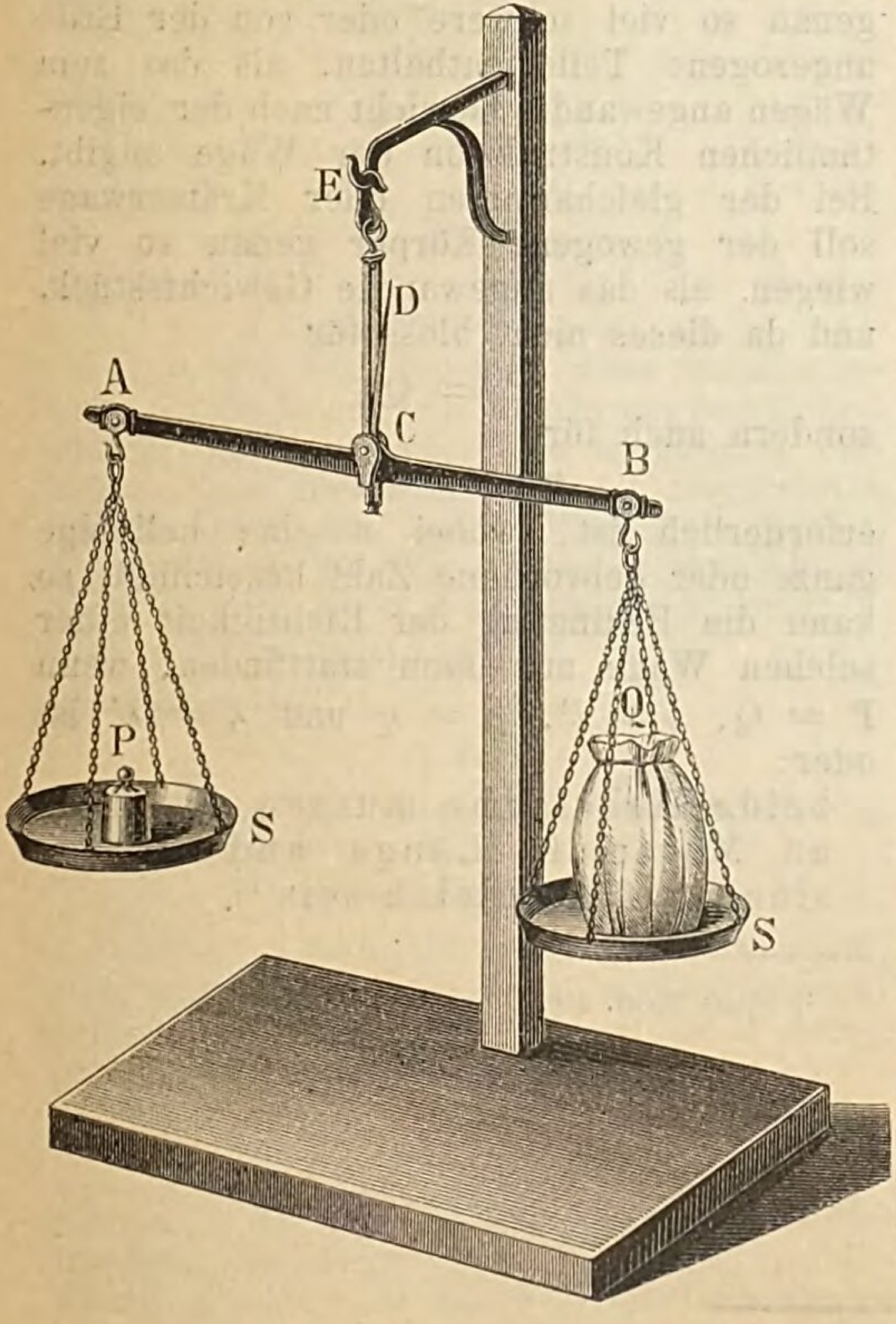
Frage 168. Welche Arten von Wagen unterscheidet man hiernach?

Antwort. Man unterscheidet hiernach:
α). gleicharmige oder gemeine Wagen,
β). ungleicharmige oder Schnellwagen,
γ). Zeigerwagen,
δ). Schiffs-, Brücken- und Tafelwagen.

α). Die gleicharmige oder gemeine Wage.

Frage 169. Aus welchen Teilen besteht im wesentlichen die gleicharmige oder gemeine oder Krämerwage?

Figur 250.



Antwort. Die gleicharmige, gemeine oder Krämerwage (siehe Fig. 250) besteht im wesentlichen aus einem Wagebalken AB, der Zunge CD, der Schere CE, der Achse C und den beiden Wagschalen SS.

Der Wagebalken ist ein einfacher Stab, welcher in einem Punkt C unterstützt, entweder in einer gabelförmigen Scheere $\overline{CE}$ oder auf einer feststehenden Säule so ruht, dass er sich in einer senkrechten Ebene frei drehen kann. In der Mitte des Wagebalkens ist senkrecht zu demselben ein Zeiger, die Zunge genannt, angebracht, der bei den gewöhnlichen Wagen nach oben, häufig aber, der Bequemlichkeit und Raumersparnis wegen, nach unten gerichtet ist.

Zu beiden Seiten des Stützpunktes C, an den Enden des Wagebalkens befinden sich die zwei Aufhängepunkte A und B für die Belastung; der eine für den zu wägenden Gegenstand Q, der andere für die entsprechenden Gewichte P.

Da die Krämerwage ein gleicharmiger Hebel ist, und da bei demselben Gleichgewicht stattfindet, wenn

$$P l = Q l^1$$

ist, wobei P und Q die wirkenden Kräfte oder Gewichte, l und l^1 die resp. Längen der Hebelarme vom Stützpunkt C aus gemessen bezeichnen, so folgt hieraus, dass beide Arme gleich lang sein müssen. Allein der Hebel ist hierbei kein mathematischer, sondern ein physischer, aus einem Körper bestehend, welcher selbst ein gewisses Gewicht hat, und da auch dieses zugleich auf

die Hebelarme wirkt, so muss das Gewicht eines jeden der beiden Hebelarme in seinem Schwerpunkt genommen werden, um dessen Abstand vom gemeinschaftlichen Unterstützungspunkt zu finden. Hiernach würde der Zustand des Gleichgewichts hergestellt sein, wenn

$$P l + p\lambda = Q l^1 + q\lambda^1$$

wäre, worin p und q die Gewichte beider Arme in ihrem Schwerpunkt, λ und λ^1 aber die Abstände beider Schwerpunkte vom gemeinschaftlichen Unterstützungspunkt bezeichnen.

Frage 170. Welche Bedingungen hat eine gute Wage zu erfüllen?

Antwort. Eine gute Wage muss

1) richtig sein, sie muss
2) im stabilen Gleichgewicht sein und sie muss
3) empfindlich sein.

Frage 171. Was heisst das, eine Wage muss richtig sein und wenn kann bei der gleicharmigen Wage die Bedingung der Richtigkeit nur stattfinden?

Erkl. 206. Allerdings kann ein Zustand des Gleichgewichts stattfinden, wenn die Ungleichheiten auf beiden Seiten sich aufheben, was auch für gegebenes $P = Q$ möglich sein würde, wenn die dabei stattfindende Ungleichheit von $p\lambda$ und $q\lambda'$ aufgehoben wäre, nicht aber für

$$nP = nQ$$

und die Wage würde dann bloss für ein bestimmtes Gewicht allerdings richtig sein, für jedes andere aber unrichtig. Es ist jedoch nicht schwer zu entscheiden, ob eine gegebene Wage in dieser Beziehung richtig sei, denn da ohne eine Belastung in beiden Wagschalen die letzteren selbst die Grössen P und Q der Gleichung abgeben, oder diejenigen Kräfte sind, welche auf die beiden Arme des Hebels wirken, so würde in dem Fall, wenn diese Grössen ungleich sind und die Wage sich dennoch mit ihnen ins Gleichgewicht stellt, nach Wegnahme derselben

$$P l + Q l^1 = 0$$

dagegen

$$p\lambda \text{ grösser oder kleiner } q\lambda^1$$

werden. Man darf daher, um diesen Fehler zu entdecken, nur von einer im Zustand des Gleichgewichts sich befindenden Wage die Schalen abnehmen, worauf ein mit diesem Fehler behafteter Wagebalken aus dem Gleichgewicht kommen und an einer Seite herabsinken wird.

Antwort. Eine Wage muss richtig sein, d. h. die gewogenen Gegenstände müssen genau so viel schwere oder von der Erde angezogene Teile enthalten, als das zum Wägen angewandte Gewicht nach der eigentümlichen Konstruktion der Wage angibt. Bei der gleicharmigen oder Krämerwage soll der gewogene Körper genau so viel wiegen, als das angewandte Gewichtsstück, und da dieses nicht bloss für

$$P = Q$$

sondern auch für

$$nP = nQ$$

erforderlich ist, wobei n eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet, so kann die Bedingung der Richtigkeit einer solchen Wage nur dann stattfinden, wenn $P = Q$, $l = l^1$, $p = q$ und $\lambda = \lambda^1$ ist oder:

beide Hebelarme müssen einander an Material, Länge und Dimensionen völlig gleich sein[1]).

[1]) Siehe Erkl. 206.

Frage 172. Ist es möglich, dass sich der Wagebalken ins Gleichgewicht stellt, ohne dass $P = Q$ und $l = l^1$ ist?

Antwort. Es ist sehr wohl möglich, dass sich der Wagebalken, sowohl ohne die anhängenden Schalen als auch mit denselben ins Gleichgewicht stellt, ohne dass

$$P = Q \text{ und } l = l^1$$

ist, denn es kann auch Gleichgewicht stattfinden, wenn eine schwerere Schale am kürzeren und eine leichtere Schale am längeren Hebelarm hängt, obgleich der Wagebalken für sich allein gleichfalls sich ins Gleichgewicht stellt.

Frage 173. Wie kann man erfahren, ob bei einer im Gleichgewicht befindlichen Wage $P = Q$ und $l = l^1$ ist?

Erkl. 207. Inwiefern das in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren begründet ist, ergibt sich aus der Formel für das Gleichgewicht. Es seien die Gewichte der Wagschalen g und $g + x$, die Längen der Hebelarme l und $l + y$, so wird Gleichgewicht stattfinden, wenn

$$(g + x)\,l = (l + y)\,g$$

oder:

$$l + y = \frac{(g + x)\,l}{g}$$

also:

$$y = \frac{(g + x)\,l}{g} - l$$

oder:

$$y = \frac{lg + lx - lg}{g}$$

oder:

$$y = \frac{lx}{g}$$

oder:

$$y : l = x : g$$

ist, d. h. der eine Hebelarm muss um eine gewisse Grösse länger sein, welche mit dem Uebergewicht der einen Wagschale im geraden Verhältnis ihres Hebelarms und im umgekehrten des Gewichts der andern Wagschale wächst. Werden dann die Wagschalen verwechselt, so wirkt auf den einen Hebelarm ein Moment:

$$M_1 = lg$$

auf den andern aber

$$M_2 = (g + x)(l + y)$$

und letzterer hat daher ein Uebergewicht von der Grösse:

$$(l + y)\,x + gy$$

Werden dann in die Wagschalen einer solchen unrichtigen, aber doch im Gleichgewicht befindlichen Wage die Gewichte P und Q gelegt, so muss für den Zustand des Gleichgewichts

$$Q = P \cdot \frac{l}{l + y}$$

sein, d. h. das Gewicht auf der Wagschale des längeren Hebelarms muss in demselben Verhältnis kleiner sein, als der Hebelarm länger

Antwort. Nachdem man sich überzeugt hat, dass der Wagebalken bei leeren Schalen horizontal steht, was durch die Stellung der Zunge angegeben wird, wechselt man die Schalen und ihre Aufhängepunkte um. Indessen ist dieses bei vielen Wagen nicht thunlich oder doch beschwerlich und man bringt daher meistens ein anderes, ebenso einfaches Prüfungsmittel in Anwendung, indem man die Wage mit einer in jeder Schale liegenden Last ins Gleichgewicht bringt und dann die Lasten umwechselt, so dass das Gewicht der rechten Schale nun in die linke kommt und umgekehrt, und sieht zu, ob der Wagbalken noch immer horizontal ist oder nicht. Im ersteren Fall sind die beiden Arme gleich und die Wage ist richtig; wären nämlich die Arme ungleich, so hätten im ersteren Falle auch die Gewichte ungleich sein müssen, da an ungleichen Hebelarmen nur ungleiche Kräfte sich das Gleichgewicht halten können, wobei bekanntlich am kleineren Hebelarme die grössere Kraft wirkt und umgekehrt. Wären aber die Gewichte ungleich gewesen, so wirkte nach der Verwechselung derselben das grössere Gewicht an dem grösseren Hebelarm und umgekehrt; es hätte also Gleichgewicht nicht eintreten können, und der Wagbalken hätte sich, anstatt horizontal zu stellen, nach der einen oder anderen Seite neigen müssen.

ist. Nach der Verwechselung dieser Gewichte würde auf die eine Wagschale das Moment:

$$M_1 = P \cdot \frac{l^2}{l+y}$$

auf die andere aber

$$M_2 = P\,(l+y)$$

wirken, oder beide Grössen durch $(l+y)$ dividiert, gibt:

$$P \cdot \frac{l^2}{(l+y)^2} \text{ und } P$$

d. h. das Gleichgewicht wird um so mehr gestört werden, je mehr $\frac{l^2}{(l+y)^2}$ von der Einheit abweicht, oder je grösser der Wert von y ist.

Frage 174. Wie kann man die Grösse des Fehlers einer Wage auffinden und durch Verbesserung der ungleichen Längen beider Hebelarme korrigieren?

Erkl. 208. Das Wägen mit sehr feinen Wagen ist höchst zeitraubend und erfordert grosse Sorgfalt, denn wenn auch zur Abhaltung des Luftzugs die Wage sich in einem Glaskasten befindet, so dauert es doch wegen der nach den Pendelgesetzen höchst langsamen Schwingungen sehr lange, bis der horizontale Stand des Wagebalkens eintritt, zu dessen vollkommener Herstellung meistens die hinlänglich feinen Gewichtsteilchen fehlen, da dieselben zu klein werden, um bequem gehandhabt zu werden. Man bedient sich deshalb zur Ausgleichung der kleinsten Gewichtsdifferenzen sog. Reiter- oder Laufgewichte. Das sind aus feinstem Gold oder Platindraht gebogene ∩-förmige Häkchen, welche auf den Wagebalken gesetzt werden und je nach dem Zweck der Wage 1 g oder 0,1 g wiegen. Zu dem Zweck ist die obere Stange des Wagebalkens vom Stützpunkt bis zum Aufhängepunkt der Schale in 10 oder 100 gleiche Teile geteilt. Der Ort am Wagebalken, wo das Reiterchen sitzen muss, wenn Gleichgewicht herrschen soll, gibt dann den Zuwachs, welchen die Gewichte erfahren, beziehentlich den Abzug, wenn das Reiterchen auf Seiten der Last aufgesetzt war.

Beim Wägen selbst wird man am schnellsten zum Ziel gelangen, wenn man die Gewichte der Reihe nach anwendet, ohne eines zu übergehen; denn man täuscht sich sehr oft, wenn man schnell nach den kleineren greift, und ist dann genötigt, wieder von vorn zu beginnen. Um die Wage keinen unnötigen Schwankungen auszusetzen, nimmt man ein zu schweres Gewicht nicht weg, bevor das nächst kleinere aufgelegt ist. Man soll die Wage je nach Beschaffenheit ihres Mechanismus auch im Anfang nur so wenig heben, dass die Wagschalen gerade nur noch spielen können, weil bei dem Wechsel der

Antwort. Wie schon bemerkt, ist die Bedingung der Gleichheit beider Arme dann vorhanden, wenn

$$P = Q$$

den Zustand des Gleichgewichts hervorbringt, oder wenn die Wage sich bei gleichen Gewichten in beiden Schalen einstellt. Ist man im Besitz solcher gleichen Gewichte, so ist damit der Versuch bald angestellt, im entgegengesetzten Fall muss man sich diese zu verschaffen suchen. Zu diesem Zweck legt man in die eine Schale ein Gewicht P und in die andere so viel Gewichtsstücke (Schrotkörner) bis das Gleichgewicht hergestellt ist, nimmt dann P heraus, legt statt dessen ein anderes Q, in der Regel etwas schwerer als P hinein, und vermindert dieses so lange, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt worden ist, wodurch man also $P = Q$, zwei gleiche Gewichte hat. Belastet man die Wagschalen mit beiden letzteren, so wird im Falle der Gleichheit beider Wagebalken Gleichgewicht vorhanden sein, im entgegengesetzten Falle aber ein Niedersinken des längeren Hebelarmes erfolgen.

Die Abweichung der Länge ergibt sich aus der Ungleichheit des Gewichts eines und desselben Körpers in beiden Wagschalen. Denn wenn der Körper in der einen Schale liegend g, in der andern aber γ wiegt, das wahre Gewicht aber $= x$ ist, so folgt:

$$l : l^1 = g : x$$
$$l : l^1 = x : \gamma$$

$$g : x = x : \gamma$$

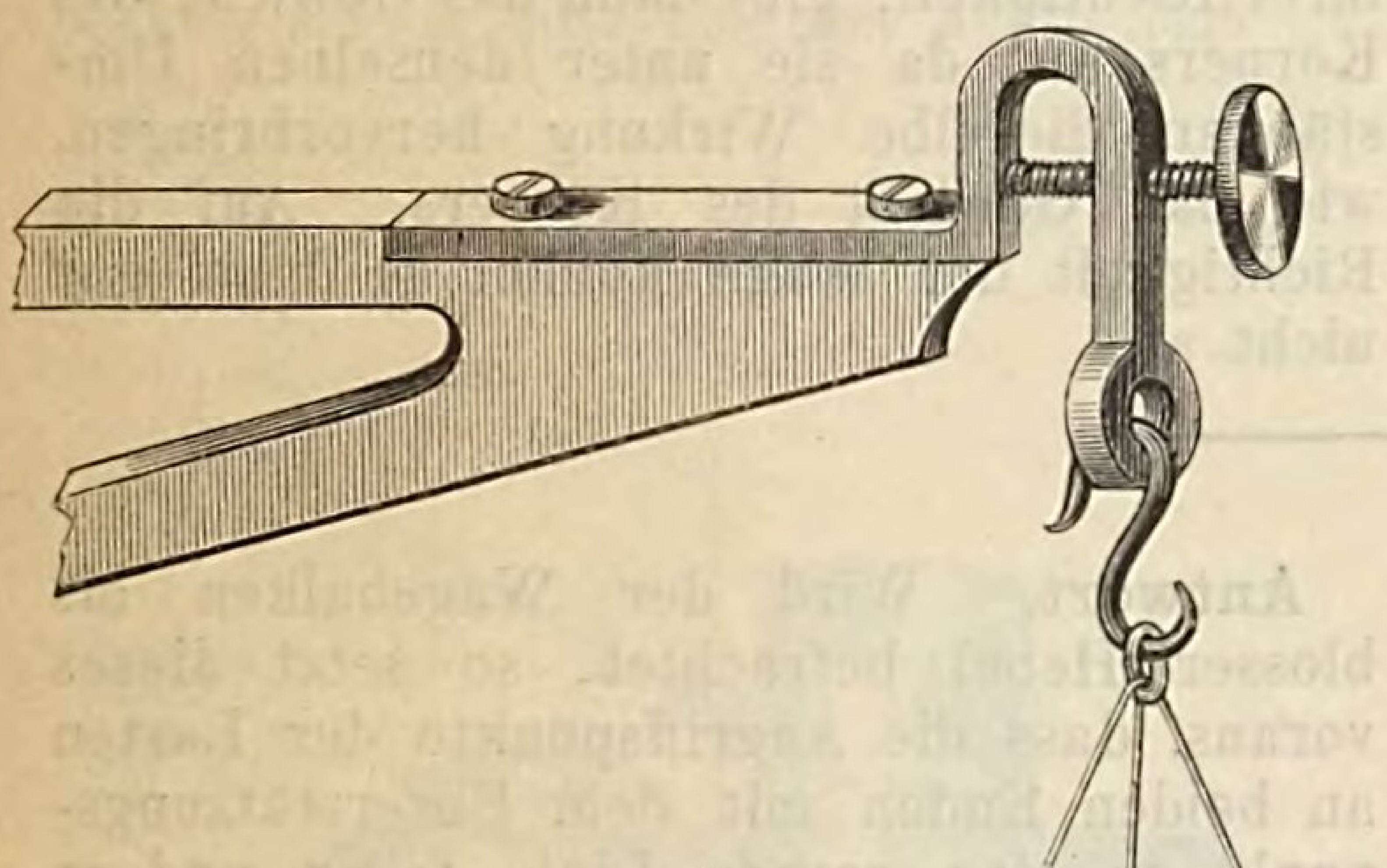
also:

$$x = \sqrt{g\gamma}$$

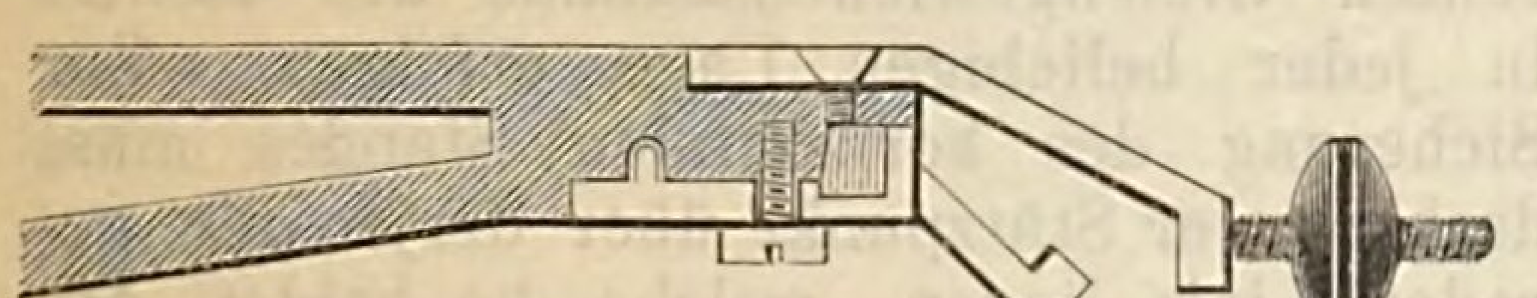
schwereren Gewichte das Umschlagen nach der einen oder andern Seite sehr rasch geschieht und dadurch die Schneiden Schaden leiden könnten. Nur durch die schonendste Behandlung lässt sich ein solches Instrument in gutem Zustand erhalten.

Den Stillstand der Wage wartet man nicht ab; da der Zeiger sich auf geteiltem Gradbogen bewegt, so kann man den gleichen Ausschlag sehr sicher beurteilen; man erhält sogar dabei sicherere Resultate als beim wirklichen Stillstand.

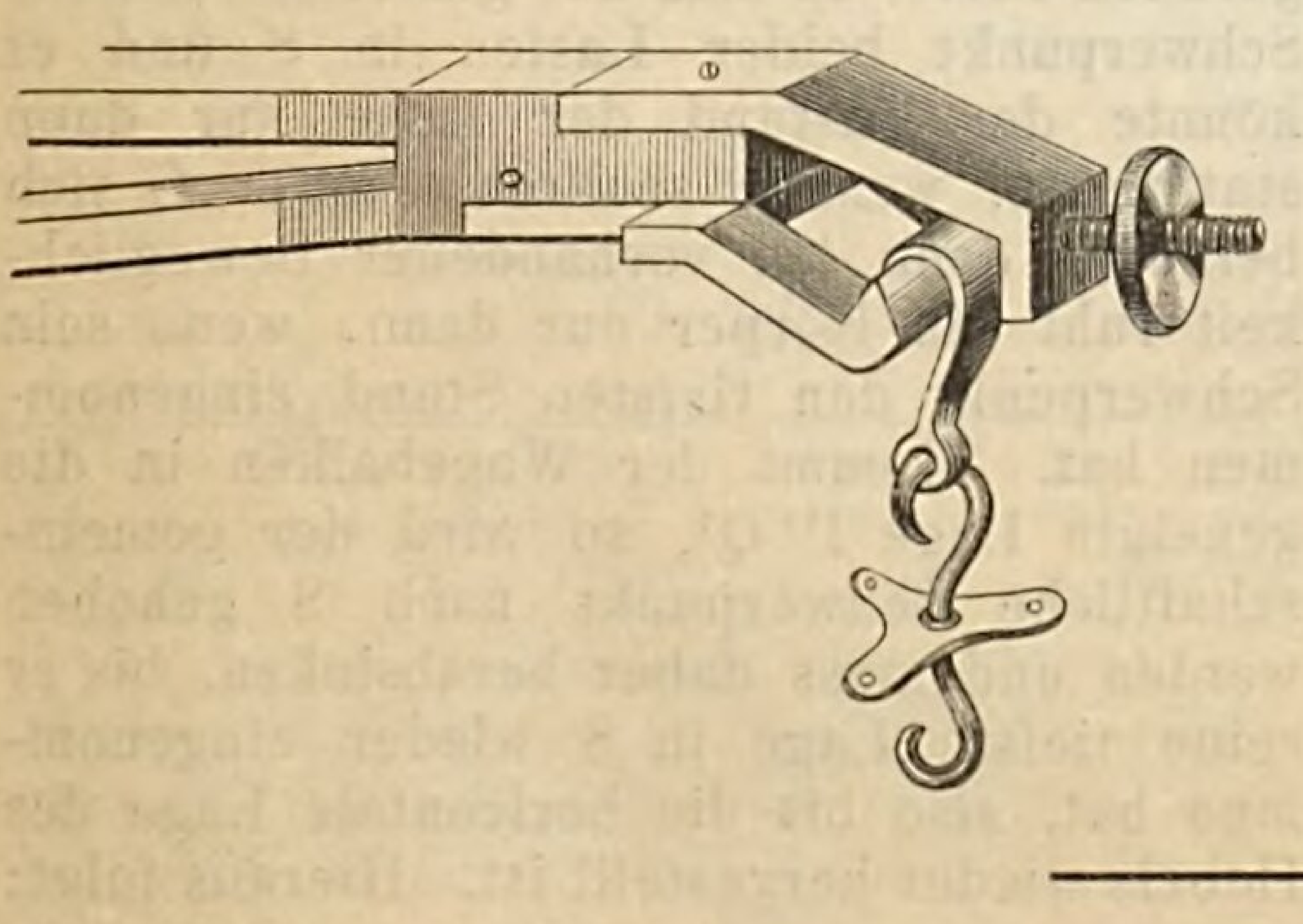
Figur 251.



Figur 252.



Figur 253.



wonach also das wahre Gewicht der mittleren Proportionale aus beiden falschen Gewichten gleich ist.

Betrüge z. B. $g = 16$ Milligramm, $\gamma = 15$ mg, so wäre

$$x = \sqrt{16 . 15} = 15{,}49 \text{ mg}$$

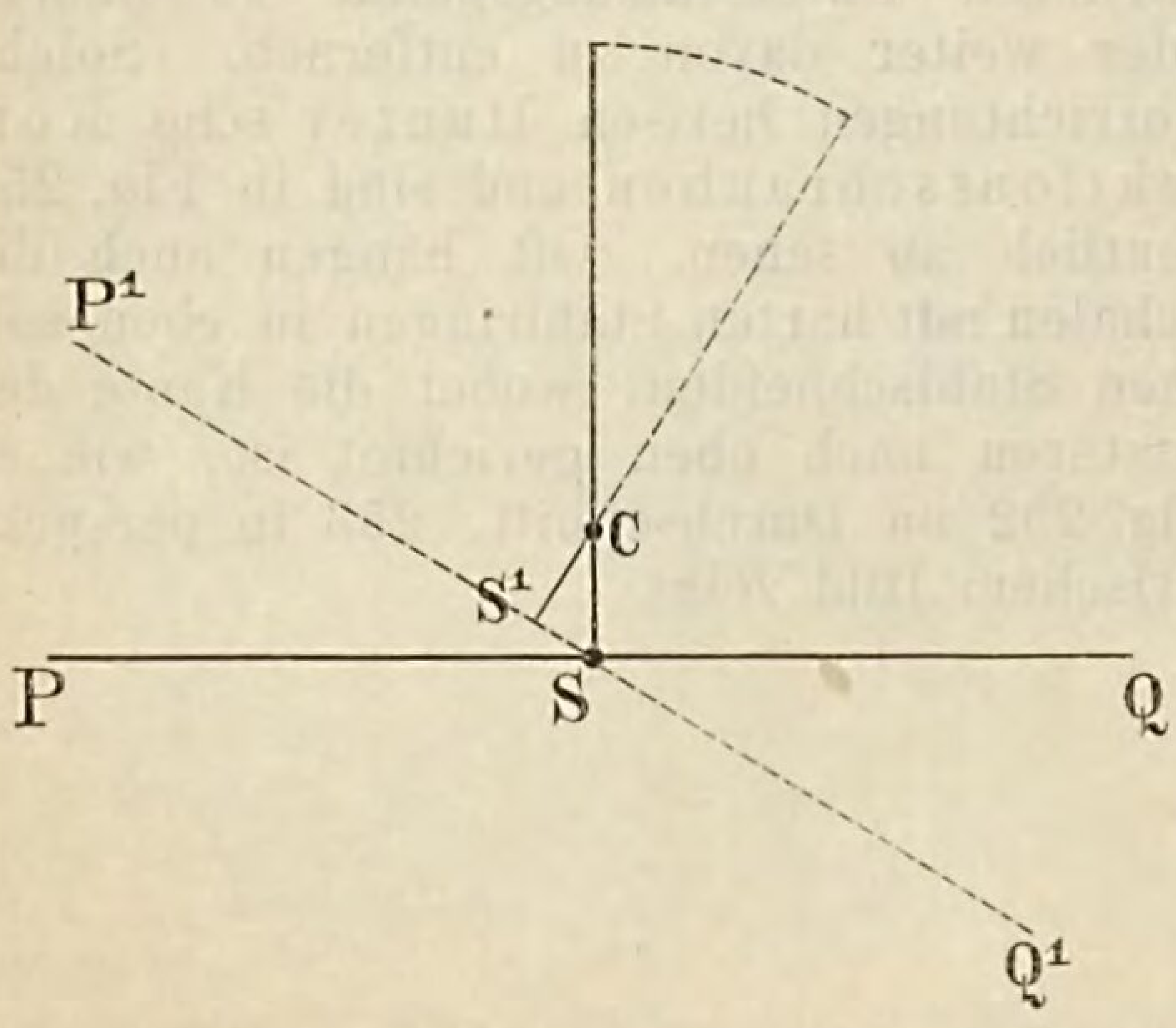
und die beiden Arme verhielten sich wie 1600 : 1549 oder nahe wie 32 : 31. Ein so grober Fehler, wie dieser, würde sich indess schon durch blosse Messung ergeben, allein man verlangt die Genauigkeit der Wägungen in so hohem Grad, dass dieser durch mechanische Kunstfertigkeit nie erreicht wird, und das angegebene Verfahren ist daher nicht bloss erforderlich, um die Richtigkeit der Wage ursprünglich herzustellen, sondern auch späterhin, um eine durch den Gebrauch etwa entstandene Unrichtigkeit aufzufinden. Sollte sich eine solche wirklich zeigen, so wird sie durch den Ausschlag oder ein Herabsinken des einen Wagebalkens sichtbar und man könnte für künftige Wägungen den so bestimmten Stand als den normalen betrachten, was jedoch nur annähernd und für verschiedene Belastungen nicht völlig genau wäre. Daher befindet sich an jedem Ende des Wagebalkens eine Mikrometerschraube, um mittels derselben den Aufhängepunkt der dazu gehörigen Wagschale dem mittleren Unterstützungspunkt zu nähern oder weiter davon zu entfernen. Solche Vorrichtungen heissen Hunter'sche Korrektionsschrauben und sind in Fig. 251 deutlich zu sehen. Oft hängen auch die Schalen mit harten Stahlringen in eben solchen Stahlschneiden, wobei die Kante der letzteren nach oben gerichtet ist, wie es Fig. 252 im Durchschnitt, 253 in perspektivischem Bild zeigt.

Frage 175. Wie ist eine richtige Gewichtsbestimmung ohne Rücksicht auf die Richtigkeit der Wage an sich möglich?

Antwort. Eine richtige Gewichtsbestimmung ist selbst dann, wenn man sich nicht auf die Richtigkeit der Wage verlassen kann, durch Anwendung der doppelten Wägung möglich. Man legt zu diesem Zweck in die eine Schale den abzuwägenden Körper und in die andere statt der Gewichte Schrot oder Sand, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Dann nimmt man den Körper aus der Wagschale weg und legt statt dessen so viele Gewichte hinein, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Die Anzahl dieser Gewichte, unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit, gibt dann das Gewicht des Körpers an, da sie unter denselben Umständen dieselbe Wirkung hervorbringen, wie das Gewicht des Körpers. Auf die Richtigkeit der Wage kommt es dabei gar nicht an.

Frage 176. Warum ist es als zweites Erfordernis einer guten Wage nötig, dass sich der Wagebalken im stabilen Gleichgewicht befindet?

Figur 254.

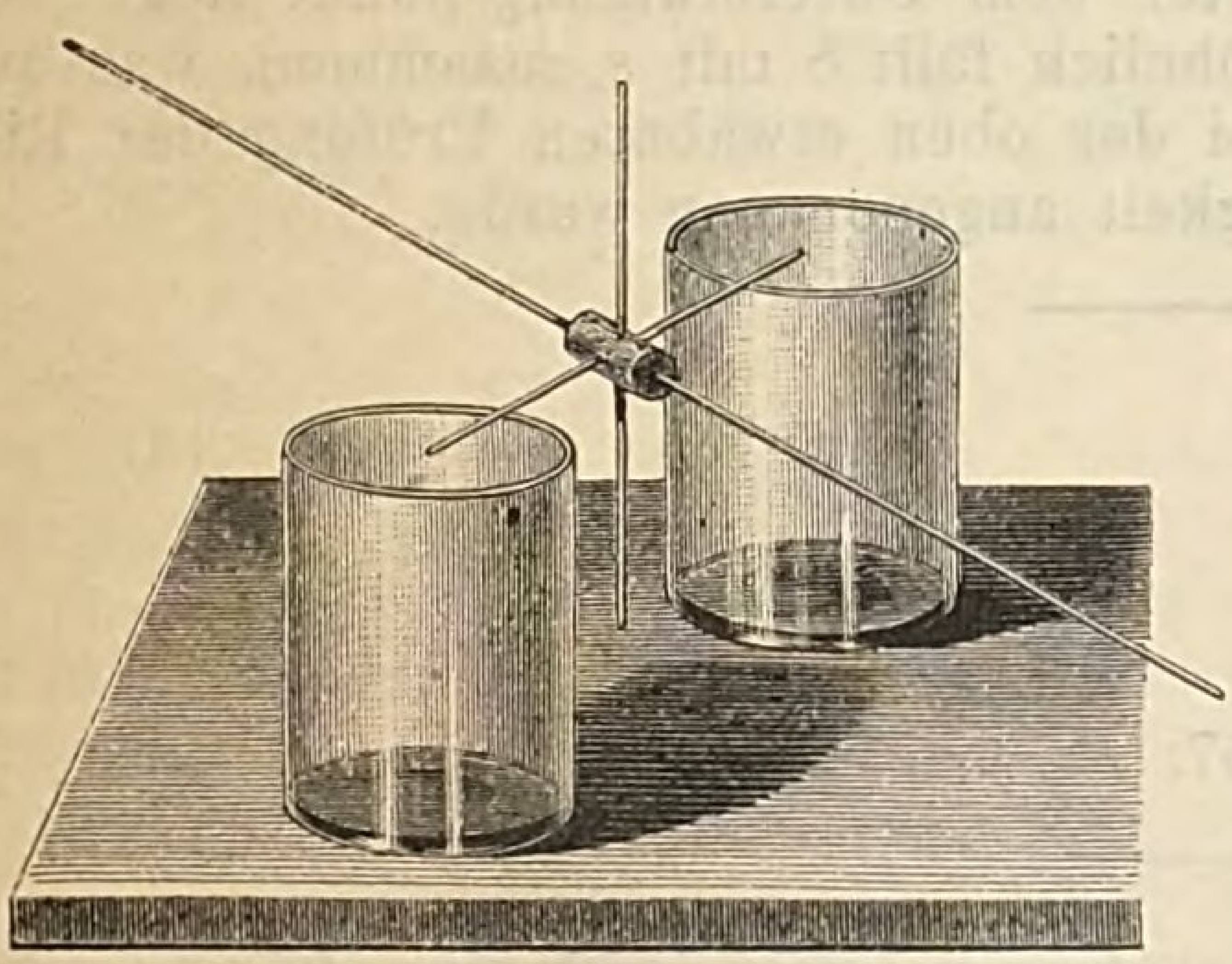


Antwort. Wird der Wagebalken als blosser Hebel betrachtet, so setzt dieses voraus, dass die Angriffspunkte der Lasten an beiden Enden mit dem Unterstützungspunkt in eine gerade Linie fallen und es würde den Forderungen der Richtigkeit genügen, wenn gleiche Lasten einen Stillstand hervorbrächten. Dieser Stillstand bedingt aber keineswegs eine horizontale Lage des Hebels, sondern würde, infolge des indifferenten Gleichgewichtszustands des Hebels in jeder beliebigen Lage erfolgen. Zur Sicherung des horizontalen Standes muss deshalb der Stützpunkt über derjenigen geraden Linie liegen, welche die beiden Angriffspunkte der Lasten verbindet, so dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt der letzteren unter den Unterstützungspunkt fällt.

Wären also die beiden Angriffspunkte der Lasten P und Q (siehe Fig. 254) und läge der Stützpunkt C über der sie verbindenden geraden Linie, so fiele der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Lasten in S und es könnte der Zustand der Ruhe nur dann stattfinden, wenn S senkrecht unter C sich befände; denn bei vorhandener Beweglichkeit ruht ein Körper nur dann, wenn sein Schwerpunkt den tiefsten Stand eingenommen hat. Kommt der Wagebalken in die geneigte Lage $P^1 Q^1$, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt nach S gehoben werden und muss daher herabsinken, bis er seine tiefste Lage in S wieder eingenommen hat, also bis die horizontale Lage des Hebels wieder hergestellt ist. Hieraus folgt:

Erkl. 209. Um die in nebenstehender Antwort erwähnten drei Arten des Gleichgewichts durch ein sehr einfaches Experiment anschaulich zu machen, stecke man durch einen Kork eine ganze und zwei halbe Stricknadeln rechtwinklig zu einander, wie es aus Figur 255 ersichtlich ist, und lege dann diese Vorrichtung auf zwei Trinkgläser, so dass die ganze Nadel den Wagebalken und die senkrecht stehende die Zunge vorstellt. Durch Verschiebung der letzteren kann man die Lage des Schwerpunkts der Höhe nach beliebig ändern und dadurch den Erfolg zeigen, je nachdem der Schwerpunkt unter, in oder über der Achse liegt.

Figur 255.



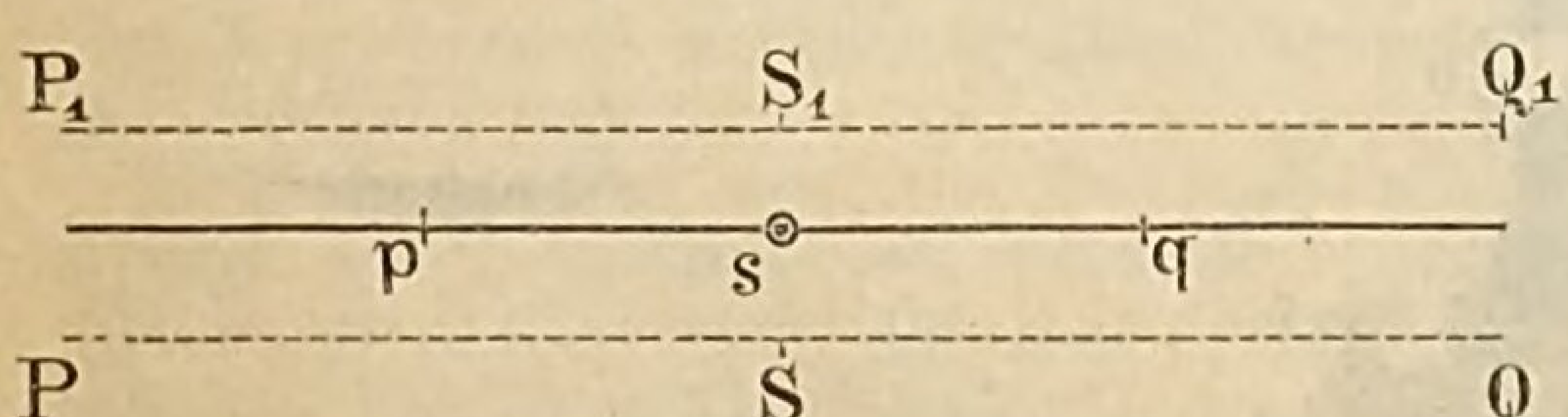
1). Liegen die beiden Angriffspunkte der Lasten beim gleicharmigen Hebel mit dem gemeinschaftlichen Unterstützungspunkt in einer geraden Linie, so würde derselbe bei gleicher Belastung in jeder Lage zur Ruhe kommen. Mit einem solchen wären allerdings Wägungen möglich, allein höchst unbequem, weil beim geringsten Uebergewicht an einer Seite der Hebel eine vertikale Lage annehmen müsste, ja diese würde eine bleibende sein, sofern entweder der eine oder der andere Hebelarm herabsinken müsste.

2). Liegt der Unterstützungspunkt unter der geraden Linie, welche die beiden Angriffspunkte des Hebels vereinigt, so ist zwar eine horizontale Lage des Wagebalkens bei gleicher Belastung beider Arme unter der Bedingung theoretisch möglich, dass der Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkt in eine vertikale Linie fällt, physisch aber würde dieses ebenso unmöglich sein, als eine Kugel auf einer Nadelspitze zu balancieren, weil sich die erforderlichen Bedingungen in mathematischer Schärfe nicht erreichen lassen; denn bei dem geringsten Uebergewicht an einem Arm und bei dem geringsten Herausrücken des Schwerpunkts aus der genannten vertikalen Linie würde der Schwerpunkt herabsinken, der Wagebalken umschlagen und oscillieren, bis er zur Ruhe käme, sobald sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt in der verticalen Linie durch den Unterstützungspunkt befindet.

3). Der horizontale Stand des Hebels ist also nur dann erreichbar, wenn der gemeinschaftliche Schwerpunkt sich unter dem Unterstützungspunkt befindet.

Frage 177. Was ist zu berücksichtigen, wenn die vorerwähnten, beim mathematischen Hebel giltigen Sätze, auf den physischen, den Wagebalken angewendet werden?

Figur 256.

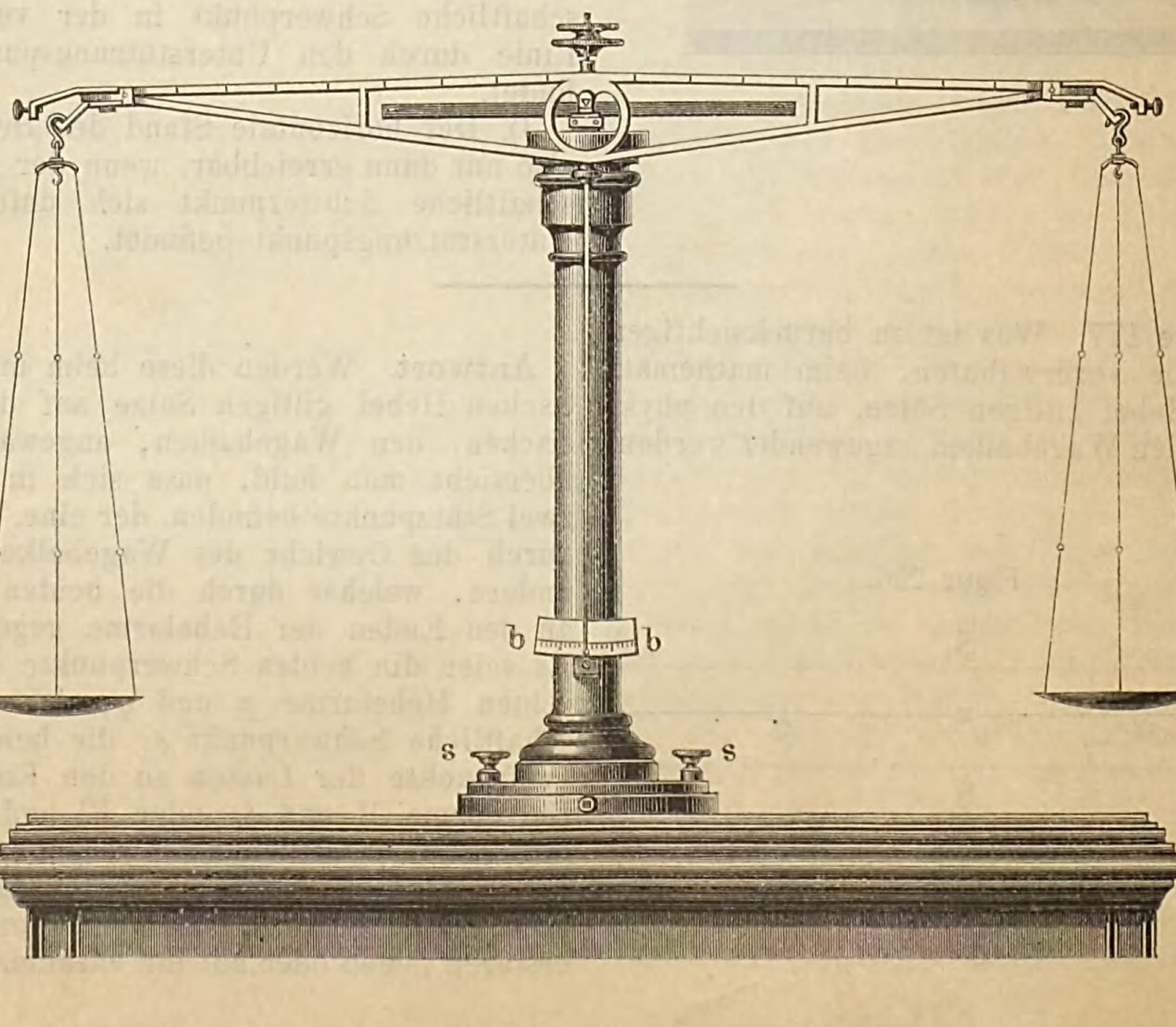


Antwort. Werden diese beim mathematischen Hebel giltigen Sätze auf den physischen, den Wagebalken, angewandt, so übersieht man bald, dass sich in diesem zwei Stützpunkte befinden, der eine, welcher durch das Gewicht des Wagebalkens, der andere, welcher durch die beiden Lasten an den Enden der Hebelarme gegeben ist. Es seien die beiden Schwerpunkte der einzelnen Hebelarme p und q, der gemeinschaftliche Schwerpunkt s, die beiden Angriffspunkte der Lasten an den Enden der Hebelarme P und Q oder P^1 und Q^1 und ihre gemeinschaftlichen Schwerpunkte S oder S_1, so kann die durch letztere gezogene gerade Linie entweder über oder unter der ersteren liegen oder mit ihr zusammenfallen.

Wird dann ferner vorausgesetzt, dass bei horizontaler Lage des Wagebalkens die Schwerpunkte s und S oder S_1 in eine vertikale Linie fallen, so sind 3 Fälle möglich, wonach S mit s zusammenfällt oder S unterhalb s oder S^1 oberhalb s liegt. Im ersten Fall gilt alles das, was oben über die horizontale Lage des Wagebalkens gesagt wurde, in den beiden letzteren kommt nicht jeder einzelne Schwerpunkt, sondern es kommt der Unterschied beider in Betracht. Ist zuerst der Wagebalken nicht belastet, also S oder $S_1 = 0$, so gilt von s alles dasjenige, was in dieser Beziehung oben vom mathematischen Hebel gesagt worden ist; wenn dagegen der Wagebalken belastet und S grösser ist als s, so kann s über dem Unterstützungspunkt liegen, und dennoch wird der Wagebalken zur Ruhe kommen, wenn S unter dem Unterstützungspunkt liegt. Gewöhnlich fällt S mit s zusammen, was auch bei der oben erwähnten Prüfung der Richtigkeit angenommen wurde.

Frage 178. Wie sind feine Wagen, wie z. B. die chemischen (siehe Fig. 257) konstruiert, damit der Wagebalken seinen **horizontalen** Stand anzeigt?

Figur 257.



Antwort. Der Wagebalken ruht in der Regel auf einer senkrechten Säule und diese trägt dann in ihrer Verlängerung einen geteilten Bogen *bb*, vor welchem die Zunge oder der Zeiger sich nach beiden Seiten bewegt, aber auf 0 der Teilung zeigt, wenn der Zustand des Gleichgewichts vorhanden oder der horizontale Stand des Wagebalkens hergestellt ist. Diese Zunge ist lotrecht auf der Mitte des Wagebalkens befestigt, so dass sie entweder in die Höhe steht oder herabhängt, wie in Fig. 240, oder die Zunge befindet sich in der verlängerten geometrischen Achse des Wagebalkens und ihre Spitze zeigt auf eine hinter ihr angebrachte geteilte Skala.

Soll der Wagebalken seinen horizontalen Stand richtig anzeigen, so muss die ihn tragende Säule vertikal stehen, und damit solches erreicht werde, muss das Fussbrett der Wage einen horizontalen Stand haben. Um diesen herzustellen bedient man sich einer kleinen Röhrenlibelle und korrigiert mittels der im Fussbrett befindlichen Stellschrauben *ss*. Ist man von dem horizontalen Stand des Wagebalkens überzeugt, so kann dieser als Norm dienen, und das Fussbrett so lange mittels der Stellschrauben gerichtet werden, bis die Zunge auf 0 der Teilung einspielt.

Frage 179. Wodurch wird das dritte Erfordernis einer guten Wage, ihre Empfindlichkeit, auch wohl Feinheit genannt, bestimmt?

Erkl. 210. Die Empfindlichkeit einer Wage drückt man gewöhnlich durch Angabe des echten Bruches aus, welcher das geringste, noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht zum Zähler, und das Gewicht des Wagbalkens und der grössten noch zulässigen Belastung zum Nenner hat.

Eine gute Wage muss eine Empfindlichkeit von $\frac{1}{60\,000}$ besitzen, sie muss also bei einer Belastung von 60000 g oder von 60 kg in jeder Schale noch einen merklichen Ausschlag geben bei Zulegung von 1 g.

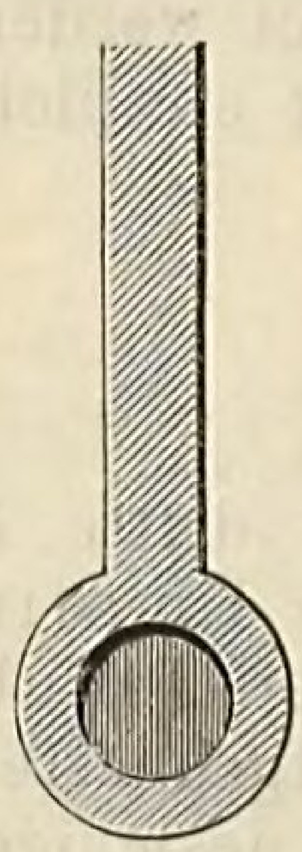
Dagegen verlangt man von den analytischen Wagen der Chemiker, dass, wenn sie in jeder Schale (als höchstes Gewicht ohne Nachteil der Biegung des Balkens) 1 kg tragen, ein Zulagegewicht von 1 mg noch einen merklichen Ausschlag gibt, wonach die Empfindlichkeit $\frac{1}{2\,000\,000}$ beträgt.

Antwort. Das dritte Erfordernis einer guten Wage, ihre Empfindlichkeit oder Feinheit, die der Trägheit oder Faulheit derselben entgegensteht, wird bestimmt durch die Grösse desjenigen Gewichts, welches, in eine der beiden Schalen gelegt, den Zustand des Gleichgewichts aufhebt und das Niedersinken des einen Armes bewirkt. Da eine Wage um so viel träger sein muss, je grössere Lasten zu wiegen sie bestimmt ist, so misst man die Feinheit nach einem aliquoten oder bestimmten Teil der ganzen Last, welchen sie ohne Gefahr ihrer Beschädigung in jeder Schale zu tragen vermag; diese pflegt man das Totalgewicht, die Fähigkeit der Wage, so viel darauf zu wägen, ihre Tragkraft zu nennen, wodurch also ein sicheres Mass dieser Bestimmung gegeben wird.

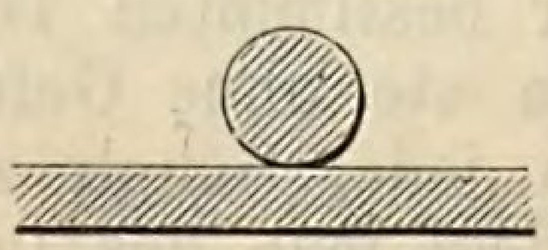
Frage 180. Welches sind die Mittel zur Erlangung der grössten Feinheit bei den Wagen?

Erkl. 211. Die wichtige Bedingung, den Wagebalken so leicht als möglich zu machen, ohne seiner Tragkraft Abbruch zu thun, hat man auf vielfache Weise zu erreichen gesucht. Allgemein bringt man dabei das Prinzip in Anwendung, dass man denselben in der Mitte stärker macht und nach beiden Enden hin verjüngt zulaufen lässt, sowie, dass man seine Höhe weit grösser nimmt als seine Dicke, nach den hierüber bestehenden Gesetzen der Festigkeit der Körper. Ueberdies ist bei feinen Wagen der Balken nicht massiv, sondern durchbrochen (siehe Fig. 257), wenn möglich auch aus Aluminium, jedenfalls aber aus einem Metall, welches von der Wärme und Feuchtigkeit nicht angegriffen wird, etwa aus vergoldetem oder platiniertem Messing, da alles Putzen die Richtigkeit der Wage gefährdet.

Figur 258.



Figur 259.



Antwort. Die Mittel zur Erlangung der grössten Feinheit bei den Wagen sind zuerst eine möglichste Länge des Wagebalkens, denn ein und dieselbe Kraft wirkt auf einen längeren Hebelarm stärker als auf einen kürzeren.

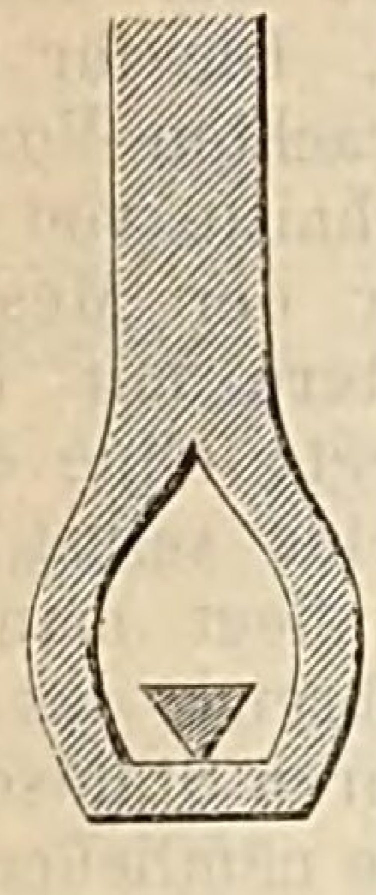
Ein zweites Mittel ist möglichste Leichtigkeit des Wagebalkens, denn da durch das Uebergewicht nicht bloss die Lasten, womit der Wagebalken beschwert ist, sondern auch die Masse des letzteren selbst bewegt werden muss, so wird dieses um so leichter geschehen, je weniger Gewicht der Wagebalken selbst hat, wodurch dann zugleich die Reibung vermindert wird. Der wirklichen Anwendung dieser beiden eben genannten Mittel steht aber entgegen, dass der Wagebalken sich nicht biegen darf[1]).

Ein drittes Mittel zur Erreichung einer möglichst grossen Empfindlichkeit ist die möglichste Verminderung der Reibung. Wäre die Achse des Wagebalkens ein Cylinder und wälzte sich dieser in einer krummen Oeffnung (siehe Fig. 258), so müsste bei den Schwingungen des Wagebalkens merkliche Reibung entstehen, welche sich dadurch zeigt, dass sich die Zunge bei den Schwingungen nicht jederzeit wieder genau auf den 0-Punkt der Teilung einstellt, sondern abwechselnd rechts oder links davon abweicht, und dieses wird um so mehr stattfinden, je grösser die zu wägenden Lasten sind, denn die Grösse der Reibung ist bekanntlich der Last direkt proportional. Dabei kommt noch die Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunktes in Betracht. Läge derselbe in der geometrischen Achse des Cylinders, welcher die Achse des Wagebalkens bildet, so würde letzterer bei vorhandenem Gleichgewicht in jeder Lage zur Ruhe kommen, läge er aber unter derselben, so müsste er bei jeder Bewegung gehoben werden und es käme zur Reibung noch die Ueberwindung dieser Last als ein Mittel zur Vermehrung der Trägheit hinzu, bei einer Lage oberhalb derselben müsste aber der Wagebalken, sofern die Reibung dieses nicht hindert, umschlagen.

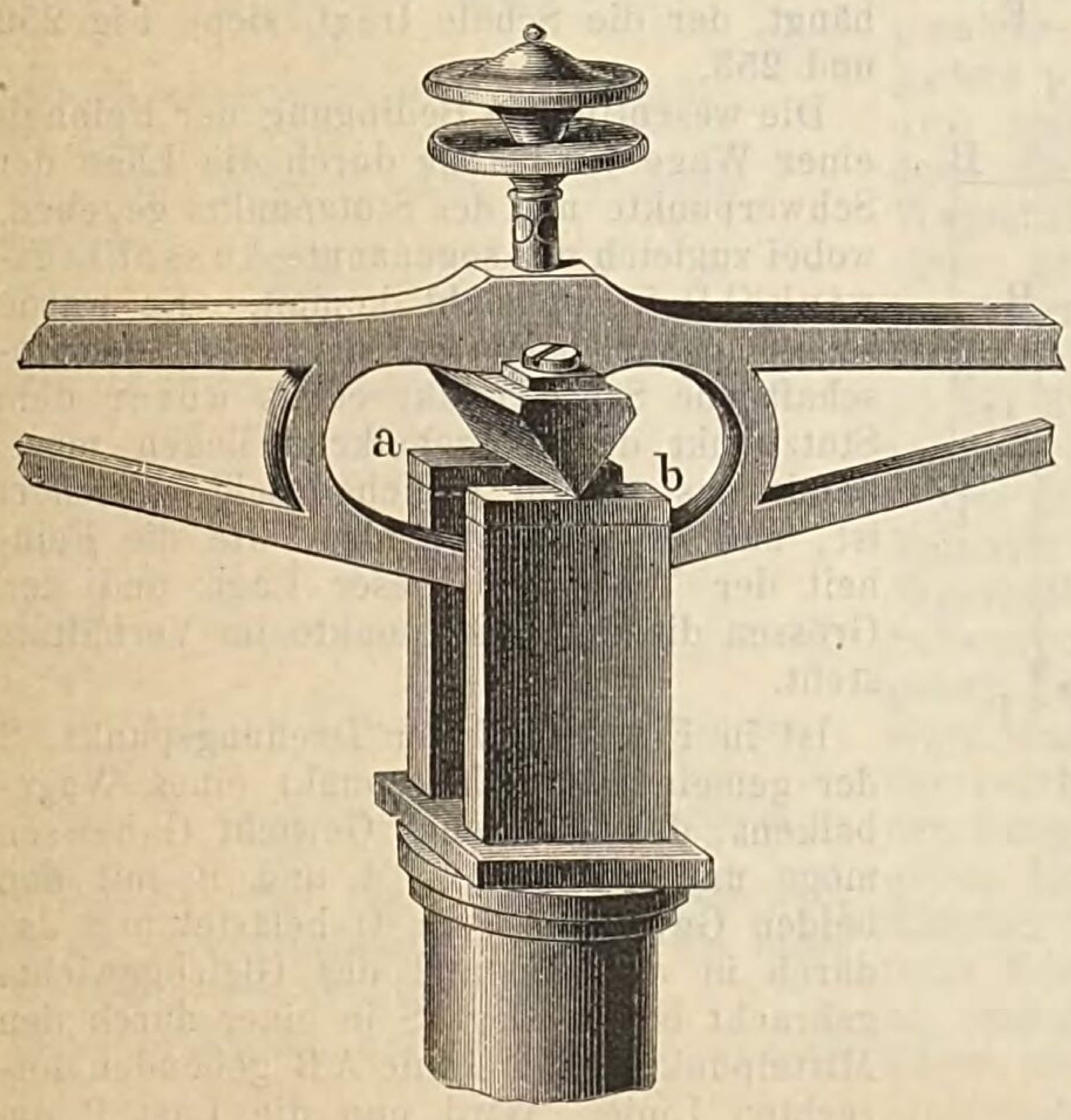
Ruht die cylindrische Achse des Wagebalkens auf einer geraden Fläche (siehe Fig. 259), so fällt die Reibung insofern weg, als sie sich in eine wälzende verwandelt. Die Achse dagegen, als Cylinder gedacht, wird am vorteilhaftesten verschwindend dünn sein, denn die Reibung nimmt

[1]). Siehe Erkl. 211.

Figur 260.



Figur 261.

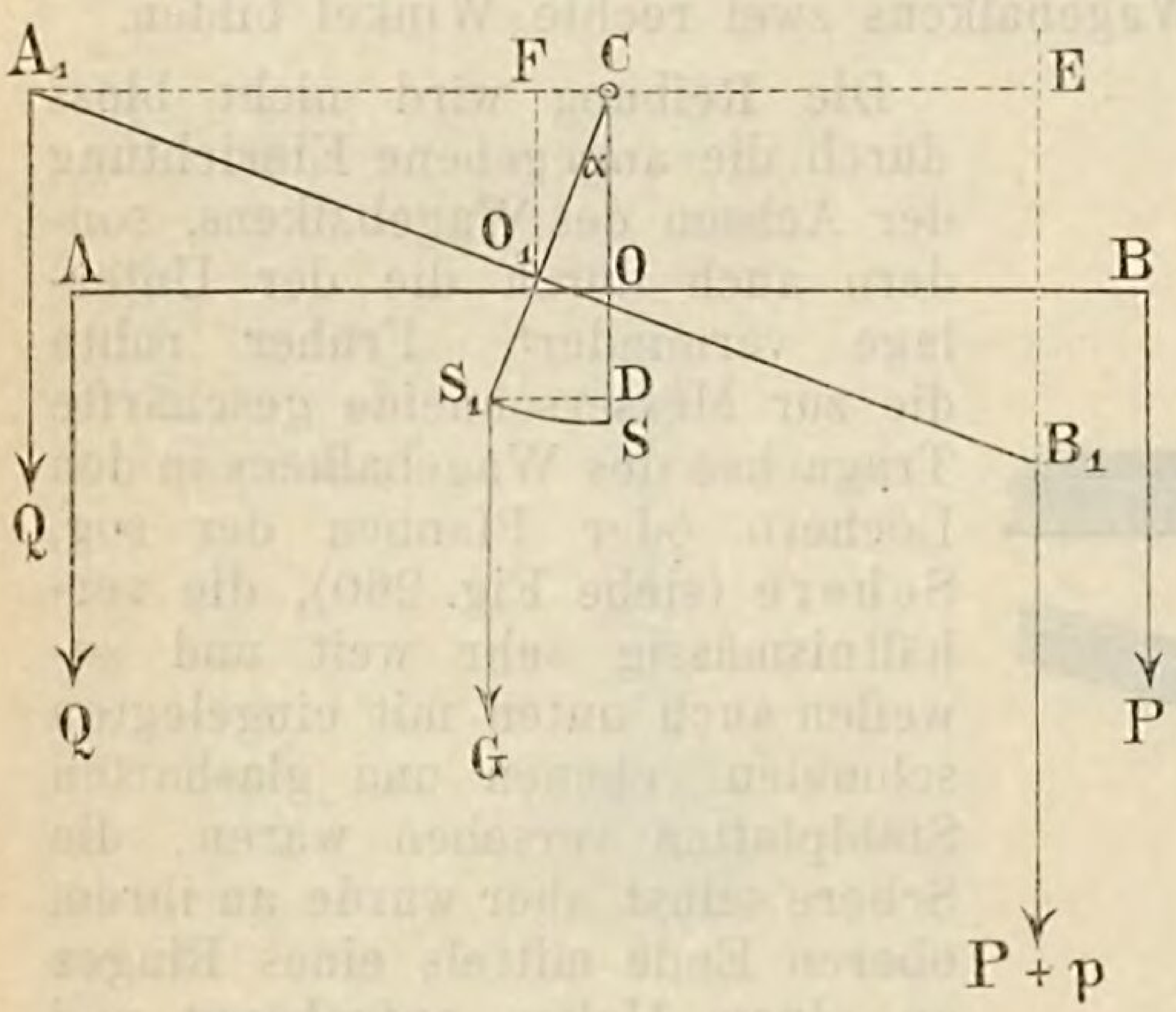


mit dem Halbmesser des Cylinders zu. Da aber die Achse zugleich eine angemessene Tragkraft haben muss, so kann diese Bedingung nicht anders als durch die sogenannte Messerschneide oder das dreiseitige Prisma erreicht werden, dessen untere Schärfe als ein Teil der Oberfläche eines Cylinders von verschwindend kleinem Halbmesser zu betrachten ist. Die Reibung muss daher um so mehr verschwinden, je feiner die Schneide ist. Allein damit wird zugleich die Haltbarkeit vermindert, und man macht aus diesem Grund den Winkel, welchen die beiden ebenen Flächen der Messerschneide miteinander bilden, desto kleiner, je geringer die Tragkraft sein soll. Bei sehr grossen Wagen beträgt dieser Winkel nicht viel weniger als 90°, bei mittleren gewöhnlich 60°, bei feinen wird er bis 30° verringert, und dabei besteht diese Achse aus gehärtetem Stahl. Selbstverständlich muss die Schneide eine gerade Linie und mit der geometrischen Achse des Wagebalkens zwei rechte Winkel bilden.

Die Reibung wird nicht bloss durch die angegebene Einrichtung der Achsen des Wagebalkens, sondern auch durch die der Unterlage vermindert. Früher ruhte die zur Messerschneide geschärfte Tragachse des Wagebalkens in den Löchern oder Pfannen der sog. Schere (siehe Fig. 260), die verhältnismässig sehr weit und zuweilen auch unten mit eingelegten schmalen, ebenen und glasharten Stahlplatten versehen waren, die Schere selbst aber wurde an ihrem oberen Ende mittels eines Ringes an einem Haken aufgehängt und trug somit die ganze Wage samt der Last. Später zog man es vor, die Messerschneide auf 2 Unterlagen *ab* (siehe Fig. 261) ruhen zu lassen, die auf einer Säule befestigt sind. Die Unterlagen sind gewöhnlich horizontal und bestehen entweder aus glashartem, fein poliertem Stahl, oder besser aus Achat. Weil sich aber die härteste Messerschneide durch langen Gebrauch abnutzen würde, wenn sie fortwährend auf der fein polierten Unterlage mit ihrer ganzen Last ruhte, so hat man verschiedene Vorrichtungen angebracht, um im Zustand der Ruhe die Wage zu tragen. Hierdurch werden zugleich die zu grossen und lange dauernden Schwingungen

Erkl. 212. Der Winkel, um welchen bei gegebenem Uebergewicht der Wagebalken oder auch die Zunge sich dreht, bis sie wieder in Ruhe kommt, heisst Ausschlagswinkel.

Figur 262.



vermieden und somit die Zeitdauer der Wägungen bedeutend abgekürzt; denn je empfindlicher die Wage ist, um so schwieriger findet man das richtige Gewicht, mit welchem sie sich auf den Nullpunkt der Teilung einstellt. Die für diese Zwecke in Anwendung gebrachten Vorrichtungen sind meist zwei Einschnitte von einem kleineren Winkel, als der der Messerschneide, in welche die letztere mit ihren äussersten Enden sich einlegt, ohne dass die Schärfe der Messerschneide selbst eine Unterlage berührt. Auch pflegt man die Ringe der Wagschalen während des Nichtgebrauchs der Wage von ihren Stahlschneiden zu entfernen. Denn die nämlichen Gründe, welche die Reibung der Achse zu vermeiden gebieten, machen auch bei der Aufhängung der Wagschalen die Anwendung von Messerschneiden nötig, welche zur Längsachse des Wagebalkens rechtwinklig, also mit der Tragachse parallel laufend angebracht sind und über denen gewöhnlich ein verhältnismässig weiter inwendig zugeschärfter Ring hängt, der die Schale trägt, siehe Fig. 252 und 253.

Die wesentlichste Bedingung der Feinheit einer Wage wird aber durch die Lage der Schwerpunkte und des Stützpunkts gegeben, wobei zugleich der sogenannte Ausschlagswinkel[1]) in Betracht kommt. Es wurde schon früher bemerkt, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt etwas unter dem Stützpunkt des Wagebalkens liegen muss, damit das stabile Gleichgewicht gesichert ist, und es fragt sich also, wie die Feinheit der Wage mit dieser Lage und den Grössen dieser Schwerpunkte im Verhältnis steht.

Ist in Fig. 262 C der Drehungspunkt, S der gemeinsame Schwerpunkt eines Wagebalkens, dessen eigenes Gewicht G heissen möge und welcher in A und B mit den beiden Gewichten P = Q belastet und dadurch in den Zustand des Gleichgewichts gebracht ist, so liegt S in einer durch den Mittelpunkt O der Linie AB gehenden lotrechten Linie. Wird nun die Last P um die Grösse p vermehrt, so erhält der Wagebalken die Lage A_1B_1, der gemeinschaftliche Schwerpunkt S wird nach S_1 gehoben und gibt den Ausschlagswinkel α. Bezeichnet man die halbe Länge des Wagebalkens mit a, die Linie $CO = CO_1$ mit b und $CS = CS_1$ mit c, so muss nach dem Satz von den

[1]). Siehe Erkl. 212.

Hilfsrechnung. Da in Bezug auf Fig. 262

$$\overline{A_1C} = \overline{A_1F} + \overline{FC}$$

und

$$\overline{CE} = \overline{FE} - \overline{FC}$$

oder was dasselbe ist:

$$\overline{CE} = \overline{A_1F} - \overline{FC}$$

so verwandelt sich die nebenstehende Gleichung:

$$Q \cdot \overline{A_1C} + G \cdot \overline{S_1D} = (P + p) \cdot \overline{CE}$$

wenn man die vorstehenden Werte einsetzt in

$$Q(\overline{A_1F} + \overline{FC}) + G \cdot \overline{S_1D} = (P + p)(\overline{A_1F} - \overline{FC})$$

oder da $Q = P$ angenommen wurde, so kann man auch setzen:

$$P(\overline{A_1F} + \overline{FC}) + G \cdot \overline{S_1D} = (P + p)(\overline{A_1F} - \overline{FC})$$

oder:

$$P \cdot \overline{A_1F} + P \cdot \overline{FC} + G \cdot \overline{S_1D} = P \cdot \overline{A_1F} - P \cdot \overline{FC} + p \cdot \overline{A_1F} - p \cdot \overline{FC}$$

oder:

$$P \cdot \overline{FC} + G \cdot \overline{S_1D} + P \cdot \overline{FC} + p \cdot \overline{FC} = p \cdot \overline{A_1F}$$

oder:

$$1). \; . \; . \; \overline{FC}(2P + p) + G \cdot \overline{S_1D} = p \cdot \overline{A_1F}$$

Nun ist:

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{CO_1}} = \sin\alpha$$

oder, da wir $\overline{CO_1} = b$ setzen wollten:

$$\frac{\overline{FC}}{b} = \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \overline{FC} = b \cdot \sin\alpha$$

ferner ist:

$$\frac{\overline{S_1D}}{\overline{S_1C}} = \sin\alpha$$

oder, da $\overline{S_1C} = c$ sein soll:

$$\frac{\overline{S_1D}}{c} = \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \overline{S_1D} = c \cdot \sin\alpha$$

endlich ist:

$$\frac{\overline{A_1F}}{\overline{A_1O_1}} = \cos\alpha, \text{ denn } \triangle A_1CO_1 \sim \triangle CS_1D$$

oder da $\overline{A_1O_1} = \overline{AO} = a$ sein soll, so ist:

$$\frac{\overline{A_1F}}{a} = \cos\alpha \text{ oder } \overline{A_1F} = a \cdot \cos\alpha$$

Setzen wir diese für die drei Strecken $\overline{FC}$, $\overline{S_1D}$ und $\overline{A_1F}$ erhaltenen Werte in die obige Gleichung 1)., so ergibt sich:

$$(2P + p) \cdot b \cdot \sin\alpha + G \cdot c \cdot \sin\alpha = p \cdot a \cdot \cos\alpha$$

oder:

$$\sin\alpha\left(b(2P + p) + c \cdot G\right) = p \cdot a \cdot \cos\alpha$$

oder:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a \cdot p}{b(2P + p) + c \cdot G}$$

oder da

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

so ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot p}{b(2P + p) + c \cdot G}$$

statischen Momenten die folgende Gleichung stattfinden:

$$Q \cdot \overline{A_1C} + G \cdot \overline{S_1D} = (P + p) \cdot \overline{CE}$$

woraus sich nach nebenstehender Hilfsrechn.:

$$1) \; . \; . \; \operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot p}{b(2P + p) + c \cdot G}$$

ergibt.

Wenn die Aufhängepunkte A und B der Wagschalen und der Drehungspunkt C des Wagebalkens in einer geraden Linie liegen, was bei guten Wagen möglichst erzielt wird, dann ist $b = 0$, und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich in

$$2). \; . \; . \; . \; . \; \operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot p}{c \cdot G}$$

Da kleine Winkel sich nahezu wie ihre Tangenten verhalten, so folgt aus dieser Gleichung, dass der Ausschlagswinkel α so lange derselbe nur klein ist, der Grösse des Uebergewichts p und der Länge der Arme des Wagebalkens a direkt, dem Gewicht des Wagebalkens G aber und dem Abstand c seines Schwerpunkts vom Drehungspunkt umgekehrt proportional ist. Dagegen ist der Ausschlagswinkel (vorausgesetzt, dass die Aufhängepunkte A und B der Wagschalen mit dem Drehungspunkt C in einer geraden Linie liegen) von der Grösse der Belastung 2P unabhängig. Liegt dagegen C über der Geraden $\overline{AB}$, so ist der Ausschlagswinkel der Belastung umgekehrt proportional.

Um daher einer Wage die erforderliche Feinheit zu geben, ist es nötig, dass der Wagebalken sich nicht biege und dass der Schwerpunkt nur wenig unter dem Stützpunkt liege und es ist also die Feinheit einer Wage der Kleinheit dieses Abstandes, der Leichtigkeit des Wagebalkens und seiner Länge der Kleinheit der darauf gewogenen Lasten und der Verminderung der Reibung proportional. Um diesbezügliche feine Korrekturen möglich zu machen, ist an manchen Wagen in einer senkrechten Ebene über (siehe Fig. 261) oder unter dem Stützpunkt ein Gewicht mit einer Mikrometerschraube angebracht, welches dem Stützpunkt mehr oder weniger genähert werden kann, um dadurch die Lage des Schwerpunkts zu regulieren. Eben dieses geschieht auch dadurch, dass die Unterlage des Hakens, woran die Wagschale hängt, mittels Mikrometerschrauben etwas gehoben oder gesenkt wird.

β). Die ungleicharmigen oder Schnellwagen.

Frage 181. Auf welchem Prinzip beruhen die Schnellwagen?

Antwort. Die Schnellwagen beruhen auf dem Prinzip des Hebels mit ungleich langen Armen, vermittelst dessen durch ein geringes Gewicht grosse Lasten gewogen werden können.

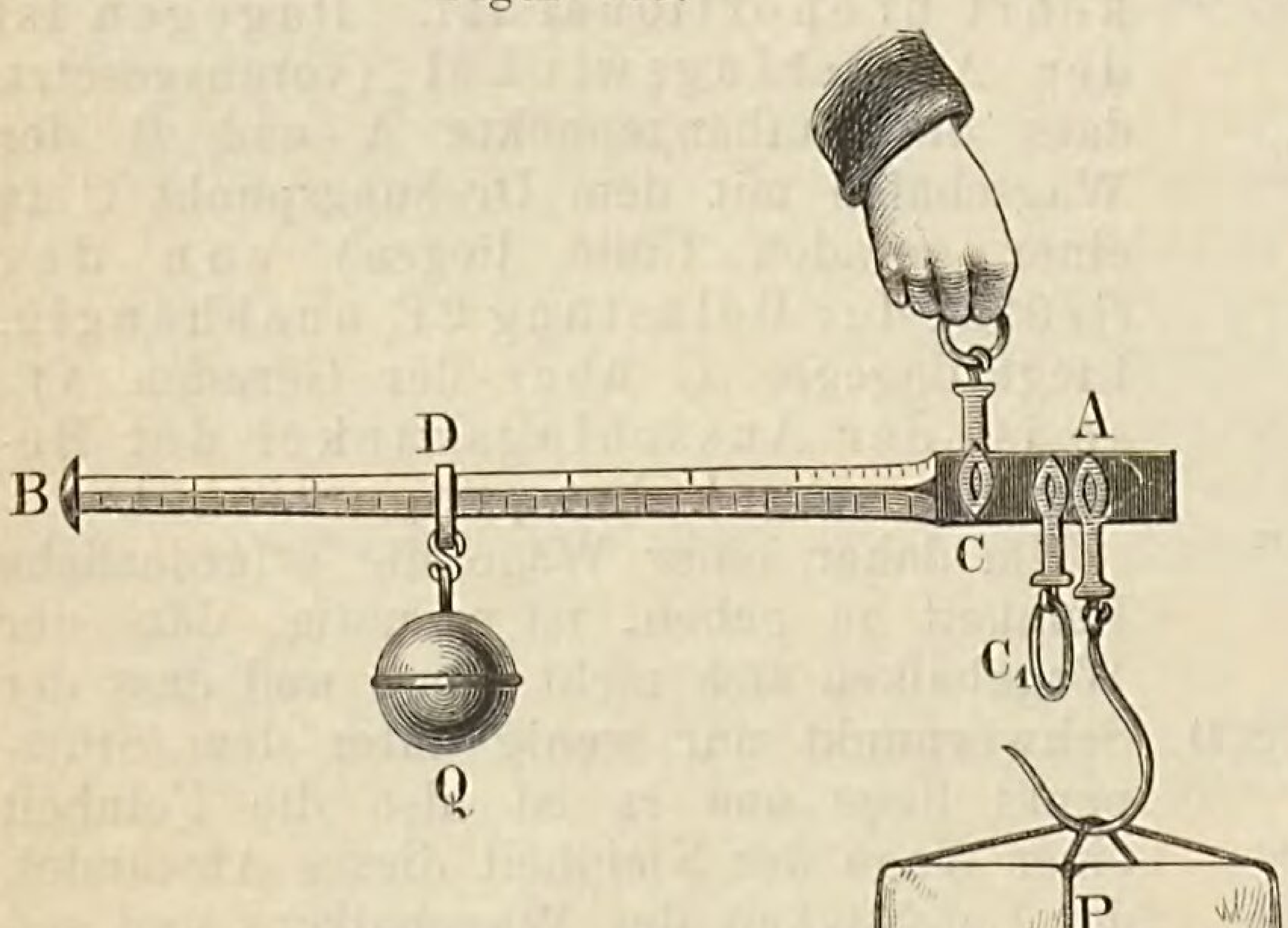
Frage 182. Wieviele und welche Arten von Schnellwagen unterscheidet man?

Antwort. Man unterscheidet deren dreierlei, nämlich:

1) Schnellwagen mit Laufgewicht,
2) Schnellwagen mit verjüngtem Gewicht und
3) Schnellwagen mit festem Gewicht aber verschiebbarem Unterstützungspunkt.

Frage 183. Wie ist die Schnellwage mit Laufgewicht oder die sog. römische Schnellwage eingerichtet?

Figur 263.



Erkl. 213. Einige Forscher leiten den Namen aus dem Orient her, wo diese Wage früher bekannt war, und da das am längeren Hebelarm hängende Gewicht die Gestalt eines Granatapfels (arab. Romman) hatte, so soll sie hiernach noch jetzt dort Rommana heissen. Den Namen Schnellwage hat sie daher, weil man bei ihr durch das Verschieben des Gewichts schneller wägen kann; auch gewährt sie bei grossen Lasten den Vorteil, dass man nicht gezwungen ist, so viele Gewichtsstücke aufzulegen als die zu wägende Last beträgt.

Antwort. Die Schnellwage mit Laufgewicht oder die sog. römische Schnellwage[1]), siehe Fig. 263, ist ein ungleicharmiger Hebel, bei welchem der kurze Arm für die Last, der lange für das Gewicht bestimmt ist. Diese Wage hat feste unveränderliche Aufhängepunkte C und A für den Wagebalken und den zu wägenden Gegenstand; zum Wägen dient ein einziges Gewichtsstück, das Laufgewicht Q, welches auf dem mit einer Skala versehenen längeren Arm verschiebbar ist und beim Wägen so gehängt wird, dass Gleichgewicht eintritt, d. h. der Wagebalken horizontal ist. Die gerade Linie, längs welcher das Laufgewicht verschoben wird, muss verlängert durch die beiden festen Aufhängepunkte C und A gehen. Das Gewicht der Last P wird an der Teilung des längeren Armes abgelesen. Gewöhnlich ist die unbelastete Wage nicht im Gleichgewicht, sondern dieses tritt erst ein, wenn das Laufgewicht in einem bestimmten Punkt des längeren Armes hängt; dieser Punkt ist dann Nullpunkt der Teilung des längeren Armes. Die Grundlage der Teilung bildet der Abstand der beiden festen Aufhängepunkte. Wiegt die Belastung soviel wie das Laufgewicht, so muss zur Herstellung des Gleichgewichts das Laufgewicht auf den ersten Teilstrich vom Nullpunkte der Teilung angehängt werden. Wenn man nun, um der zu wägenden Last das Gleich-

[1]). Siehe Erkl. 213.

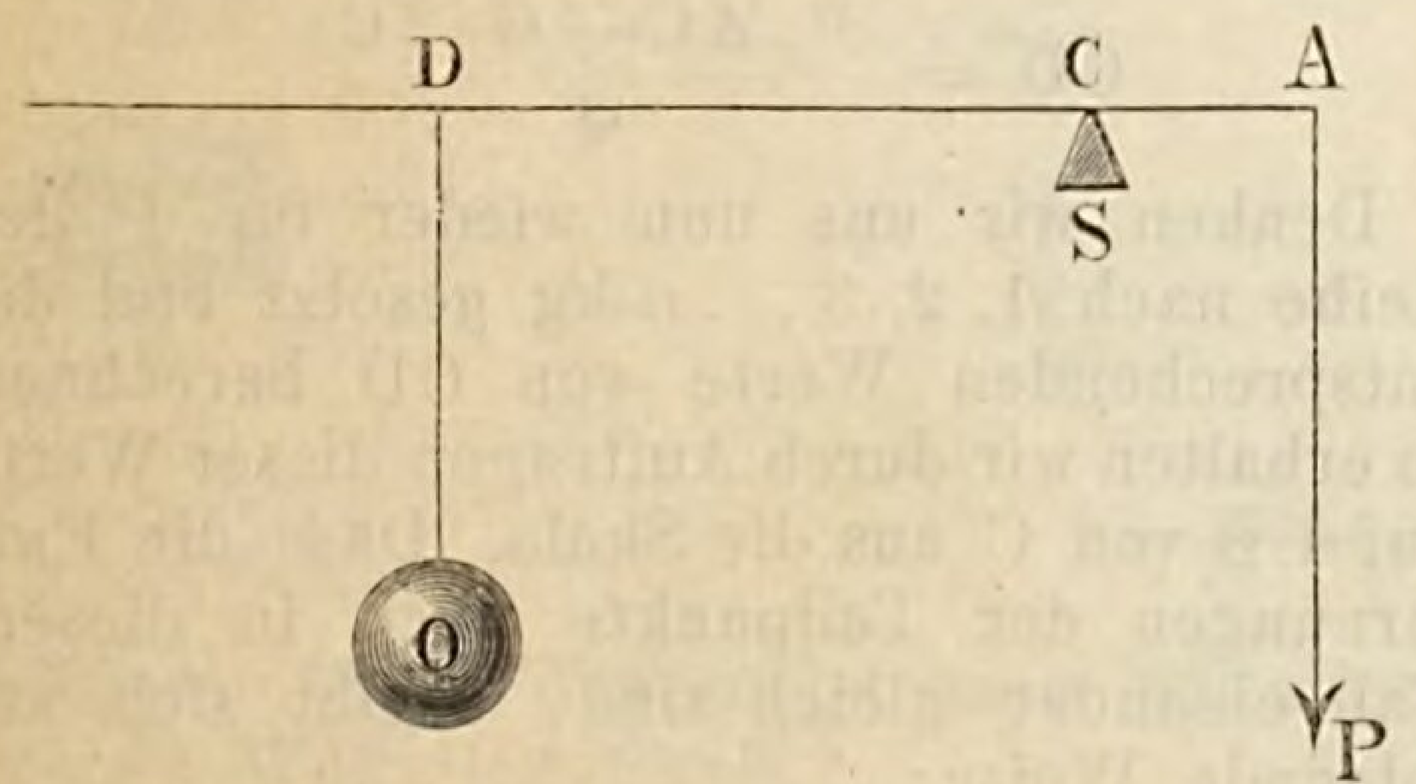
Erkl. 214. Zur Erreichung der erforderlichen Empfindlichkeit werden auch bei den Schnellwagen die Regeln in Anwendung gebracht, welche oben für die Krämerwage angegeben worden sind. Da sich indes die Gewichte der Krämerwage in kleinere Teile zerlegen lassen, als die Längen der Hebelarme der Schnellwage, so ist mit letzterer keine so grosse Feinheit zu erlangen, als mit der Krämerwage.

gewicht zu halten, das Laufgewicht um das 2—3—*n* fache seines Abstandes vom Nullpunkte aus gerechnet, verschieben muss, so ist das Gewicht der Last das 2—3—*n* fache von dem des Laufgewichts.

Die gewöhnlichen Schnellwagen sind so eingerichtet, dass sie zugleich zum Abwägen grösserer und kleinerer Lasten dienen. Zu diesem Zweck haben sie zwei ungleiche Abteilungen des Wagebalkens, indem sie für geringere Lasten am Haken C aufgehängt werden, wobei das Verhältnis der Längen $AC : CD$ stattfindet, nach Umkehrung aber am Haken C_1 mit dem Verhältnis $AC_1 : C_1D$. Der aus einer flachen Stange bestehende Balken ist dann auf beiden Seiten zugeschärft und die Schärfe mit Einkerbungen versehen, in welche der gleichfalls zugeschärfte Haken mit dem Laufgewicht Q eingehängt wird, bis das Gleichgewicht hergestellt ist und die auf der zugehörigen Seite eingeschlagene Zahl das gefundene Gewicht angibt.

Frage 184. Wie lässt sich theoretisch nachweisen, dass das in den beiden vorerwähnten Fällen durch die Wage ermittelte Gewicht das richtige sein muss?

Figur 264.



Antwort. 1). Fällt der Aufhängepunkt C des Wagebalkens mit dem Schwerpunkt S desselben zusammen, wie es der Fall ist, wenn nur leichte Lasten gewogen werden sollen, und ist P der zu wägende, in A aufgehängte Körper (siehe Fig. 264), Q das in D befindliche Laufgewicht, so wird für den Fall des Gleichgewichts, da das Gewicht der Wage durch C aufgehoben wird,

$$Q \cdot \overline{CD} = P \cdot \overline{CA}$$

also:

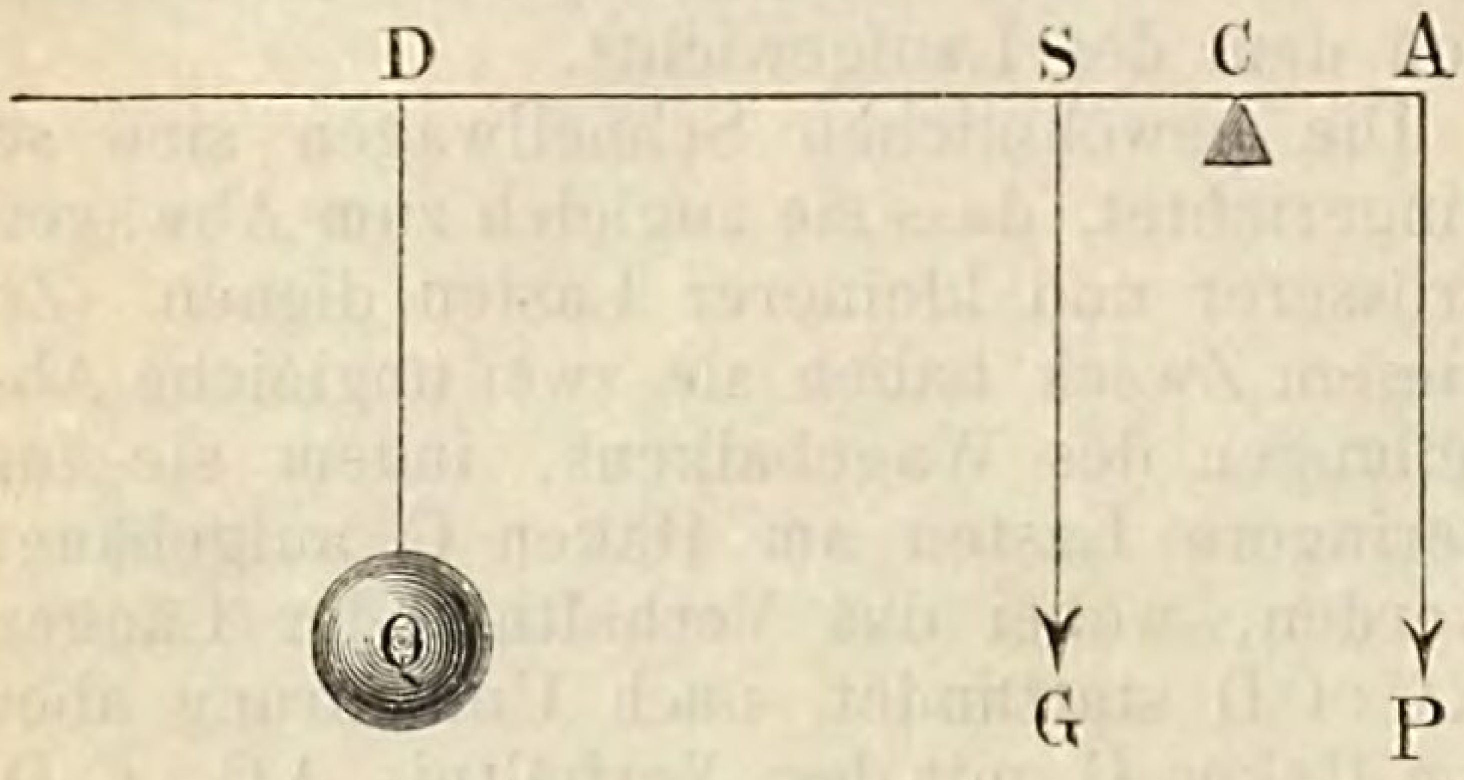
$$P = \frac{Q \cdot \overline{CD}}{\overline{CA}}$$

sein. Aus der bekannten Grösse des Laufgewichts Q, der gegebenen Strecke $\overline{CA}$ und und der gemessenen Strecke $\overline{CD}$ lässt sich das Gewicht P des zu wägenden Körpers mittels dieser Formel berechnen. Wäre z. B. $Q = 1$ kg und $\overline{CA} = 10$ cm, so wäre:

$$P = \frac{1}{10} \overline{CD}$$

Für $\overline{CD} = 10$ cm, 20 cm etc. wäre dann $P = 1$ kg, 2 kg, der Länge $\overline{CD} = 1$ cm würde eine Last $P = \frac{1}{10}$ kg, der Länge $\overline{CD} = x$ cm eine Last $P = \frac{x}{10}$ kg entsprechen.

Figur 265.



Erkl. 215. Die Entfernungen der Teilpunkte der Skala aus den Längen der beiden Hebelarme, aus dem Gewicht des Wagebalkens, des Laufgewichts und der Wagschale durch Rechnung zu finden, würde zu umständlich sein, und es ist sowohl leichter als auch sicherer, sie empirisch zu finden, wobei es nur einiger genauer Bestimmungen bedarf, um die dazwischenliegenden mit genügender Schärfe zu interpolieren (siehe Erkl. 216).

Erkl. 216. Interpolieren vom lat. interpolāre, von polīre = glätten, heisst eigentlich durch Glätten neu oder anders gestalten; hier bedeutet es soviel wie einschieben, einschalten oder einrücken.

Erkl. 217. Konstánt, lat. cónstans von constāre = bestehen, heisst beständig, standhaft, beharrlich oder unveränderlich.

2). Liegt der Aufhängepunkt C zwischen dem Schwerpunkt S und dem Haken A, wie es der Fall ist, wenn die Wage für schwerere Lasten bestimmt ist, so wird nicht nur mit dem Laufgewicht Q, sondern auch mit dem Gewicht G der Wage gewogen, welches in S angreift (siehe Fig. 265). Hat der zu wägende Körper das Gewicht P, so ist, für den Fall des Gleichgewichts

$$P.\overline{AC} = G.\overline{CS} + Q.\overline{CD}$$

folglich:

$$P = \frac{G.\overline{CS} + Q.\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

oder:

$$P = G\cdot\frac{\overline{SC}}{\overline{AC}} + Q\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

Der kleinste Wert, den $\overline{CD}$ haben kann, ist Null, wenn nämlich das Laufgewicht unmittelbar an C liegt; dann hat aber auch P seinen kleinsten Wert, nämlich:

$$P = G\cdot\frac{\overline{CS}}{\overline{AC}}$$

Ein noch kleineres Gewicht P würde man mittels dieser Wage nicht bestimmen können. Wäre z. B. G = 5 kg, $\overline{AC}$ = 10 cm und $\overline{CS}$ = 5 cm, so wäre das kleinste mit der Wage zu bestimmende Gewicht:

$$P = 5\cdot\frac{5}{10} \text{ oder } 2{,}5 \text{ kg}$$

Berechnet man $\overline{CD}$ aus der obigen Formel, so erhält man:

$$\overline{CD} = \frac{P.\overline{AC} - G.\overline{SC}}{Q}$$

Denken wir uns nun wieder für P der Reihe nach 1, 2, 3 ... n-kg gesetzt und die entsprechenden Werte von $\overline{CD}$ berechnet, so erhalten wir durch Auftragen dieser Werte auf $\overline{CD}$ von C aus die Skala. Dass die Entfernungen der Teilpunkte auch in diesem Fall einander gleich sind, ergibt sich auf folgende Weise:

Für $P = n$ und $P_1 = n + 1$ kg erhalten wir, wenn die entsprechenden Werte von $\overline{CD}$ mit x_n und x_{n+1} bezeichnet werden, als Abstand der beiden zugehörigen Teilpunkte:

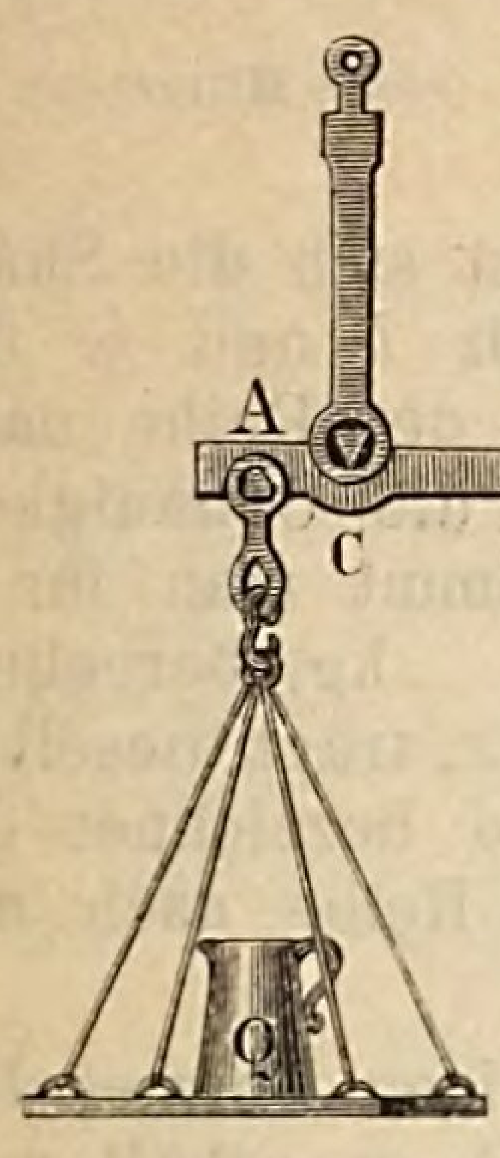
$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)\overline{AC} - G.\overline{SC}}{Q} - \frac{n.\overline{AC} - G.\overline{SC}}{Q} = \frac{\overline{AC}}{Q}$$

d. i. eine von n unabhängige, also eine konstante[2]) Grösse.

[1]) Siehe Erkl. 211.

Frage 185. Wie ist die Schnellwage mit verjüngtem Gewicht eingerichtet?

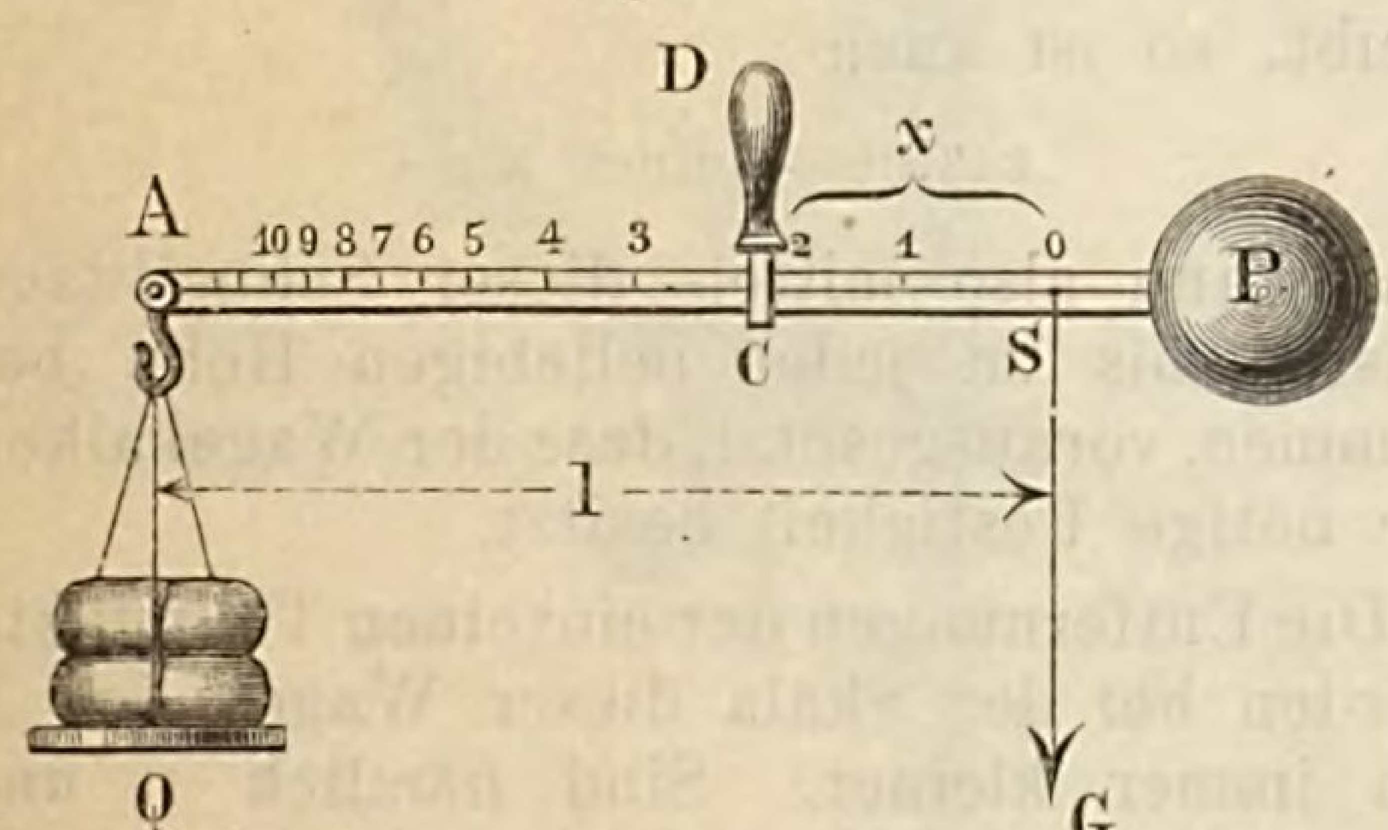
Figur 266.



Antwort. Die Schnellwage mit verjüngtem Gewicht (Fig. 266) weicht von der vorigen insofern ab, als am kürzeren Arm ein unveränderlicher Aufhängepunkt A für die Last, und ebenso am Ende des längeren Armes ein fester Punkt B angebracht ist, in welchem eine Wagschale für die Gewichte aufgehängt wird. Die leere Wage wird durch sog. Tariergewichte zum Einspielen gebracht. Das Verhältnis zwischen den Hebelarmen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ ist in der Regel ein bestimmtes, so dass z. B. $\overline{BC}$ zehnmal grösser ist als $\overline{AC}$. In diesem Fall ist die Wage eine sog. Decimalwage, indem jedes Gewicht P mit einer zehnmal grösseren Last Q im Gleichgewicht ist. Das Gewicht einer Ware Q ist daher in diesem Fall immer das Zehnfache des aufgelegten Gewichts P, welches die Wage zum Einspielen bringt.

Frage 186. Wie ist die Schnellwage mit festem Gewicht aber verschiebbarem Unterstützungspunkt eingerichtet?

Figur 267.



Antwort. Die Schnellwage mit festem Gewicht oder die sog. dänische Wage besteht aus einem einfachen Wagebalken, an dessen einem Ende A (Fig. 267) ein Haken zum Aufhängen der Last Q und am anderen Ende B ein festes Gewicht in Form einer Kugel P angebracht ist. Es muss somit der Drehpunkt C ein veränderlicher sein, was einfach so bewerkstelligt wird, dass die Drehachse C mit einer Handhabe D versehen, und beim Festhalten derselben dann der Wagebalken so lange hin- und hergeschoben wird, bis die Last Q mit der festen Kugel P im Gleichgewicht ist.

Frage 187. Wie findet man bei einer solchen Wage die Skala?

Antwort. Man bestimmt zunächst durch Versuche die Lage des Schwerpunkts S der unbelasteten Wage. Wäre dieser Punkt unterstützt, so würde dadurch das in S angreifende Gewicht G der Wage aufgehoben und die Wage wäre in Ruhe. Da bei dieser Art der Unterstützung noch keine Last in A hängt, so ist der Punkt S mit 0 bezeichnet. Bezeichnet man nun die einzuteilende Strecke AS mit l, den zu wägenden Körper mit Q und den Stützpunkt mit C, so muss für den Fall des Gleichgewichts:

$$Q \cdot \overline{AC} = G \cdot \overline{CS}$$

Hilfsrechnung.

$$Q(l-x) = Gx$$

oder:

$$Ql - Qx = Gx$$

oder:

$$Gx + Qx = Ql$$

oder:

$$x(G+Q) = Ql$$

oder:

$$x = \frac{Ql}{(G+Q)}$$

Erkl. 218. Wäre z. B. $l = 50$ cm, $G = 10$ kg, so wäre

$$x_1 = \frac{50 \cdot 1}{1+10} = 4\frac{6}{11} \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{50 \cdot 2}{2+10} = 8\frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$x_3 = \frac{50 \cdot 3}{3+10} = 11\frac{7}{13} \text{ cm}$$

Man hätte also, wenn $Q = 1, 2, 3 \ldots$ kg wäre, Punkte zu unterstützen, welche resp. $4^6/_{11}$ cm, $8^1/_3$ cm, $11^7/_{13}$ cm von S entfernt sind; aber auch umgekehrt, wenn man diese in den genannten Abständen von S gelegenen Punkte unterstützt, so ist $Q = 1, 2, 3 \ldots$ kg. Daher steht auf der Skala an diesen Punkten auch nicht resp. $4^6/_{11}$, $8^1/_3$ etc., sondern $1, 2 \ldots$ kg, weil sonst jedesmal die Berechnung von Q aus diesen Abständen erforderlich wäre.

Hilfsrechnung.

$$\frac{l(n+1)}{n+1+G} - \frac{ln}{n+G} = \frac{(ln+l)(n+G) - ln(n+1+G)}{(n+1+G)(n+G)}$$

oder:

$$\frac{lnn + lnG + ln + lG - lnn - ln - lnG}{(n+1+G)(n+G)}$$

oder:

$$\frac{lG}{(n+1+G)(n+G)}$$

sein, oder da $\overline{AC} = l - \overline{CS}$ und $\overline{CS} = x$ ist, so wird

$$Q(l-x) = G \cdot x$$

sein; hieraus erhält man für

$$x = \frac{lQ}{Q+G} \quad \text{(siehe Hilfsrechn.)}$$

Nach dieser Formel lässt sich die Skala berechnen, indem man für l und G die Werte einsetzt und für Q der Reihe nach $1, 2, 3 \ldots$ kg oder wenn die Genauigkeit $^1/_2$ kg betragen soll, so nimmt man für Q der Reihe nach $^1/_2$, 1, $1^1/_2 \ldots$ kg, berechnet die zugehörigen Werte von x, trägt dieselben von S aus auf SA ab und bezeichnet die erhaltenen Endpunkte der Reihe nach mit 1 kg, 2 kg u. s. w.[1]).

Dividiert man in der obigen Formel den Zähler und Nenner durch Q, so erhält man für x:

$$x = \frac{l}{1+\frac{G}{Q}}$$

Daraus folgt, dass x um so grösser ist, je grösser die Last Q ist. Da aber

$$1 + \frac{G}{Q} \text{ stets grösser als } 1$$

bleibt, so ist auch

$$x \text{ stets kleiner als } l$$

man kann also mittels dieser Schnellwage Lasten bis zu jeder beliebigen Höhe bestimmen, vorausgesetzt, dass der Wagebalken die nötige Festigkeit besitzt.

Die Entfernungen der einzelnen Teilpunkte werden bei der Skala dieser Wage nach A hin immer kleiner. Sind nämlich n und $n+1$ zwei aufeinanderfolgende Werte Q, x_n und x_{n+1} die entsprechenden Werte von x, so ist der Abstand der beiden zugehörigen Teilpunkte:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{l(n+1)}{n+1+G} - \frac{ln}{n+G}$$

oder:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{lG}{(n+1+G)(n+G)}$$

(siehe Hilfsrechn.)

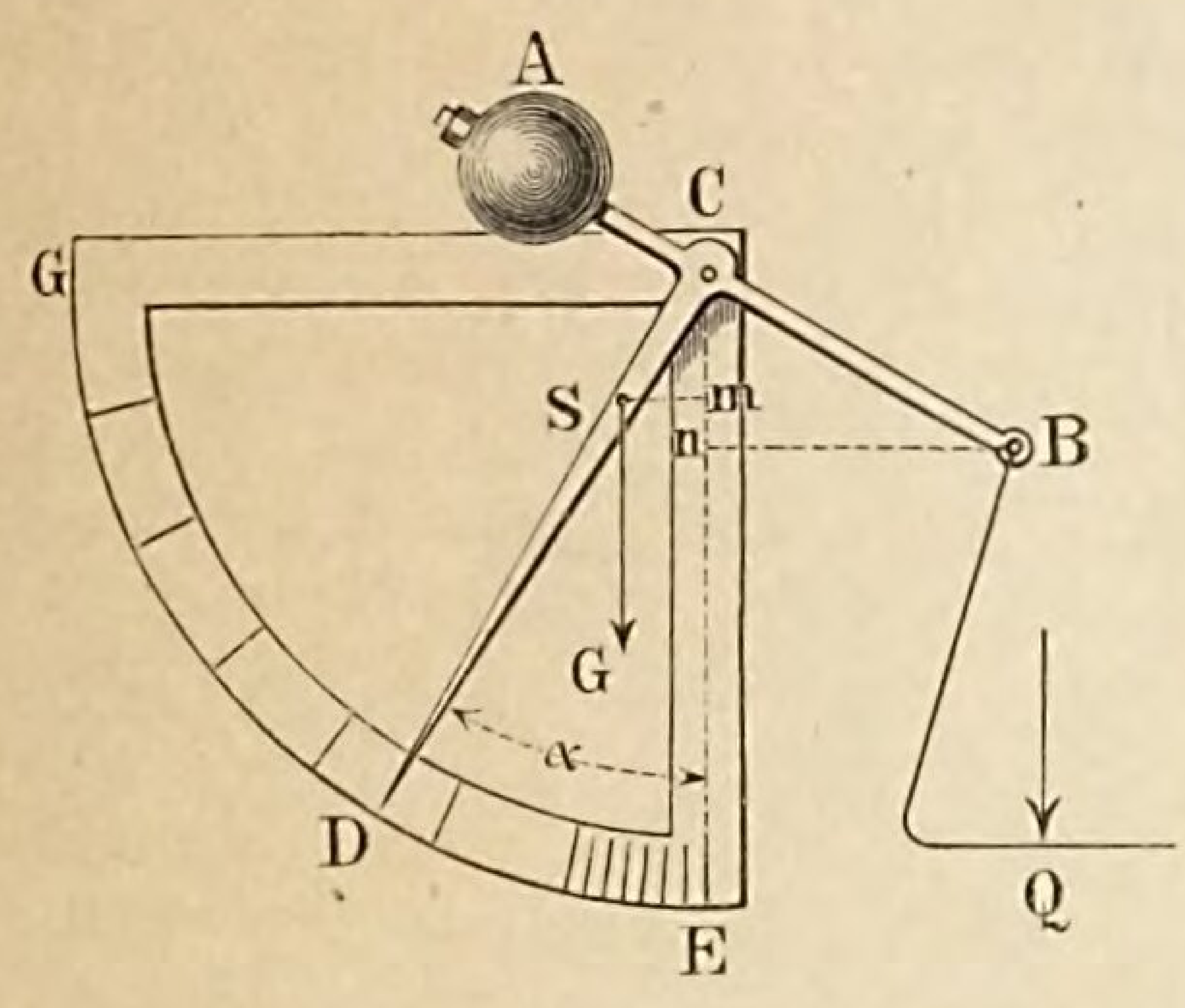
Je grösser n, d. h. je weiter die Teilpunkte von S entfernt sind, desto kleiner ist $x_{n+1} - x_n$, d. h. desto näher liegen diese Teilpunkte aneinander.

[1]) Siehe Erkl. 218.

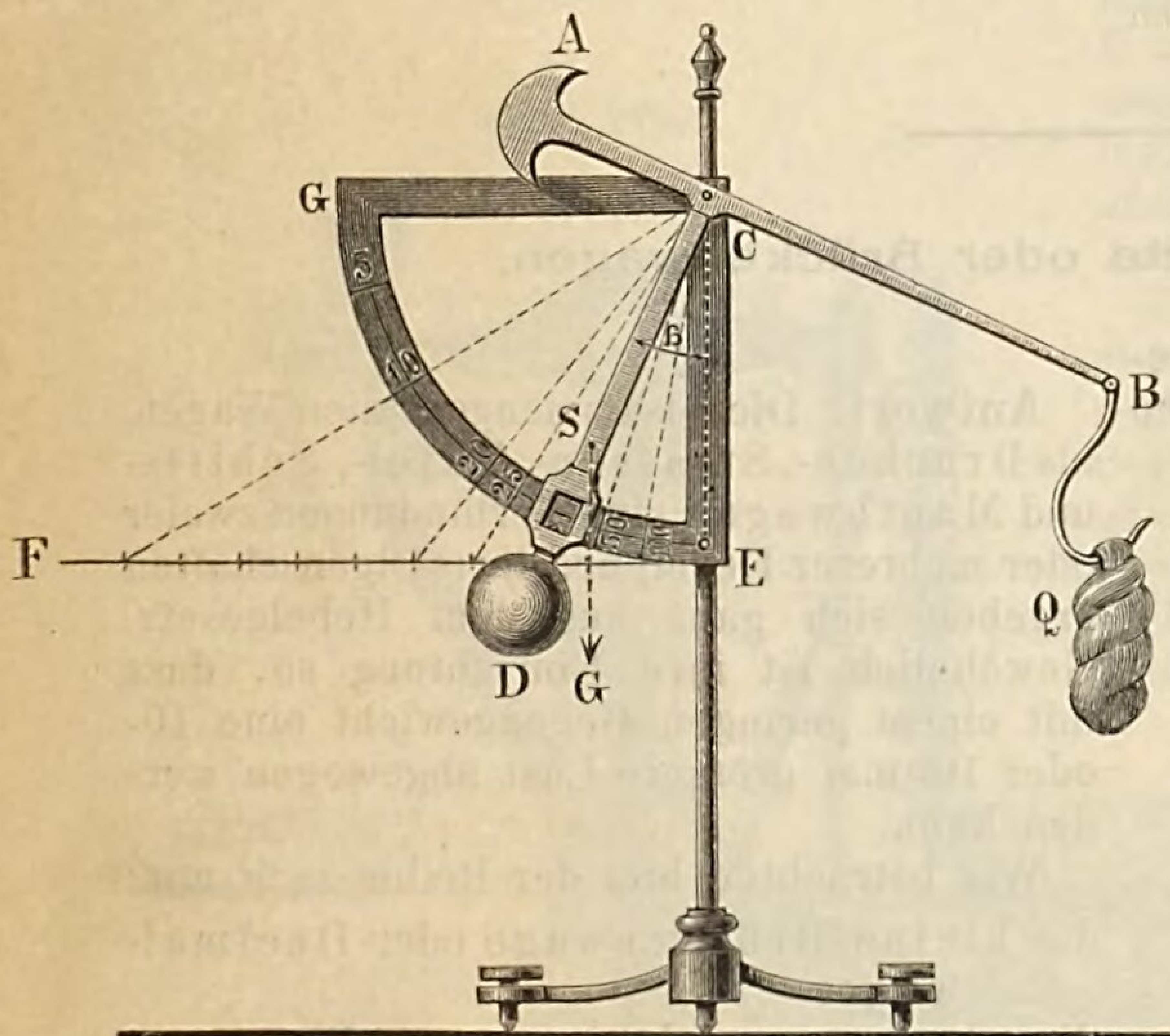
γ). Die Zeigerwagen.

Frage 188. Wenn bedient man sich mit Vorteil der Zeigerwagen und wie sind dieselben eingerichtet?

Figur 268.



Figur 269.



Antwort. Zum raschen Wiegen kleiner Lasten dienen die Zeigerwagen, welche sich durch ihre grosse Bequemlichkeit auszeichnen und auf einen hohen Grad von Feinheit gebracht werden können. Dieselben bestehen aus einem ungleicharmigen Hebel AB (siehe Fig. 268) der bei C seinen Drehpunkt hat, bei B mit einer Schale oder einem Haken zur Aufnahme der Last Q versehen ist und bei A ein Gegengewicht von solcher Grösse trägt, dass der Schwerpunkt des Balkens AB in den Drehpunkt C fällt. Rechtwinkelig zu AB im Punkt C ist mit dem Balken ein Zeiger oder ein Arm CD fest verbunden. Letzterer trägt, wie aus Fig. 269 ersichtlich ist, ein konstantes Gewicht, und unmittelbar darüber einen durchbrochenen Rahmen, um dadurch die Zahlen auf dem Gradbogen EG erkennen zu können. Die Wage ist so eingerichtet, dass der Balken AB im unbelasteten Zustand horizontal, mithin der Zeiger oder der Arm CD vertikal steht, also der Schwerpunkt S in die Senkrechte CE herabsinkt und zurRuhe kommt. Wirkt aber in B eine senkrecht herabziehende Last Q, so wird der Zeiger resp. der Arm CD mit der Senkrechten CE einen Winkel α bilden, dessen Grösse aus den Teilen des geteilten Bogens EG bestimmt wird.

Bezeichnen wir das in S wirkende Gewicht des Wagebalkens nebst Zeiger resp. Arm mit G, die Last aber mit Q, so muss nach dem Gesetz der statischen Momente für den Fall des Gleichgewichts und in Bezug auf Figur 268, worin $\overline{Sm}$ und $\overline{Bn}$ senkrecht $\overline{CE}$ sind,

$$G \cdot \overline{Sm} = Q \cdot \overline{Bn}$$

sein. Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung, dass

$$1). \quad \ldots \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q \cdot a}{G \cdot b}$$

d. h. die trigonometrischen Tangenten der Ausschlagswinkel sind den Lasten proportional. Hiernach ist eine in E zu $\overline{CE}$ errichtete Normale $\overline{EF}$ (siehe Fig. 269) in gleiche Teile zu teilen und die Verbindungslinien dieser Teilpunkte mit C werden auf dem Gradbogen die entsprechenden Teilstriche angeben, welche also unter sich un-

Hilfsrechnung

Da $\frac{\overline{Sm}}{\overline{SC}} = \sin\alpha$ oder $\overline{Sm} = \overline{SC} \cdot \sin\alpha$

und

$\frac{\overline{Bn}}{\overline{BC}} = \cos\alpha$ oder $\overline{BN} = \overline{BC} \cdot \cos\alpha$

ist, so kann man für die nebensteh. Gleichung:

$$G \cdot \overline{Sm} = Q \cdot \overline{Bn}$$

auch setzen:

$$G \cdot \overline{SC} \cdot \sin\alpha = Q \cdot \overline{BC} \cdot \cos\alpha$$

oder wenn man für $\overline{BC} = a$ und für $\overline{SC} = b$ setzt, so ist:

$$G \,.\, b \,.\, \sin\alpha = Q \,.\, a \,.\, \cos\alpha$$

oder:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Q \,.\, a}{G \,.\, b}$$

oder da nach einer goniometrischen Formel:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ ist, so ist auch:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Q \,.\, a}{G \,.\, b}$$

Erkl. 219. Während Fig. 268 die gewöhnliche Form der sog. Briefwagen zeigt, veranschaulicht Fig. 269 eine sog. Garnsortierwage, wie dieselben jetzt allgemein zur Bestimmung der Feinheitsnummer baumwollener geweifter Garne benutzt werden. Bei letzteren Wagen wird anstatt des Gewichts die Feinheitsnummer angegeben, d. h. diejenige Zahl, mit der das Gewicht von 840 Yards Garnlänge zu multiplizieren ist, um 1 Pfund engl. zu erhalten Baumwolle Nr. 50 bedeutet also: 840 Yards dieser Baumwolle wiegen $^1/_{50}$ Pfund oder $50 \,.\, 840 =$ 42000 Yards wiegen 1 Pfund. In der Fig. 269 sind auf dem Gradbogen, dieser Bezeichnung entsprechend, die einzelnen Teilstriche mit diesen Nummern versehen, wonach die Wage von Garn Nr. 100 bis Garn Nr. 5 benutzt werden kann.

gleich sind. Gewöhnlich wird die Skala empirisch bestimmt.

δ). Zusammengesetzte oder Brückenwagen.

Frage 189. Auf welchem Prinzip beruhen im allgemeinen die zusammengesetzten oder Brückenwagen?

Antwort. Die zusammengesetzten Wagen, als Brücken-, Strassen-, Tafel-, Schiffs- und Mauthwagen sind Verbindungen zweier oder mehrerer Hebel, und ihre Eigenschaften ergeben sich ganz aus dem Hebelgesetz. Gewöhnlich ist ihre Einrichtung so, dass mit einem geringen Gegengewicht eine 10- oder 100mal grössere Last abgewogen werden kann.

Wir betrachten hier der Reihe nach nur:

die kleine Brückenwage oder Decimalwage;

die Strassen- oder grosse Brückenwage und

die Tafelwage.

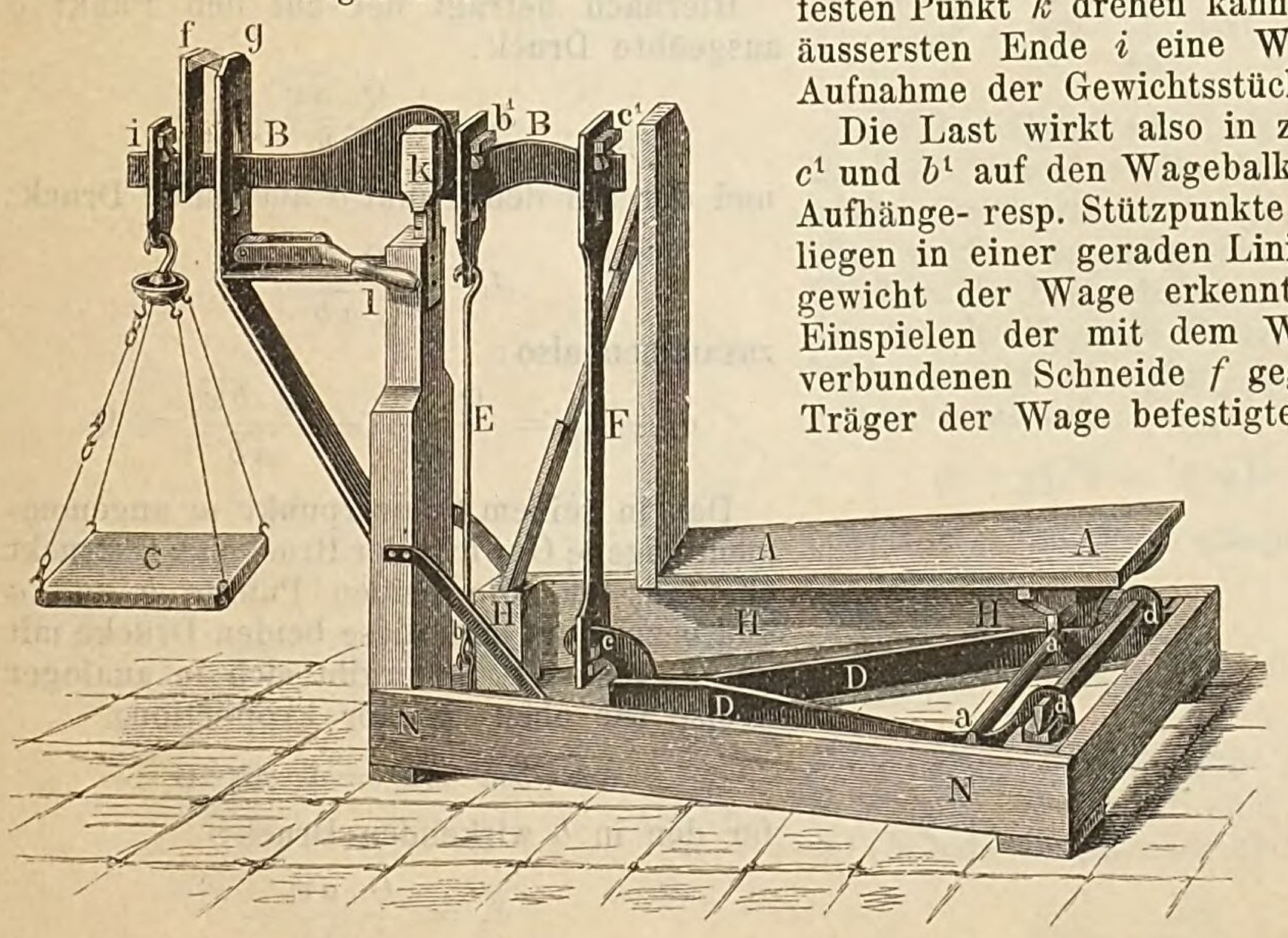
Frage 190. Wie ist die kleine Brückenwage oder Decimalwage eingerichtet?

Antwort. Die kleine Brückenwage oder Decimalwage, nach ihrem Erfinder auch wohl die Quintenz-Wage genannt, ist in Fig. 270 abgebildet. AA ist die Brücke oder derjenige Teil der Wage, auf welchen der abzuwägende Körper gelegt wird. Dieselbe ist in der Figur grösstenteils weggelassen, um den darunter liegen-

den Hebelmechanismus sehen zu können. Mit dieser Brücke ist ein vertikales Brett fest verbunden, gegen welches wieder ein seitwärts gehendes Querstück unter einem Winkel sich anlehnt, so dass diese drei Teile mit dem dreiseitigen hölzernen Rahmen HHH ein einziges Ganze darstellen. Der Rahmen H sitzt rechts auf der Schneide *aa* und ist links bei *b* an die Stange E angehängt. Die Schneide *aa* ist auf dem gabelförmig gestalteten einarmigen Hebel DD befestigt, der seine Drehachse in der Schneide *dd* rechts hat und mit seinem andern Ende *c* an der Zugstange F hängt. Der grösseren Deutlichkeit wegen ist der Rahmen H, auf welchem die Brücke AA ruht, zu hoch gezeichnet; er ist so niedrig, dass wenn durch Aufschlagen des Auflösungshebels *l* der linke Arm des Hebels B gehoben wird, der rechte Arm sich so weit senkt, dass die Brücke AA auf dem Rand des Gestelles N ruht und dann die Schneiden *c* und c^1 die Last der Brücke nicht mehr zu tragen haben. Die beiden Stangen F und E stehen in Verbindung mit einem ungleicharmigen Hebel B, der sich um den festen Punkt *k* drehen kann und an seinem äussersten Ende *i* eine Wagschale C zur Aufnahme der Gewichtstücke trägt.

Die Last wirkt also in zwei Punkten in c^1 und b^1 auf den Wagebalken und die vier Aufhänge- resp. Stützpunkte *i*, *k*, b^1 und c^1 liegen in einer geraden Linie. Das Gleichgewicht der Wage erkennt man an dem Einspielen der mit dem Wagebalken fest verbundenen Schneide *f* gegen die an dem Träger der Wage befestigte Schneide *g*.

Figur 270.

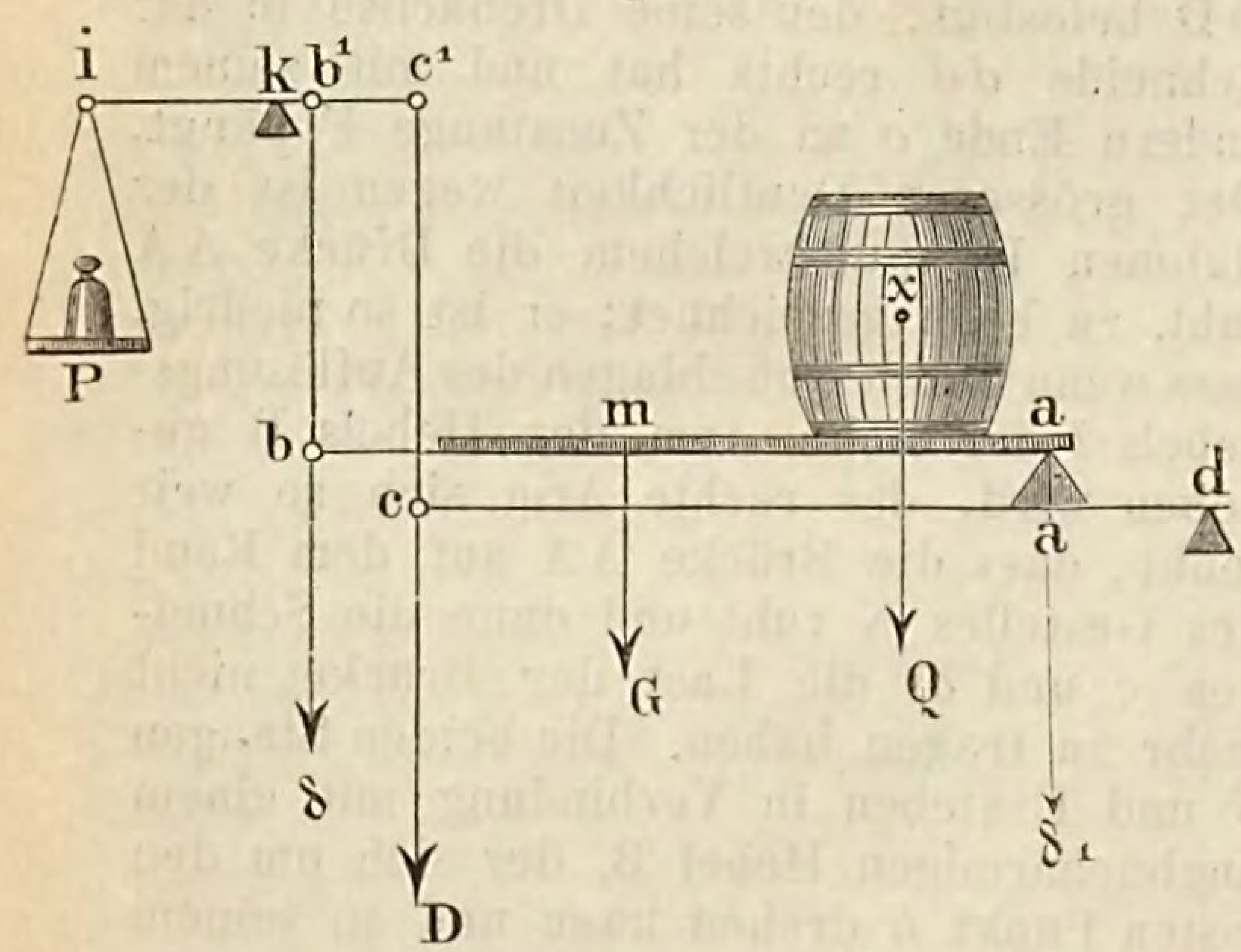


Frage 191. Welche Bedingung muss bei einer guten Brückenwage stets erfüllt sein?

Antwort. Die Abstände der beiden am Wagebalken aufgehängten Stangen vom Stützpunkt müssen sich gerade so verhalten wie der Abstand der beiden Schneiden, auf welchen

die beiden an den Stangen befestigten Hebel ruhen, zur Länge des unteren Hebels und die Last auf der Brücke wirkt dann gerade so als ob sie unmittelbar an der dem Unterstützungspunkt zunächst befindlichen Stange E angehängt wäre, wo auch die Last auf der Brücke liegen mag. In Zeichen: es muss $\overline{kb'} : \overline{kc'} = \overline{da} : \overline{dc}$ sein.

Figur 271.



Beweis dieser Bedingung. Man übersieht die Konstruktion der Brückenwage am besten, wenn man die dabei angewandten zusammengesetzten Hebel durch blosse Linien darstellt, wie es in Fig. 271 geschehen ist. Es sei ab die Brücke, auf welcher die Last Q im Punkt x ruht, das eigene Gewicht dieser Brücke mit allen dazu gehörigen Teilen heisst G und habe seinen Schwerpunkt in m.

Nach Satz 9 in Antwort auf Frage 22 besteht nun, wenn δ_1 den Druck der Last Q auf den Punkt b und Δ_1 den Druck der Last Q auf den Punkt a bezeichnet die Proportion:

$$\overline{ax} : \overline{bx} : \overline{ab} = \delta_1 : \Delta_1 : Q$$

Hiernach beträgt der auf den Punkt b ausgeübte Druck:

$$\delta_1 = \frac{Q \cdot \overline{ax}}{\overline{ab}}$$

und der auf den Punkt a ausgeübte Druck:

$$\Delta_1 = \frac{Q \cdot \overline{bx}}{\overline{ab}}$$

zusammen also:

$$\delta_1 + \Delta_1 = \frac{Q \cdot \overline{ax}}{\overline{ab}} + \frac{Q \cdot \overline{bx}}{\overline{ab}} = Q$$

Das in seinem Schwerpunkt m angenommene eigene Gewicht der Brücke $=$ G drückt ebenfalls auf die beiden Punkte b und a und bezeichnet man diese beiden Drücke mit mit δ_2 resp. Δ_2, so ergibt sich in analoger Weise wie oben aus der Proportion:

$$\overline{am} : \overline{bm} : \overline{ab} = \delta_2 : \Delta_2 : G$$

für den in b wirkenden Druck:

$$\delta_2 = \frac{G \cdot \overline{am}}{\overline{ab}}$$

und für den in a wirkenden Druck:

$$\Delta_2 = \frac{G \cdot \overline{bm}}{\overline{ab}}$$

zusammen:

$$\delta_2 + \Delta_2 = \frac{G \cdot \overline{am}}{\overline{ab}} + \frac{G \cdot \overline{bm}}{\overline{ab}} = G$$

Der auf den Punkt b wirkende Gesamtdruck ist daher:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

oder:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta = \frac{Q \cdot \overline{ax}}{\overline{ab}} + \frac{G \cdot \overline{am}}{\overline{ab}}$$

und der auf den Punkt a wirkende Gesamtdruck:

$$\varDelta = \varDelta_1 + \varDelta_2$$

oder:

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varDelta = \frac{Q \cdot \overline{bx}}{\overline{ab}} + \frac{G \cdot \overline{bm}}{\overline{ab}}$$

Dieser letztere, auf den Hebel $\overline{cd}$ in a wirkende Druck verteilt sich auf die beiden Punkte c und d und wirkt auf Punkt c mit einer Kraft D, welche sich aus folgender, nach Satz 9 abgeleiteter Proportion ergibt:

$$\overline{ad} : \overline{cd} = D : \varDelta$$

woraus

$$D = \varDelta \cdot \frac{\overline{ad}}{\overline{cd}}$$

oder für $\varDelta$ den entsprechenden Wert eingesetzt:

$$D = \left(Q \cdot \frac{\overline{bx}}{\overline{ab}} + G \cdot \frac{\overline{bm}}{\overline{ab}}\right) \frac{\overline{ad}}{\overline{cd}} \cdot$$

Auf den Hebel ikc^1 wirken also in den Punkten b^1 und c^1 die beiden oben ermittelten Gesamtlasten δ und D, im Punkt i aber nach entgegengesetzter Richtung das Gewicht der Wagschale mit Ketten $= p$ und das auf ihr liegende Gewicht P, und damit beide Kräfte einander das Gleichgewicht halten, muss sein:

$$(P + p)\,\overline{ik} = \delta \cdot \overline{kb^1} + D \cdot \overline{kc^1}$$

oder für δ und D die entsprechenden Werte eingesetzt:

$$(P + p)\,\overline{ik} = \left(Q \cdot \frac{\overline{ax}}{\overline{ab}} + G \cdot \frac{\overline{am}}{\overline{ab}}\right) \overline{kb^1} + \left(Q \cdot \frac{\overline{bx}}{\overline{ab}} + G \cdot \frac{\overline{bm}}{\overline{ab}}\right) \frac{\overline{ad}}{\overline{cd}} \cdot \overline{kc^1}$$

Da diese Verhältnisse der Längen der Hebelarme willkürlich sind, so werden sie am einfachsten einander gleich gesetzt, also:

$$\overline{kb^1} = \frac{\overline{ad}}{\overline{cd}} \cdot \overline{kc^1}$$

$$\overline{kb^1} \cdot \overline{cd} = \overline{ad} \cdot \overline{kc}$$

oder:

$$\overline{kb^1} : \overline{kc^1} = \overline{da} : \overline{dc}$$

und es lassen sich dann beide Glieder des letzten Teils der Gleichung addieren. Dieses gibt:

$$(P+p)\,\overline{ik} = \left(Q\cdot\frac{\overline{ax}}{\overline{ab}} + G\cdot\frac{\overline{am}}{\overline{ab}} + Q\cdot\frac{\overline{bx}}{\overline{ab}} + G\cdot\frac{\overline{bm}}{\overline{ab}}\right)\overline{kb^1}$$

oder:

$$(P+p)\,\overline{ik} = \left(Q\cdot\frac{(\overline{ax}+\overline{bx})}{\overline{ab}} + G\cdot\frac{(\overline{am}+\overline{bm})}{\overline{ab}}\right)\overline{kb^1}$$

oder:

$$(P+p)\,\overline{ik} = \left(Q\cdot\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}} + G\cdot\frac{\overline{ab}}{\overline{ab}}\right)\overline{kb^1}$$

oder:

3). . . $(P+p)\,\overline{ik} = (Q+G)\,\overline{kb^1}$

Da in dieser Gleichung die Grössen $\overline{bx}$ und $\overline{bm}$ nicht mehr vorkommen, so folgt hieraus, dass es ganz gleichgültig ist, auf welchem Punkt der Brücke die Last liegt; indes findet dieses nur dann statt, wenn:

$$\overline{kb^1} : \overline{kc^1} = \overline{da} : \overline{dc}$$

Hieraus folgt die Regel, dass $\overline{kb^1}$ so oft in $\overline{kc^1}$ enthalten sein muss, als $\overline{da}$ in $\overline{dc}$. Es muss dann das Gewicht der Wagschale p mit dem Gewicht der Brücke G vollkommen ausgeglichen sein, und ist dann $P = 0$, so muss auch $Q = 0$ sein, und man erhält dann aus der Gleichung 3).:

4). . . . $p\,.\,\overline{ik} = G\,.\,\overline{kb^1}$

Wird diese letzte Gleichung von der vorletzten 3). abgezogen, so bleibt:

$$P\,.\,\overline{ik} = Q\,.\,\overline{kb^1}$$

oder:

$$P : Q = \overline{kb^1} : \overline{ik}$$

Es verhält sich also der kürzere Hebelarm $\overline{kb^1}$ zum längeren $\overline{ik}$ wie das Gewicht P, welches auf die kleinere Wagschale gelegt wird, zu dem Gewicht Q der auf der Brücke liegenden Last, wobei jedoch die Bedingung stattfinden muss, dass die unbelastete Wage in ihren verschiedenen Teilen sich im Gleichgewicht befindet. Gewöhnlich findet bei den Brückenwagen das Verhältnis:

$$\overline{kb^1} : \overline{ik} = 1 : 10$$

statt (daher der Name Decimalwage, von dem Wort „decem" = zehn), welches zugleich bequem und für das Bedürfnis im ganzen zureichend ist.

Erkl. 220. Einen wesentlichen Vorteil der Bequemlichkeit gewähren diese Wagen durch die Einrichtung, dass ein grosser Teil des Hebelwerks unter der Brücke liegt, sie mithin verhältnismässig nur wenig Raum einnehmen, ausserdem aber werden sie in eine Vertiefung des Fussbodens eingesenkt und man kann daher die zu wägenden Lasten auf die Brücke wälzen. Uebrigens ruhen auch bei dieser Wage die Hebel mit Messerschneiden oder Stahlprismen auf harten Unterlagen, um die Reibung möglichst zu vermindern, wie dieses bei den Krämer- und Schnellwagen der Fall ist.

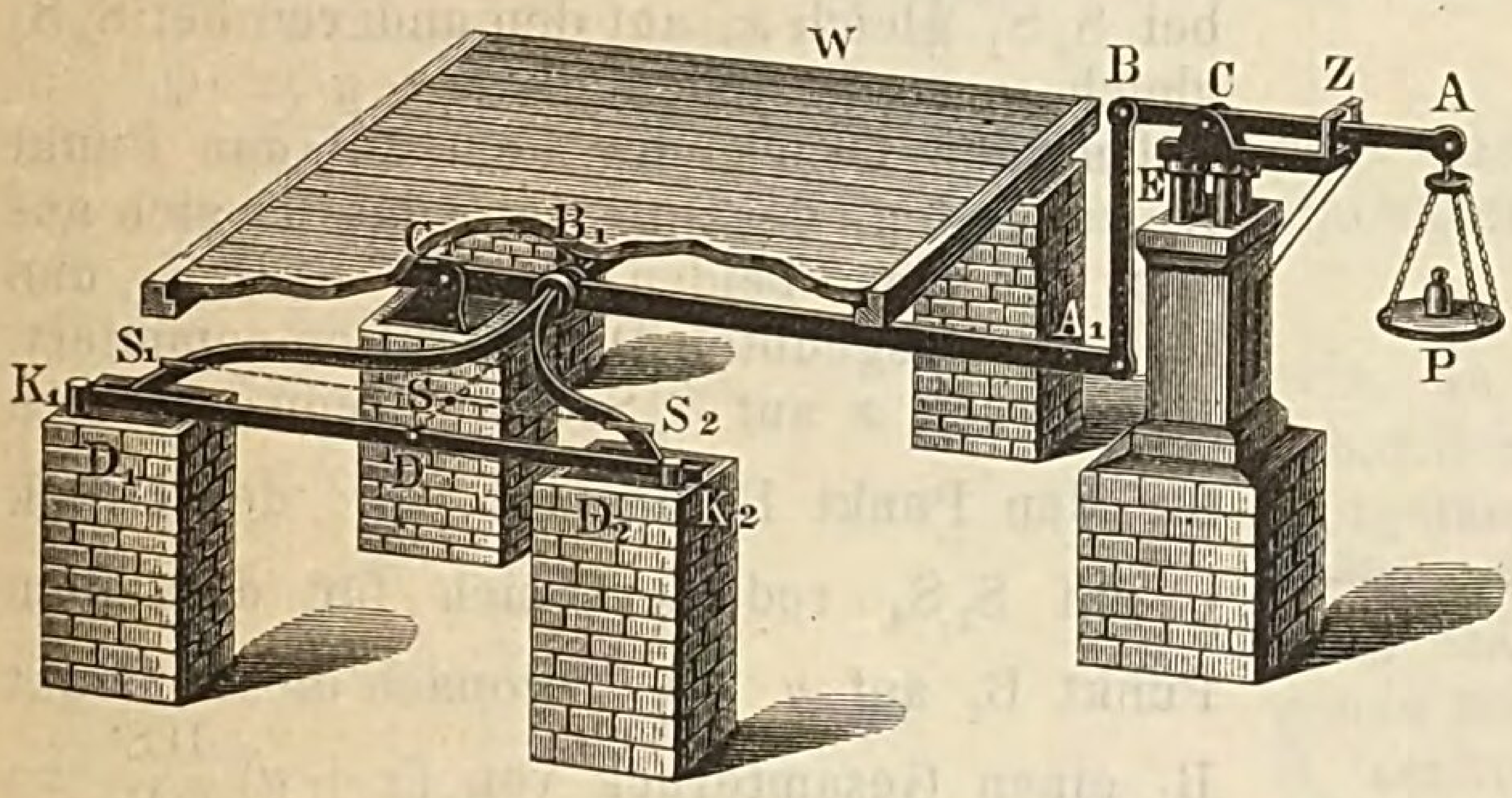
Frage 192. Wie ist die Strassenwage oder grosse Brückenwage eingerichtet?

Antwort. Die Einrichtung der Strassenwage oder grossen Brückenwage, welche zum Wägen sehr grosser Lasten dient und auf welcher schwer beladene Frachtwagen direkt, ohne Umpackung, gewogen werden können, ergibt sich aus den beiden

nebenstehenden Fig. 272 und 273, deren erste das perspektivische Bild und deren zweite den Grundriss einer solchen Wage vorstellt.

Auf vier gut fundamentierten Pfeilern D_1, D_2, D_3, D_4 befinden sich die Drehpunkte K_1, K_2, K_3, K_4, von denen in der Fig. 272 nur die beiden vorderen sichtbar sind, für zwei gabelförmige einarmige Hebel $K_1B_1K_2$ und $K_3B_1K_4$, deren freie Enden bei B_1, wo ringförmige Lager sie aufnehmen, sich an die Stange C_1A_1 lehnen, die in C_1 ihren Drehpunkt hat. Ueber diesen horizontalen Hebeln liegt eine starke hölzerne Brücke W, welche zur Aufnahme der zu wägenden Lasten dient und daher gewöhnlich im Niveau der Strasse liegt, während die Pfeiler K_1 bis K_4 nebst dem horizontalen Hebelwerk darunter angelegt sind. Die Brücke W, welche in der Figur zum Teil weggelassen ist, stützt sich in den vier Punkten S_1, S_2, S_3, S_4, von denen in der Fig. 272 ebenfalls nur die zwei ersten sichtbar sind, auf die gabelförmigen Hebel K_1B_1, K_2B_1, K_3B_1 und K_4B_1. Die ganze Last der Brücke, welche wir in der Folge mit Q bezeichnen wollen, wirkt daher zunächst auf die vier Punkte S_1 bis S_4, und vermittelst der Gabelhebel auf den einen Punkt B_1, so dass dieser Punkt von einer und derselben Last Q stets denselben Druck erhält, gleichviel an welcher Stelle die Last auf der Brücke liegen mag.

Figur 272.

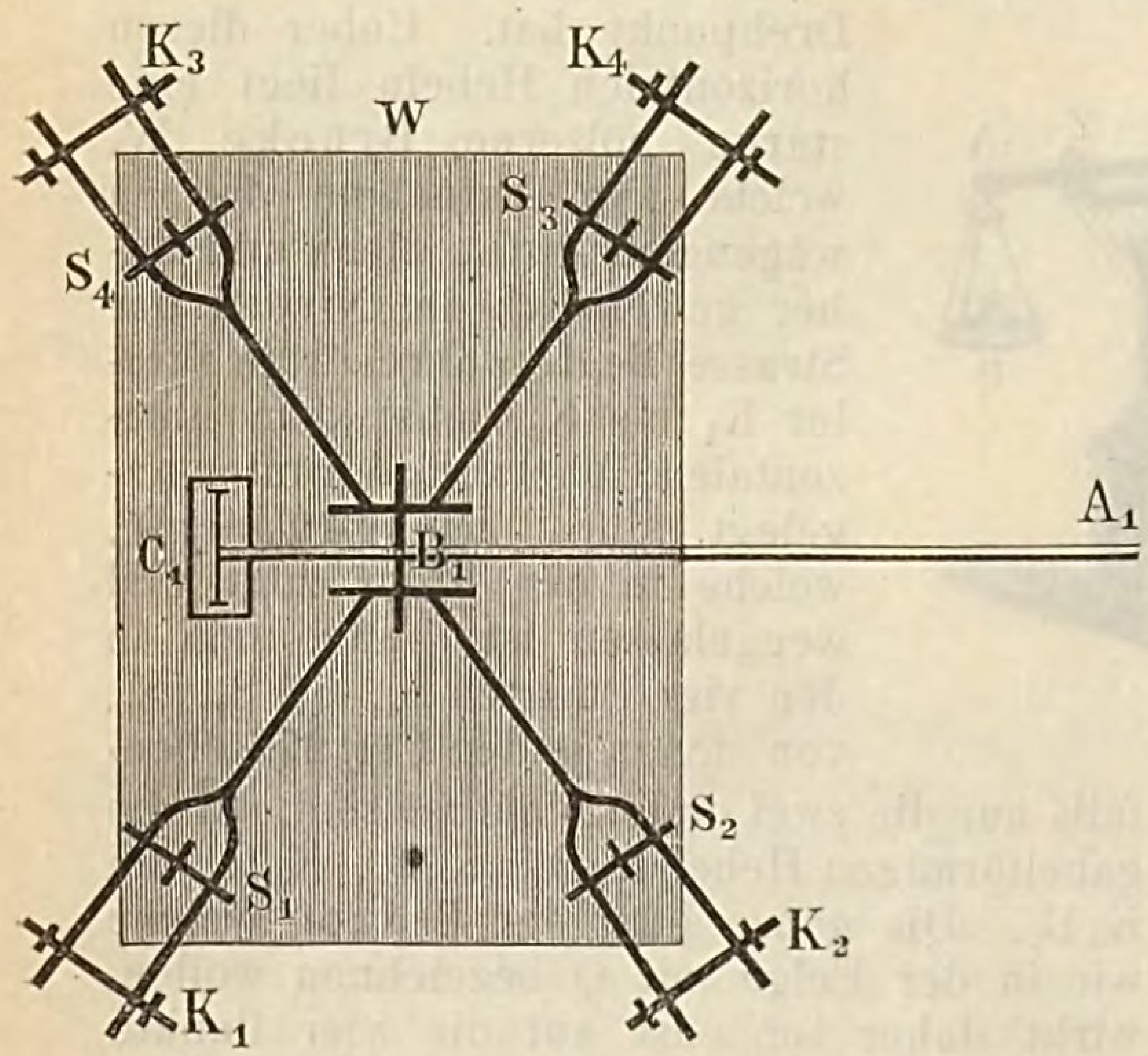


Der in B_1 von der Last ausgeübte Druck pflanzt sich durch den einarmigen Hebel $C_1B_1A_1$, dessen freies Ende A_1 vermittelst einer vertikalen Zugstange mit dem Punkt B verbunden ist, auf den Hebel BCA weiter fort. Dieser letztere Hebel bildet den Wagbalken; er hat in C seinen Drehpunkt und trägt in A die Wagschale zur Aufnahme der Gewichtsstücke. Das Einspielen der Wage beim Gleichgewicht erkennt man an dem Zusammentreffen zweier Schneiden Z, von denen die eine feststeht, die andere an dem Wagbalken befestigt ist.

Der Drehpunkt C des Wagbalkens ist auf einem beweglichen Gestelle E angebracht, welches sich durch einen besonderen Mechanismus heben und senken lässt, damit man während der Zeit, wo die Wage nicht gebraucht wird, durch Einsenken des Gestelles E zugleich die Punkte C, S_1, S_2, S_3, S_4 niederlassen und von dem Gewicht der

schweren Brücke W befreien kann. Die Brücke drückt dann nicht mehr auf die Hebel, sondern ruht auf den dafür besonders angebrachten Stützen. Wenn eine Wägung vorgenommen werden soll, hebt man das Gestelle E so viel, dass die Hebel $K_1 B_1 K_2$ und $K_3 B_1 K_4$ die Brücke W in die Höhe heben, was an dem Einspielen der Schneiden Z leicht erkannt werden kann.

Figur 273.



Liegt der Schwerpunkt der Last Q nicht zufällig genau über B_1, so erhalten die Gabelhebel beiderseits auch nicht denselben Druck; gesetzt dieser Druck sei auf den einen Hebel bei $S_1 S_2$ gleich x, auf den anderen bei $S_3 S_4$ gleich y, so ist jedenfalls $x + y = Q$.

Um den Druck der Last auf den Punkt B_1 zu finden, beachte man, dass er sich aus den von den beiden Hebeln $K_1 B_1 K_2$ und $K_3 B_1 K_4$ ausgeübten Druckkräften summiert. Der Druck x auf $S_1 S_2$ aber reduziert sich für den Punkt B_1 auf $x \cdot \frac{DS}{DB_1}$; der Druck y auf $S_3 S_4$ reduziert sich für denselben Punkt B_1 auf $y \cdot \frac{DS}{DB_1}$, wonach dieser Punkt B_1 einen Gesamtdruck von $(x+y)\frac{DS}{DB_1} = Q \cdot \frac{DS}{DB_1}$ erhält, welcher sich für den Punkt A_1 und daher auch für B auf $Q \cdot \frac{DS}{DB_1} \cdot \frac{C_1 B_1}{C_1 A_1}$ reduziert.

Es ist daher Gleichgewicht für den Hebel BA vorhanden, wenn so viel Gewicht P in die Wagschale gelegt wird, dass

$$P \cdot \overline{CA} = Q \cdot \frac{\overline{DS}}{\overline{DB_1}} \cdot \frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{C_1A_1}} \cdot \overline{CB}$$

oder:

$$P = Q \cdot \frac{\overline{DS}}{\overline{DB_1}} \cdot \frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{C_1A_1}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

ist.

Ueber die Grösse dieser Verhältnisse der Hebelarme kann man je nach dem Zwecke, dem die Wage dienen soll, frei verfügen; gewöhnlich nimmt man:

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{DB_1}} = \frac{1}{10}; \quad \frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{C_1A_1}} = \frac{1}{5}; \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2}$$

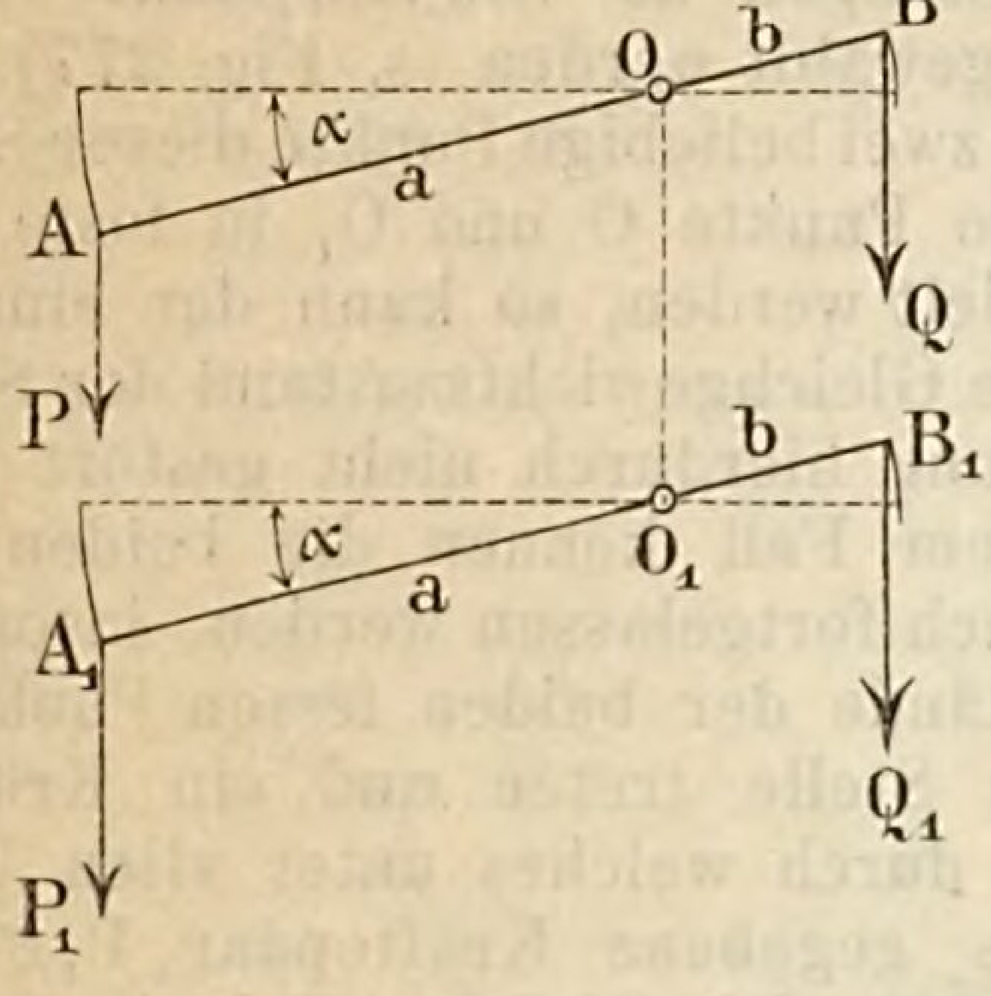
es ist dann:

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} Q = \frac{1}{100} \cdot Q$$

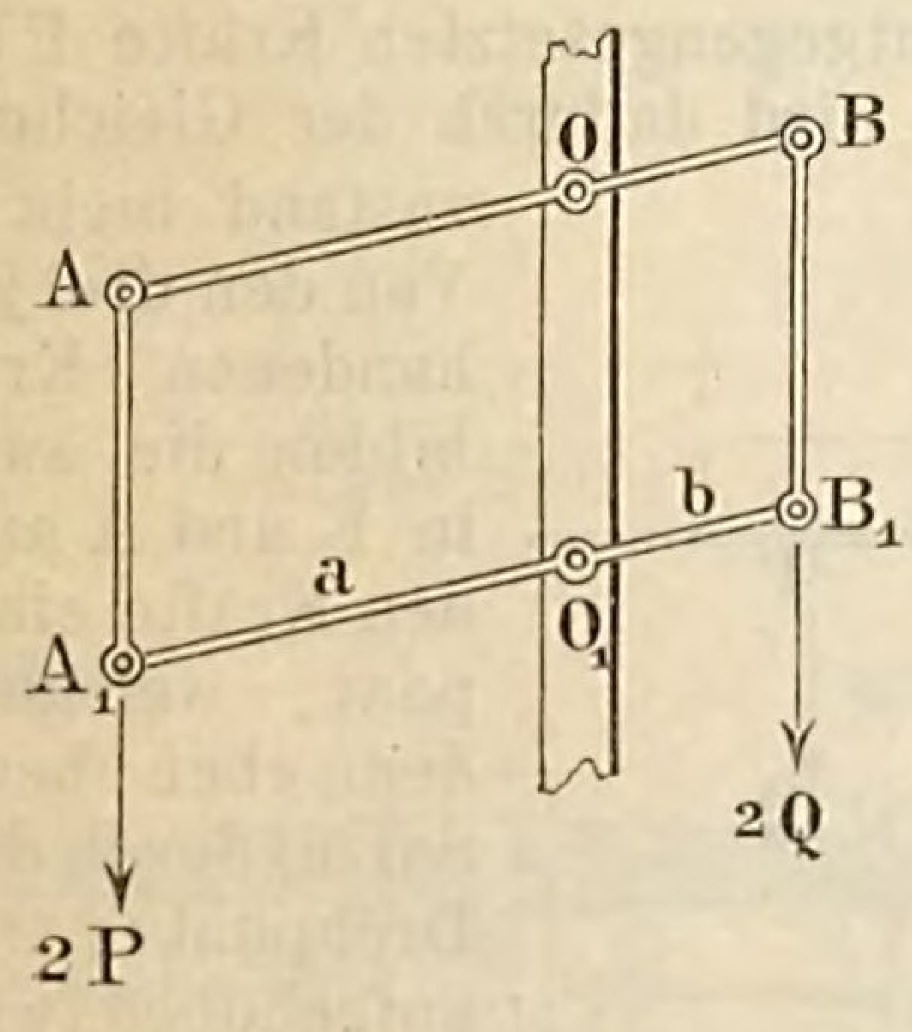
d. h. die abzuwägende Last ist 100 mal so gross, als das Gewicht P in der Wagschale, oder man kann jede Last mit einem 100 mal kleinerem Gewicht abwägen. Von dem Wort centum = hundert erhält daher diese Wage häufig den Namen Centesimalwage.

Frage 193. Was versteht man unter der Wage des Roberval und auf welchem Prinzip beruht dieselbe?

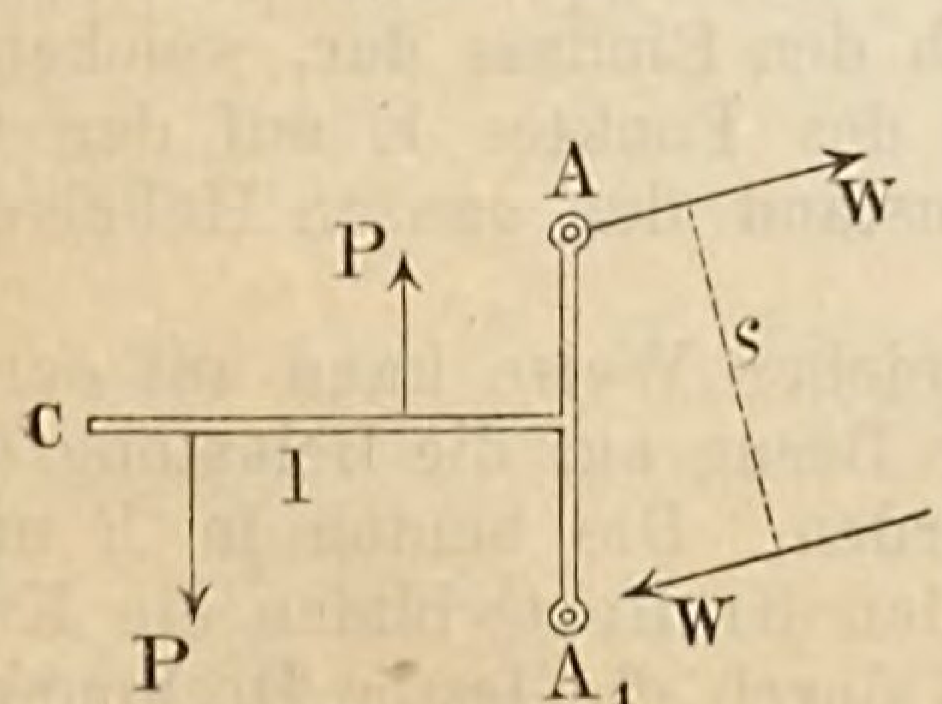
Figur 274.



Figur 275.



Figur 276.



Antwort. Während der vielen Versuche zur Begründung des Hebelgesetzes machte *Roberval* einen Apparat bekannt, welcher nach ihm Wage des Roberval genannt worden ist.

Zur Erklärung des genannten Apparates diene folgendes: Denken wir uns (siehe Fig. 274) einen in O befestigten gewichtslosen Hebel AB, an dem sich die beiden Gewichte P und Q das Gleichgewicht halten, so muss nach dem Hebelgesetz:

$$P \cdot a = Q \cdot b$$

oder was dasselbe ist nach dem Satz der statischen Momente:

$$P \cdot a \cdot \cos\alpha = Q \cdot b \cdot \cos\alpha$$

sein. In der letzten Gleichung den gemeinschaftlichen Faktor $\cos\alpha$ auf beiden Seiten fortgelassen, gibt die erste Gleichung.

Für einen zweiten Hebel $A_1 B_1$, welcher nach Stellung und Form mit dem vorigen genau übereinstimmt, und dessen Drehpunkt O_1 senkrecht unter dem Drehpunkt O des ersten Hebels liegen soll, erhält man auf gleiche Weise:

$$P_1 \cdot a = Q_1 \cdot b$$

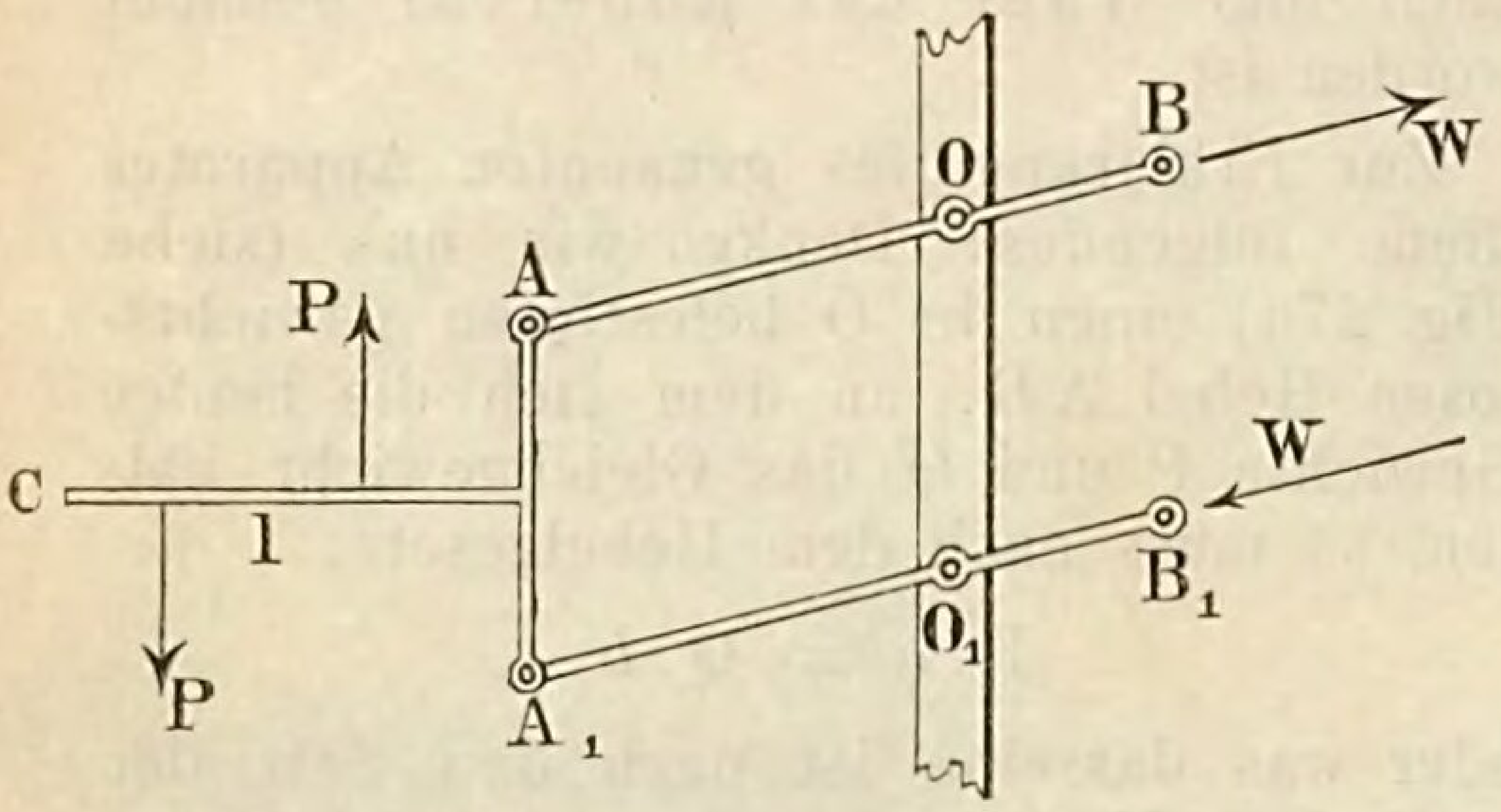
Denkt man sich nun die beiden senkrecht übereinander liegenden Punkte A und A_1, sowie B und B_1 durch gewichtlose Vertikalstangen AA_1 resp. BB_1 miteinander verbunden (siehe Fig. 275), so erleiden die Gleichgewichtszustände der beiden Hebel keinerlei Störung. Es entsteht auf diese Weise das von den zwei festen Punkten O und O_1 unterstützte verschiebbare Parallelogramm $A_1 A B B_1$, dessen senkrechte Stangen mit den Gewichten 2P und 2Q belastet sind, und für dessen Gleichgewichtszustand genau dieselbe Bedingung gilt, wie für den einfachen Hebel AB in Fig. 274.

Bei der Betrachtung des Gleichgewichtszustandes zweier auf einen festen Körper wirkenden Kräftepaare wurde der Satz aufgestellt, dass sich zwei Kräftepaare das Gleichgewicht halten, wenn ihre Drehungsrichtungen entgegengesetzt und ihre Momente gleich gross sind. Es kann also z. B. an dem Körper ACA_1 (siehe Fig. 276) einem gegebenen Kräftepaar PP das Gleichgewicht gehalten werden durch das entgegengesetzte drehende Kräftepaar $W_1 W_1$, wenn:

$$P \cdot l = W \cdot \varrho$$

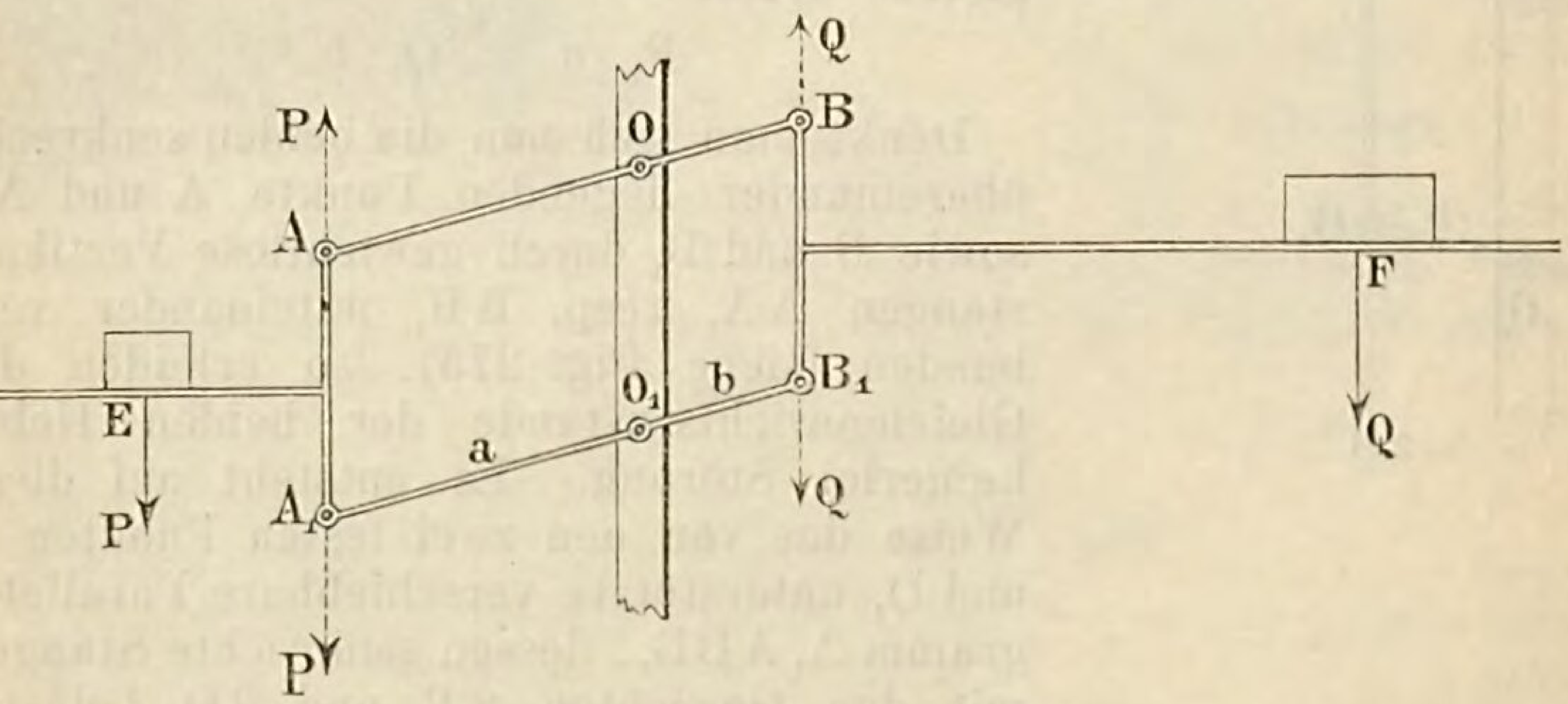
ist. Der Gleichgewichtszustand dieses Kör-

Figur 277.



pers wird auch dann noch fortdauern, wenn die beiden Kräfte W W_1 anstatt direkt auf den Körper zu wirken, durch Vermittelung von geradlinigen und gewichtlosen Stangen, welche mit deren Richtungslinien zusammenfallen, ihre Wirkung auf den Körper übertragen, und es können beliebige Punkte dieser Stangen als Angriffspunkte für jene Kräfte gewählt werden (s. Fig. 277). Wenn alsdann zwei beliebige Punkte dieser Stangen, z. B. die Punkte O und O_1 in feste Punkte verwandelt werden, so kann der einmal bestehende Gleichgewichtszustand der Stangenverbindung hierdurch nicht gestört werden. In diesem Fall können die beiden Kräfte W W auch fortgelassen werden, insofern die Widerstände der beiden festen Punkte dann an ihre Stelle treten und ein Kräftepaar bilden, durch welches unter allen Umständen das gegebene Kräftepaar P_1 P aufgehoben wird. Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich nunmehr auf folgende Weise für die in Fig. 278 dargestellte Hebelverbindung ableiten.

Figur 278.



Wenn man in den Punkten A und A_1 die beiden entgegengesetzten Kräfte P P hinzufügt, so wird dadurch der Gleichgewichtszustand nicht gestört. Von den drei jetzt vorhandenen Kräften P bilden die zwei resp. in E und A angreifenden Kräfte ein Kräftepaar, welches (nach dem eben bewiesenen Satze) durch die festen Drehpunkte O und O_1 aufgehoben wird, also auch fortgelassen werden kann, ohne dass der Gleichgewichtszustand dadurch gestört würde. Die noch übrig bleibende dritte Kraft P wirkt in dem Punkte A_1, und diese Kraft stellt demnach den Einfluss dar, welchen die Belastung des Punktes E auf den Gleichgewichtszustand der ganzen Hebelverbindung ausübt.

In gleicher Weise kann auf der anderen Seite in Bezug auf die Belastung Q verfahren werden. Die beiden in F und B angreifenden Kräfte Q bilden ein Kräftepaar, welches durch die festen Drehpunkte O und O_1 aufgehoben wird, und die in dem Punkte B_1 angreifende Kraft Q stellt den Einfluss dar, welchen die Belastung des Punktes F auf den Gleichgewichtszustand des Ganzen ausübt.

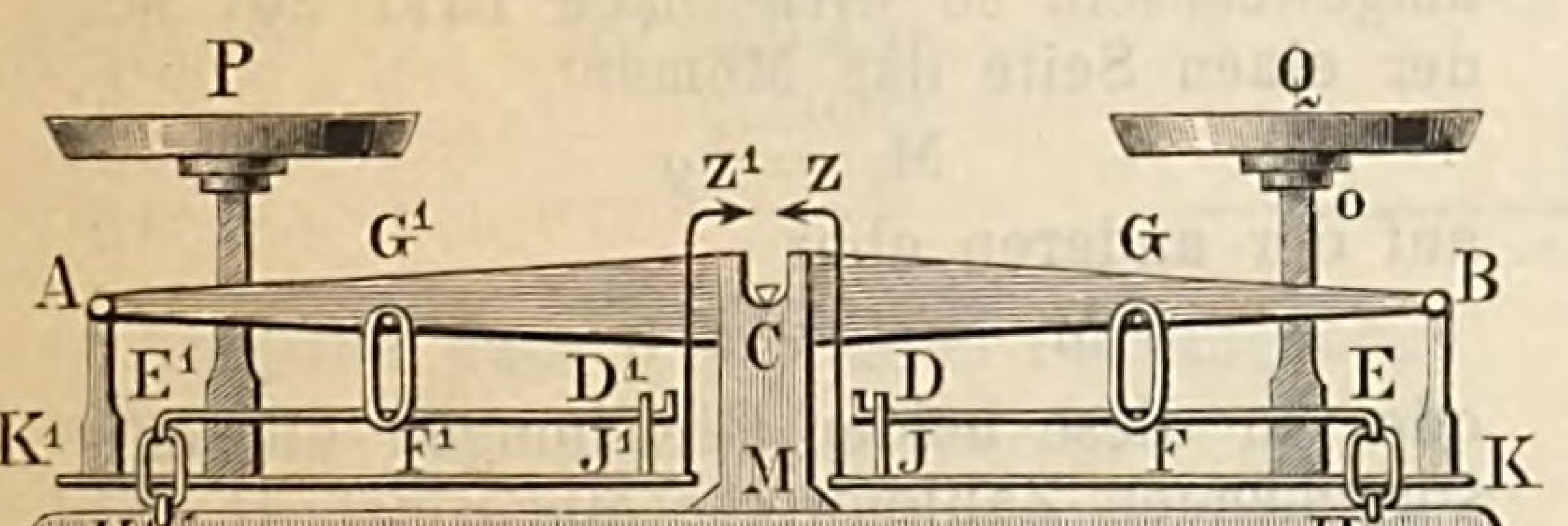
Die beiden in E und F angebrachten Belastungen wirken daher gerade so, wie wenn dieselben unmittelbar resp. an den Punkten A_1 und B_1 aufgehängt wären, und dieselbe Gleichung:

$$P.a = Q.b$$

welche in Bezug auf Fig. 275 aufgestellt wurde, stellt auch in Bezug auf Fig. 278 die Gleichgewichtsbedingung dar. Die Lage der beiden Stellen E und F, in welchen die horizontalen Ansätze der senkrechten Stangen belastet werden, ist also ohne Einfluss auf den Gleichgewichtszustand; es ist vielmehr nur das Verhältnis der beiden Hebellängen a und b, durch welches das im Gleichgewichtszustande erforderliche Verhältnis der beiden Belastungen P und Q bedingt wird.

Frage 194. Wie ist die auf dem vorerwähnten Prinzip beruhende und von *Beranger* in Lyon konstruierte Tafelwage eingerichtet?

Figur 279.



Antwort. Die Einrichtung der auf dem vorerwähnten Prinzip beruhenden und von Beranger in Lyon verfertigten Tafelwage, welche zum raschen und bequemen, aber weniger genauen Abwiegen gewöhnlicher Lasten in neuester Zeit viele Verbreitung gefunden hat, ist aus Fig. 279 ersichtlich: A B C ist ein gleicharmiger Wagebalken, der in C gestützt ist.

Ausserdem ist auf jeder Seite ein Hebel DE, der in seiner Mitte F am Wagbalken und zwar in G aufgehängt und in H mittels eines Ringes mit dem Gestelle der Wage verbunden ist. Mit den Enden A und B des Wagebalkens sind sodann noch sog. Lenker JK verbunden, die in D am Hebel DE aufgehängt sind. Auf dem einen Lenker JK ruht mittels eines Trägers die Wagschale mit der abzuwiegenden Last Q, während die auf dem andern Lenker aufruhende Wagschale das gleich grosse Gegengewicht P aufnimmt.

Drückt nun Q auf JK, so wird der Punkt B des Wagbalkens abwärts gezogen und damit gehen auch die Punkte G und F, also auch D und J abwärts, und zwar bewegt sich — was zum richtigen Spiel der Wage gehört — JK parallel mit sich selbst, was dadurch erreicht wird, dass auf der horizontalen Lage des Wagebalkens auch DE und JK horizontal sind und CG = GB und DF = FE ist. — Bei M ist mit der Lenkstange MJK ein Zeiger Z angebracht, der bei der Gleichgewichtslage die gleiche Höhe mit dem gegenüberstehenden Zeiger

Z' haben muss. Der ganze Mechanismus befindet sich im Innern eines Kastens, durch dessen oberen Teil nur die Träger mit den Wagschalen, sowie die Zeiger Z hervorragen. Letzterer Umstand, dass nämlich der Mechanismus verborgen ist, ist auch Ursache, dass die genannten Wagen vielfach als unzulässig erachtet worden sind.

ε). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 233. Es seien bei einer unrichtigen unbelasteten Krämerwage die beiden Schalen nebst ihren Schnüren miteinander im Gleichgewicht, die eine Schale nebst Zubehör wiege 145 g, die andere Schale dagegen 150 g und zwar hänge erstere an einem 20 cm langen Hebelarm.

a). Wie lang wird der Hebelarm sein, an dem die zweite Schale hängt?

b). Welches Uebergewicht ergibt sich, wenn die beiden Schalen umgewechselt werden?

c). Wenn aber, ohne dass die Schalen umgewechselt werden, in die leichtere Schale eine 500 g schwere Ware gelegt wird, wieviel Gewichte müssen dann in die andere Schale gelegt werden?

Hilfsrechnungen:

1). $l = \frac{20 . 145}{150}$

oder:

$$l = \frac{2 . 29}{3} = \frac{58}{3} = 19\frac{1}{3}$$

Auflösung. a). Nach der Erkl. 207 herrscht bei einer solchen Wage Gleichgewicht, wenn

$$(g + x)\, l = (l + y)\, g \text{ ist.}$$

Die Gewichte der beiden Schalen sind im gegebenen Fall $g = 145$ g und $g + x = 150$ g, während $l + y = 20$ cm ist und l gesucht wird; setzen wir diese Zahlenwerte in die obige Gleichung, so ergibt sich:

$$150 . l = 20 . 145$$

und hieraus erhält man für:

$$l = 19\frac{1}{3} \text{ (siehe Hilfsrechn. 1)}$$

also der Hebelarm, an dem die schwerere Schale hängt, ist nur $19^1/_3$ cm lang.

b). Werden nun die beiden Wagschalen umgewechselt, so wirkt nach Erkl. 207 auf der einen Seite das Moment

$$M_1 = l g$$

auf der anderen aber

$$M_2 = (g + x)(l + y)$$

oder in diese beiden Gleichungen die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$M_1 = 19\frac{1}{3} \cdot 145 \text{ oder } 2803\frac{1}{3}$$

und

$$M_2 = 150 . 20 \text{ oder } 3000$$

folglich ergibt das letztere Moment ein Uebergewicht von

$$3000 - 2803\frac{1}{3} = 196\frac{2}{3} \text{ Centimetergramm}$$

d. h. es muss entweder die an dem 20 cm langen Arm hängende Schale um

$$\frac{196\frac{2}{3}}{20} = 9\frac{5}{6} \text{ g leichter gemacht,}$$

oder die andere an dem $19^1/_3$ cm langen Arm hängende Schale um

$$\frac{196\frac{2}{3}}{19\frac{1}{3}} = 10\frac{20}{57} \text{ g belastet werden.}$$

Hilfsrechnung.

$$2)\ldots \frac{500 \,.\, 20 \,.\, 3}{58} = 30000 : 58 = 517{,}2$$

```
290
---
 100
  58
 ---
  420
  406
  ---
   140
   116
```

c). Wenn aber, ohne dass die Schalen umgewechselt werden, in die leichtere Schale, die also am längeren Hebelarm hängt, 500 g gelegt werden, so müssen nach Erkl. 207 in die andere Schale schon

$$P = \frac{500 \,.\, 20}{19\frac{1}{3}}$$

oder nach Hilfsrechnung 2).:

$$P = 517{,}2 \text{ g}$$

gelegt werden, um Gleichgewicht herzustellen.

Aufgabe 234. Eine Ware wog in der einen Schale einer unrichtigen Krämerwage 228 g, in der anderen 235 g; welches ist ihr richtiges Gewicht?

Hilfsrechnung.

```
228 . 235
---------
    1140
    684
   456
√5|35|80 = 231,47
 4
 ---
4|135
  129
  ---
46|680
   461
   ---
462|21900
    18496
    -----
4628|340400
     324009
```

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 174 ist das richtige Gewicht der Ware:

$$x = \sqrt{228 \,.\, 235}$$

oder:

$$x = \sqrt{53580}$$

oder:

$$x = 231{,}47 \quad \text{(siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. die Ware wiegt 231,47 g.

Aufgabe 235. Bei einer Krämerwage wiege der Wagebalken 285 g, jeder Hebelarm sei 30 cm lang, der Stützpunkt des Balkens liege 0,5 cm über der Verbindungslinie der Aufhängepunkte der beiden Schalen, die Entfernung des Schwerpunkts vom Stützpunkt des Balkens sei 0,8 cm und in jeder Schale liegen 3,84 kg Last. Bei welchem Uebergewicht ergibt sich ein Ausschlagswinkel von $3^0\,25'$?

Hilfsrechnung.

Aus nebenstehender Gleichung ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\alpha\,[b\,(2P + p) + cG] = ap$$

oder:

$$\operatorname{tg}\alpha\,[2bP + bp + cG] = ap$$

oder:

$$2bP \,.\, \operatorname{tg}\alpha + bp \,.\, \operatorname{tg}\alpha + cG \,.\, \operatorname{tg}\alpha = ap$$

oder:

$$ap - bp \,.\, \operatorname{tg}\alpha = 2Pb \,.\, \operatorname{tg}\alpha + cG \,.\, \operatorname{tg}\alpha$$

oder:

Auflösung. Nach der in der Antwort auf die Frage 180 entwickelten Gleichung 1). ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ap}{b\,(2P + p) + c \,.\, G}$$

hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung für die unbekannte Grösse:

$$p = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(2P \,.\, b + c \,.\, G)}{(a - b \,.\, \operatorname{tg}\alpha)}$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte ein, dann ist:

$$p = \frac{\operatorname{tg} 3^0\,25'\,(2 \,.\, 3{,}84 \,.\, 0{,}5 + 0{,}8 \,.\, 0{,}285)}{(30 - 0{,}5 \,.\, \operatorname{tg} 3^0\,25')}$$

oder:

$$p\,(a - b\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha\,(2\,P\,b + c\,G)$$

oder:

$$p = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\,(2\,P\,b + c\,G)}{(a - b\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha)}$$

$$p = \frac{\mathrm{tg}\,3^0\,25'\,(3{,}84 + 0{,}228)}{(30 - 0{,}5\,.\,\mathrm{tg}\,3^0\,25')}$$

oder:

$$p = \frac{\mathrm{tg}\,3^0\,25'\,.\,4{,}068}{(30 - 0{,}5\,.\,\mathrm{tg}\,3^0\,25')}$$

oder:

$$p = \frac{\mathrm{tg}\,3^0\,25'\,.\,4{,}068}{29{,}97015}$$ * (siehe Hilfsrechn. 2)

oder:

$$p = 0{,}0081038$$ (siehe Hilfsrechn. 3)

d. h. das gesuchte Uebergewicht beträgt unter den gegebenen Verhältnissen:

0,0081 kg oder 8,1 Gramm.

2). . $0{,}5\,.\,\mathrm{tg}\,3^0\,25' = \log 0{,}5 + \log \mathrm{tg}\,3^0\,25'$

$$\begin{aligned} \log 0{,}5 &= 0{,}6989700-1 \\ + \log \mathrm{tg}\,3^0\,25' &= 8{,}7759952-10 \\ \hline & 9{,}4749652-11 \\ \text{oder} & 0{,}4749652-2 \end{aligned}$$

mithin ist: $0{,}5\,.\,\mathrm{tg}\,3^0\,25' = 0{,}02985$

$$\begin{aligned} &30 \\ &- 0{,}02985 \\ \hline &= 29{,}97015 \end{aligned}$$

3). $\frac{\mathrm{tg}\,3^0\,25'.\,4{,}068}{29{,}97015} = \log \mathrm{tg}\,3^0\,25' + \log 4{,}068 - \log 29{,}97015$

$$\begin{aligned} \log \mathrm{tg}\,3^0\,25' &= 8{,}7759952-10 \\ + \log 4{,}068 &= 0{,}6093809 \\ \hline & 9{,}3853761-10 \\ - \log 29{,}97015 &= -1{,}4766889 \\ \hline \log p &= 7{,}9086872-10 \\ \text{oder:} & 0{,}9086872-3 \end{aligned}$$

mithin:

num-log p oder $p = 0{,}0081038$

Aufgabe 236. Wenn bei der vorerwähnten Wage der Stützpunkt des Wagebalkens mit den Aufhängepunkten der Schalen in einer geraden Linie läge, dann würde die Wage unter sonst gleichen Verhältnissen bedeutend empfindlicher sein und bei einem Uebergewicht von 8,1 g welchen Ausschlagswinkel geben?

Auflösung. Nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 180 ist:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\,p}{c\,G}$$

Setzen wir in diese Gleichung die oben gegebenen Zahlenwerte, dann ist:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{30\,.\,8{,}1}{0{,}8\,.\,285}$$

oder

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{243}{228}$$

oder:

$$\alpha = 46^0\,49^1/_2{}'$$ (siehe Hilfsrechn.)

Hilfsrechnung.

$$\log \mathrm{tg}\,\alpha = \log 243 - \log 228$$

$$\begin{aligned} \log 243 &= 2{,}3856063 \\ - \log 228 &= -2{,}3579348 \\ \hline \log \mathrm{tg}\,\alpha &= 0{,}0276715 \end{aligned}$$

mithin ist:

$\alpha = 46^0\,49^1/_2{}'$

Aufgabe 237. Wenn bei einer Wage, deren Drehpunkt mit den Aufhängepunkten der Wagschalen in einer geraden Linie liegt und bei der jeder Hebelarm 26 cm lang ist, durch ein Uebergewicht von $^1/_2$ g ein Ausschlagswinkel von 2^0 erzeugt wird und der Schwerpunkt des Wagebalkens 1 cm unter seinem Stützpunkt liegt, wie schwer ist alsdann der Wagebalken nebst Schalen und Schnüren?

Auflösung. Nach Gleichung 2). in Antwort der Frage 180 ist:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\,p}{c\,G}$$

Hieraus erhält man für die unbekannte Grösse:

Hilfsrechnung.

$$\frac{26 \cdot \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} 2^0 . 1} = \frac{13}{\operatorname{tg} 2^0} = \log 13 - \log \operatorname{tg} 2^0$$

$$\begin{aligned} \log 13 &= 1,1139434 \\ -\log \operatorname{tg} 2^0 &= -8,5430838+10 \\ \hline \log G &= 2,5708596 \end{aligned}$$

mithin:
num-log G oder G = 372,27

$$G = \frac{a\,p}{\operatorname{tg} \alpha . c}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$G = \frac{26 \cdot \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} 2^0 . 1}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$G = 372,27$$

d. h. das Gewicht des Wagebalkens nebst Schalen und Schnüren beträgt 372,27 Gramm.

Aufgabe 238. Wenn bei einer sogenannten dänischen Schnellwage von 12 kg Gewicht der Schwerpunkt S vom Aufhängepunkt A der Last genau 1 m entfernt ist und die Wage 68 cm vom Schwerpunkt unterstützt werden muss, ehe sie im Gleichgewicht ist, welche Last befindet sich dann an derselben?

Hilfsrechnung.

1). $e\,(Q + G) = l\,Q$

oder: $e\,Q + e\,G = l\,Q$

oder: $l\,Q - e\,Q = e\,G$

oder: $Q\,(l - e) = e\,G$

oder: $Q = \frac{e\,G}{(l - e)}$

2). $\frac{68 . 12}{100 - 68} = \frac{816}{32}$

oder Zähler und Nenner durch 16 gehoben gibt für

$$Q = \frac{51}{2}$$

Auflösung. Nennt man die Entfernung des Schwerpunktes vom Stützpunkt e, so ist nach Antwort auf Frage 187:

$$e = \frac{l\,Q}{Q + G}$$

und hieraus erhält man für die Unbekannte Q nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$Q = \frac{e\,G}{l - e}$$

Setzt man in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte, so ist:

$$Q = \frac{68 . 12}{100 - 68}$$

oder:

$$Q = 25\frac{1}{2} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 2)}$$

d. h. die Last beträgt $25\,^1/_2$ kg.

Aufgabe 239. Wie gross ist die Empfindlichkeit einer Wage, welche ohne Nachteil für den Balken auf jeder Schale $1\,^1/_2$ kg trägt und bei voller Belastung bei einem Uebergewicht von $2\,^1/_2$ mg noch einen bedeutenden Ausschlag gibt?

Auflösung. Nach Erkl. 210 wird die Empfindlichkeit einer Wage durch einen Bruch ausgedrückt, der das geringste noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht zum Zähler und das Gewicht der grössten noch zulässigen Belastung zum Nenner hat, somit ist in diesem Fall die Empfindlichkeit der Wage:

$$E = \frac{2\frac{1}{2}}{2 . 1\frac{1}{2} \cdot 1000 . 1000}$$

oder:

$$E = \frac{1}{1\,200\,000}$$

Aufgabe 240. Eine Wage trägt auf jeder Schale höchstens 500 g und ist für $\frac{1}{800\,000}$ empfindlich; bei welchem Uebergewicht gibt sie also vollständig belastet noch einen Ausschlag?

Auflösung. Nennen wir das unbekannte Uebergewicht x, so muss, analog der Lösung der vorigen Aufgabe, die Empfindlichkeit der Wage

$$\frac{1}{800\,000} = \frac{x}{2.500.1000}$$

sein. Hieraus ergibt sich für:

$$x = \frac{100\,0000}{80\,0000}$$

oder:

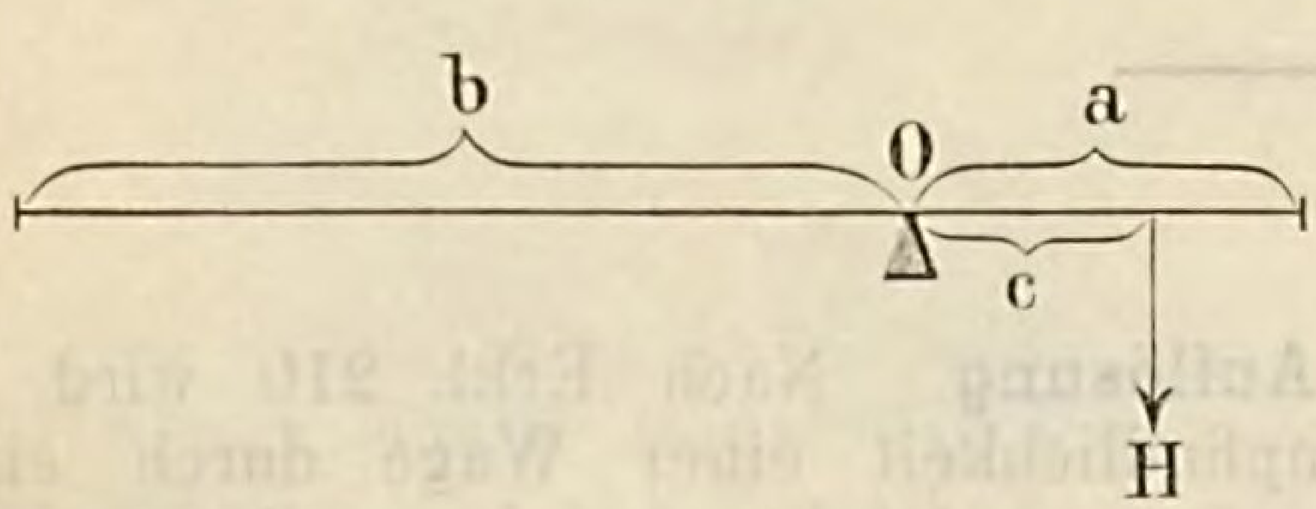
$$x = 1\frac{1}{4}$$

d. h. die Wage gibt bei $1^1/_4$ mg Uebergewicht noch einen Ausschlag.

Aufgabe 241. Ist der Wagebalken einer sog. römischen Schnellwage parallelepipedisch und beträgt die Länge des kürzeren Armes a, die des längeren b und die Entfernung des Hakens für die Last c, das Gewicht des ganzen Balkens G und seine Länge l, wie gross muss dann das Gewicht H des Hakens (nebst Wagschale) sein, wenn die unbelastete Wage im Gleichgewicht stehen soll?

Für die numerische Rechnung sei $b = 90$ cm, $a = 30$ cm, somit $l = a + b = 120$ cm, $c = 20$ cm und $G = 2^1/_2$ kg.

Figur 280.



Auflösung. Fig. 280 veranschaulicht die ganze Aufgabe und erleichtert deren Lösung. Wiegt der kürzere Arm p, der längere q Kilogramm, so besteht die Proportion:

$$a : b = p : q$$

oder:

$$a : \underbrace{a + b} = p : \underbrace{p + q}$$

oder:

$$a : l = p : G$$

woraus:

$$p = \frac{a\,G}{l}$$

denn $a + b$ entspricht der Gesamtlänge l und $p + q$ dem Gesamtgewicht G des Wagebalkens. Ebenso ergibt sich aus der obigen Proportion:

$$\underbrace{a + b} : b = \underbrace{p + q} : q$$

oder:

$$l : b = G : q$$

woraus:

$$q = \frac{b\,G}{l}$$

folglich ist nach dem Gesetz der statischen Momente:

$$\frac{1}{2}ap + cH = \frac{1}{2}bq$$

denn da der Wagebalken überall als von gleichem Querschnitt vorausgesetzt ist, so liegt der Schwerpunkt des Hebelarms a in dessen Mittelpunkt, also in der Entfernung $\frac{1}{2}a$ vom Unterstützungspunkt und aus demselben Grund liegt der Schwerpunkt des Hebelarms b in der Entfernung $\frac{1}{2}b$ vom Stützpunkt, da nun der kürzere Hebelarm das Gewicht p und der längere das Gewicht q

Hilfsrechnungen:

1). Nach nebenstehender Gleichung ist:

$$cH = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 G}{l} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 G}{l}$$

oder:

$$H = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{G}{l}\left(b^2 - a^2\right)}{c}$$

oder:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{l\,c} \cdot G$$

für l kann man aber $a + b$ und für $b^2 - a^2$ kann man $(b + a)(b - a)$ einsetzen, und somit ist:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b + a)(b - a)}{(a + b)\,c} \cdot G$$

oder gleiche Faktoren gegeneinander gehoben:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{c} \cdot G$$

2). . . $\frac{1}{2} \cdot \frac{90 - 30}{20} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{1 \,.\, 60 \,.\, 5}{2 \,.\, 20 \,.\, 2}$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

hat, so ist das Moment des ersteren $\frac{1}{2} a p$, das des letzteren $\frac{1}{2} b q$, diesem letzteren Moment wirkt aber noch das Moment cH entgegen, woraus sich die Richtigkeit der oben aufgestellten Gleichung ergibt. Setzen wir in diese Gleichung die beiden für p und q ermittelten Werte, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2} a \cdot \frac{aG}{l} + cH = \frac{1}{2} b \cdot \frac{bG}{l}$$

oder:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 G}{l} + cH = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 G}{l}$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung für das gesuchte:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{c} \cdot G$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte, so ergibt sich für:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{90 - 30}{20} \cdot 2\frac{1}{2}$$

oder:

$$H = 3\frac{3}{4} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 2)}$$

d. h. das Gewicht des Hakens event. nebst Wagschale beträgt $3^3/_4$ kg.

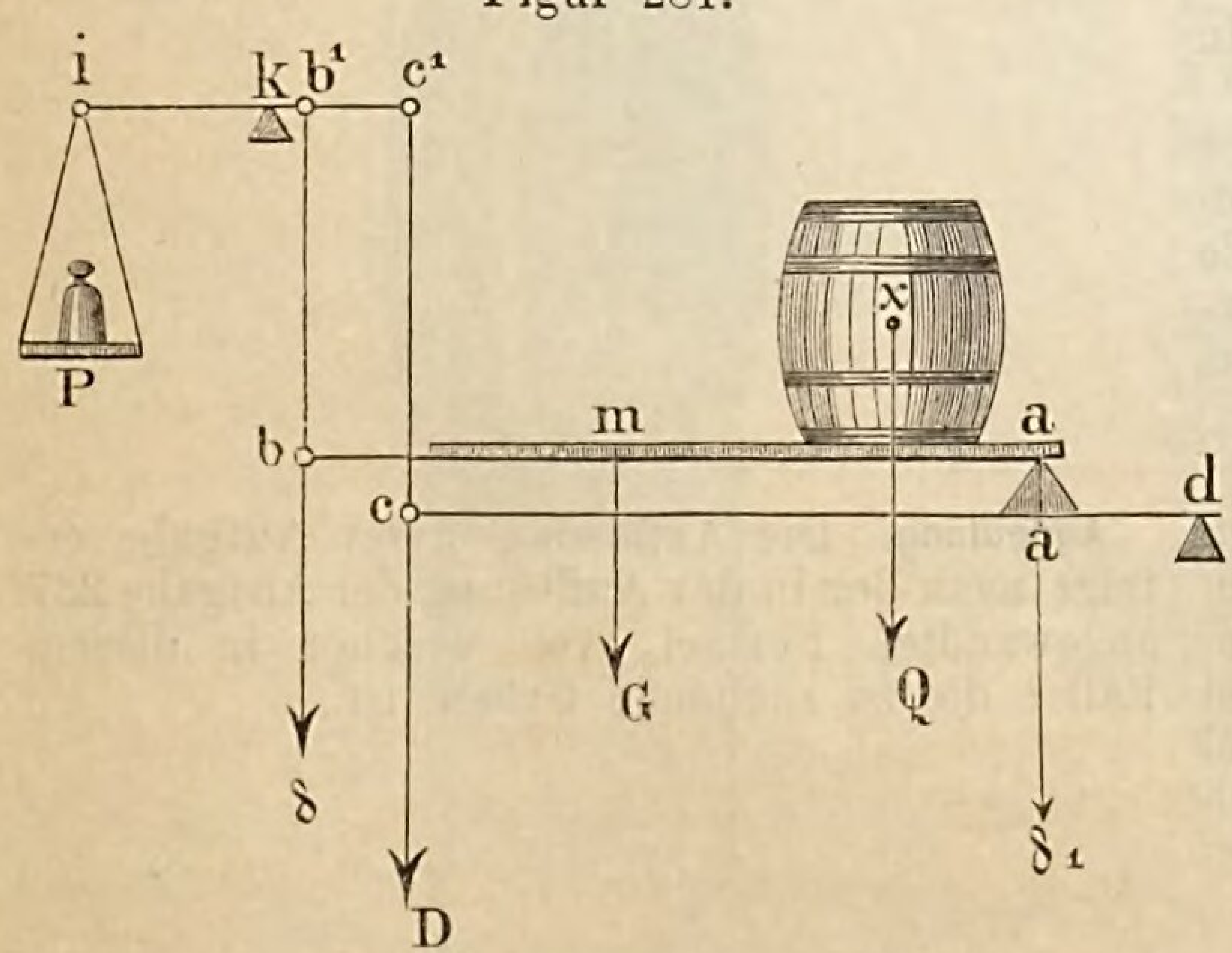
Aufgabe 242. Es liege auf der Brücke einer Brückenwage eine Last von 1260 kg so, dass die Schwerlinie derselben die Brücke in x trifft (s. Fig. 281) und es verhalte sich

$$bx : ax = 4 : 5$$

ferner: $da : dc = kb^1 : kc^1 = 1 : 6$

Es soll bewiesen werden, dass, wenn die leere Schale die unbelastete Brücke im Gleichgewicht hält, das Gewicht soviel Mal kleiner ist, als die abzuwiegende Last, als kb^1 kleiner ist als ki.

Figur 281.



Auflösung. Da sich nach der gestellten Aufgabe $bx : ax = 4 : 5$ verhält, so hat der Punkt a einen Druck von

$$\frac{4}{9} \cdot 1260 = 560 \text{ kg}$$

und der Punkt b einen Druck von

$$\frac{5}{9} \cdot 1260 = 700 \text{ kg}$$

zu erleiden. Diese 700 kg wirken an b^1 abwärtsziehend. Von den 560 kg, die der Punkt a zu tragen hat, ruht der grösste Teil auf Punkt d, und zwar, da sich

$$\overline{da} : \overline{dc} = 1 : 6$$

verhält, so hat der Punkt d:

$$\frac{5}{6} \cdot 560 \text{ kg} = 466\,^2/_3 \text{ kg}$$

der Punkt c resp. c^1 nur:

$$\frac{1}{6} \cdot 560 \text{ kg} = 93\,^1/_3 \text{ kg}$$

zu tragen. Diese in c^1 wirkenden $93^1/_3$ kg wirken ebenso stark abwärtsziehend, als

wenn an dem 6mal kürzeren Hebelarm kb^1 in b^1 eine 6mal so grosse Last, also:

$$6 . 93^1/_3 = 560 \text{ kg}$$

wirken. Man kann also annehmen, dass, anstatt in b^1 700 und in c^1 $93^1/_3$ kg angreifen, in b^1 allein

$$700 + 6 . 93^1/_3 = 700 + 560 \text{ oder } 1260 \text{ kg}$$

abwärtsziehend wirken. Ist nun der andere Arm ik das zehnfache von b^1k, so muss man auf die in i aufgehängte Schale den zehnten Teil der Last auflegen, um Gleichgewicht herzustellen.

ζ). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 243. Es seien bei einer unrichtigen unbelasteten Krämerwage die beiden Schalen nebst ihren Schnüren miteinander im Gleichgewicht und zwar hänge die eine Schale von 109 g Gewicht an einem 26 cm langen Hebelarm, während der andere Hebelarm 26,35 cm lang ist.

a). Wie schwer wird die am zweiten Hebelarm hängende Schale sein?

b). Welches Uebergewicht ergibt sich, wenn die beiden Schalen umgewechselt werden?

c). Wieviel muss in die schwerere Schale gelegt werden, wenn in der leichteren Schale 1 kg liegt und Gleichgewicht herrschen soll?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe erfolgt analog der gelösten Aufgabe 233.

Aufgabe 244. Eine Ware wiegt in der einen Schale einer unrichtigen Krämerwage 458,5 g, während ihr genaues Gewicht 460 g beträgt. Wieviel wird dieselbe Ware in der andern Schale derselben Wage wiegen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe erfolgt analog der gelösten Aufgabe 234, nur ist in diesem Fall die gesuchte Grösse:

$$G_2 = \frac{G^2}{G_1}$$

Aufgabe 245. Bei einer Krämerwage wiege der Wagebalken 200 g, jeder Hebelarm sei 25 cm lang, der Stützpunkt des Balkens liege $7^1/_2$ mm über der Verbindungslinie der Aufhängepunkte der beiden Schalen, die Entfernung des Schwerpunktes vom Stützpunkt des Balkens sei 10 mm und in jeder Schale liegen 500 g.

a). Bei welchem Uebergewicht ergibt sich ein Ausschlagswinkel von 5^0?

b). Wenn aber angenommen wird, dass der Stützpunkt des Wagebalkens mit den Aufhängepunkten der Schalen in einer geraden Linie liegt, während alle übrigen Grössen unverändert bleiben, wie gross würde dann das Uebergewicht sein?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe erfolgt analog den gelösten Aufgaben 235 und 236, nur mit dem Unterschied, dass in b). nicht der Ausschlagswinkel, sondern das Uebergewicht zu ermitteln ist.

Aufgabe 246. Wenn bei einer Wage, deren Drehpunkt mit den Aufhängepunkten der Schalen in einer geraden Linie liegt, jeder Hebelarm 33 cm lang ist und durch ein Uebergewicht von $^1/_4$ g ein Ausschlagswinkel von $3^1/_2{}^0$ entsteht und das Eigengewicht des Balkens nebst Schalen 300 g beträgt, wie tief liegt dann der Schwerpunkt des Balkens unter dessen Stützpunkt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe erfolgt nach der in der Auflösung der Aufgabe 237 angewandten Formel, von welcher in diesem Fall c die zu suchende Grösse ist.

Aufgabe 247. Wenn bei einer sog. dänischen Schnellwage der Schwerpunkt S vom Aufhängepunkt A der Last 80 cm entfernt ist und die Wage 65 cm vom Schwerpunkt unterstützt werden muss, ehe sie einer Last von 39 kg das Gleichgewicht hält, wieviel beträgt dann das Gewicht der Wage?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe erfolgt nach der in der Auflösung der Aufgabe 238 angewandten Formel, nur dass hier G die zu suchende Grösse ist.

Aufgabe 248. Wenn eine Wage bei einer vollen Belastung von 5 kg noch einen Ausschlag bei 0,45 mg Uebergewicht gibt, wie gross ist dann ihre Empfindlichkeit?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 239.

Aufgabe 249. Eine Wage hat 2 kg Belastung, eine Empfindlichkeit $= \frac{1}{1\,536\,000}$; wie gross ist das Uebergewicht?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 240.

Aufgabe 250. Es liege auf der Brücke einer Brückenwage eine Last von 983 kg so, dass die Schwerlinie derselben die Brücke in x trifft (siehe Fig. 281) und es verhalte sich: $bx : ax = 9 : 11$, ferner: $da : dc = kb^1 : kc^1 = 1 : 7$.

Es soll bewiesen werden, dass, wenn die leere Schale die unbelastete Brücke im Gleichgewicht hält, das Gewicht soviel Mal kleiner ist, als die abzuwiegende Last, als kb^1 kleiner ist als ki.

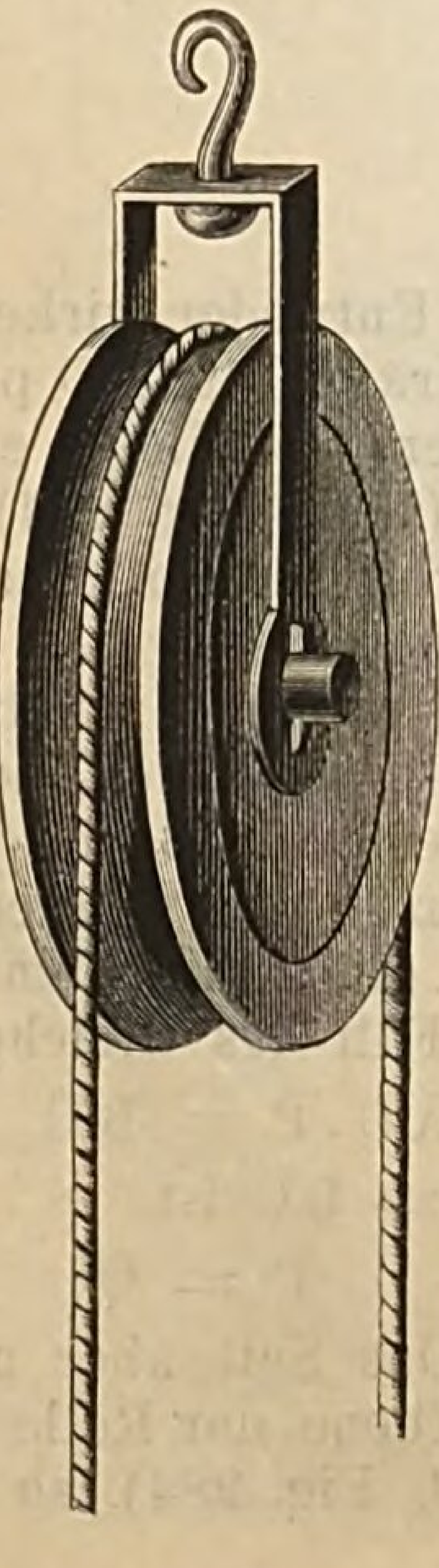
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe erfolgt analog der gelösten Aufgabe 242.

d. Von der Rolle und den Rollenverbindungen.

α). Die feste und lose Rolle.

Frage 195. Was versteht man in der Mechanik unter einer Rolle und welche Arten derselben unterscheidet man?

Figur 282.



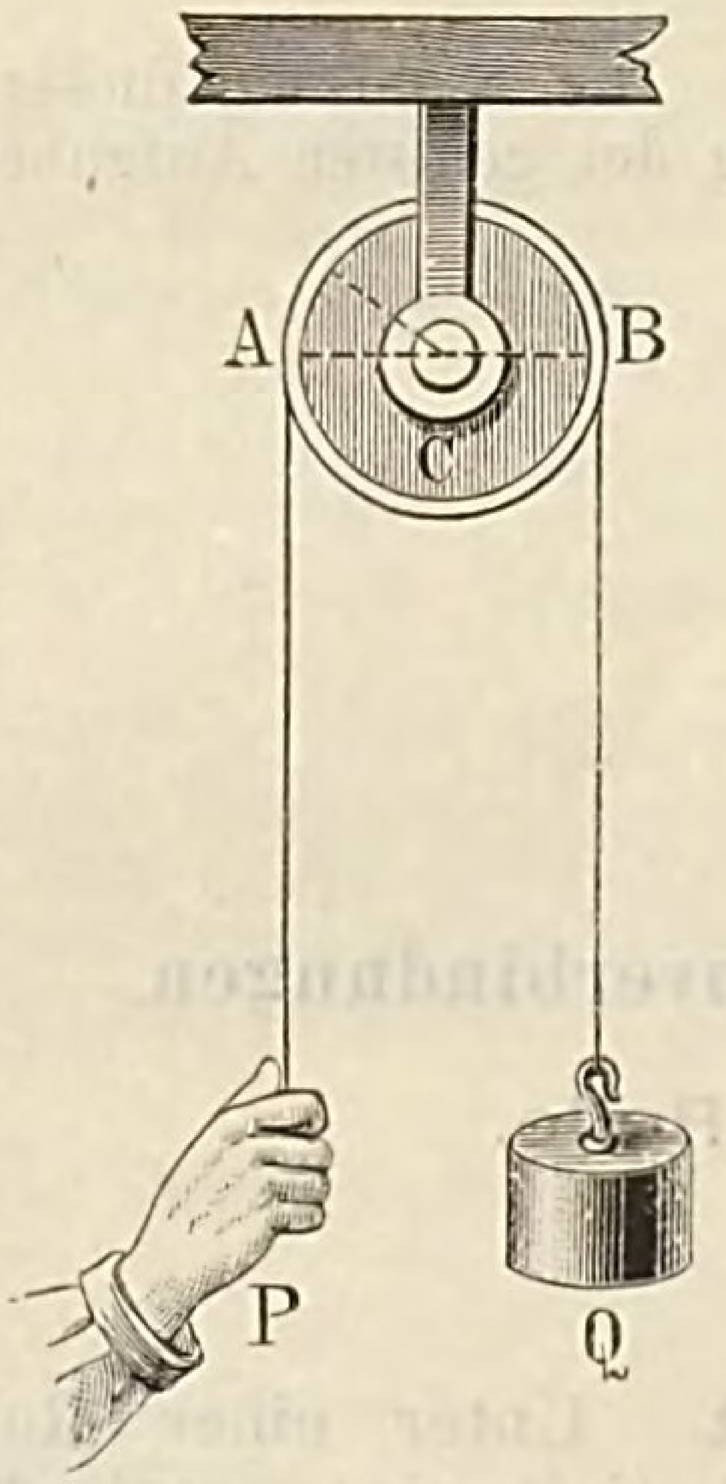
Antwort. Unter einer Rolle versteht man eine kreisförmige, wenig dicke Scheibe von Holz oder Metall, die um eine, senkrecht durch ihren Mittelpunkt gehende Achse drehbar ist und an ihrem Umfang zur Aufnahme von Schnüren, Riemen oder Ketten eine Rinne oder Auskehlung, den sogenannten Schnurlauf, trägt. Die Achse ist entweder fest mit der Rolle verbunden und dreht sich dann beiderseits in Lagern (oder Augen) eines die Rolle umfassenden Gehäuses, welches Schere oder Kloben heisst, oder die Achse ist mit der Schere fest verbunden und geht durch eine im Mittelpunkt der Rolle angebrachte Oeffnung, so dass sich dann die Rolle um diese feste Achse dreht. Ueber die Rolle wird ein Seil gelegt, welches wegen der Ränder der Rinne nicht abgleiten kann, dieselbe vielmehr zum Teil umschliesst und alsdann in tangentaler Richtung an den beiden Endpunkten des vom Seil bespannten Bogens dieselbe verlässt.

Wird die Schere befestigt, so dass die Rolle keine fortschreitende, sondern nur

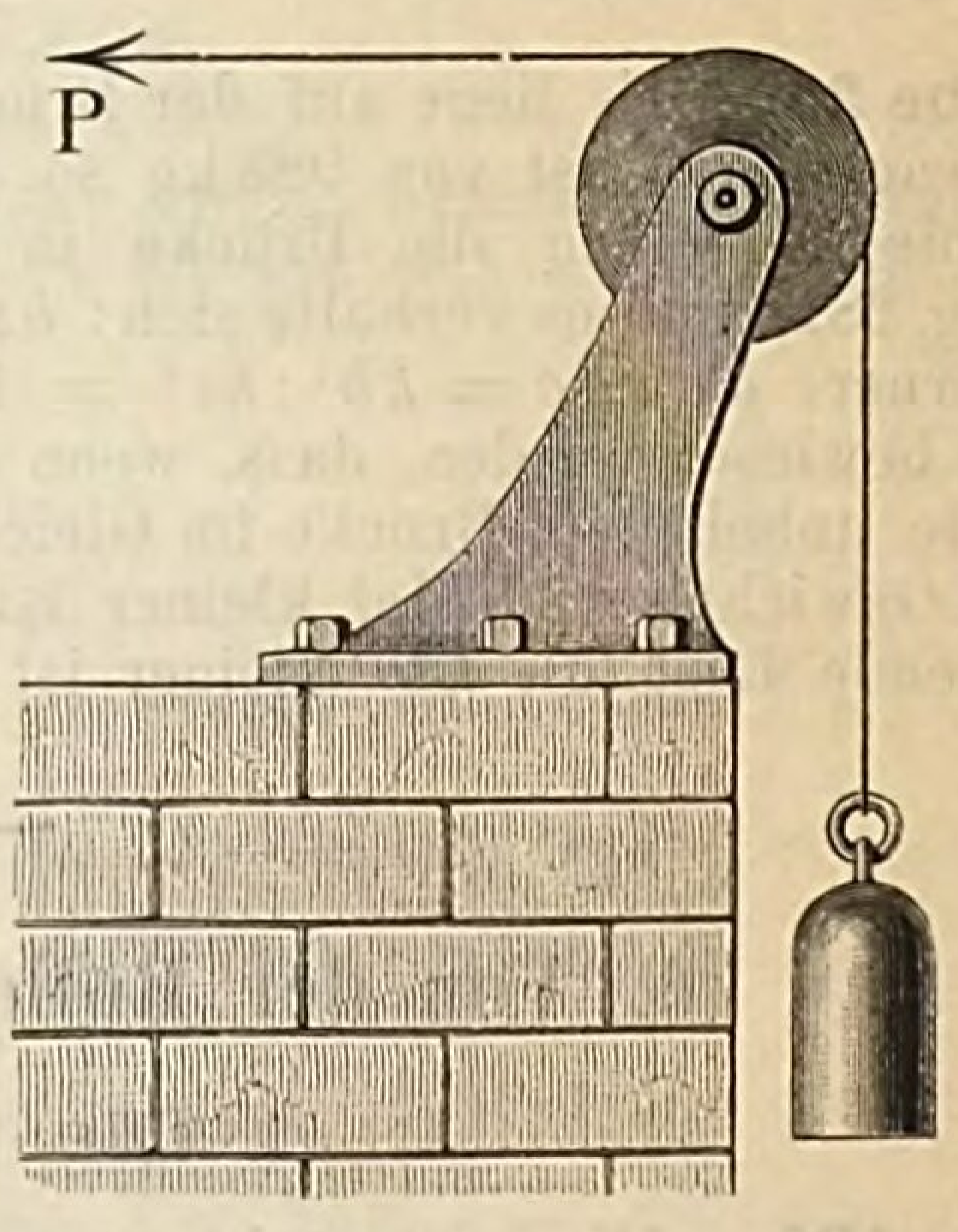
Erkl. 221. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten gelten nicht nur für ein ruhendes, sondern auch für ein in gleichförmiger Bewegung begriffenes System. Bei gleichförmiger Drehbewegung muss die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf die Drehachse gleich Null sein, während bei gleichförmiger fortschreitender Bewegung die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung in die Richtung der fortschreitenden Bewegung fallenden Seitenkräfte gleich Null sein muss.

eine drehende Bewegung annehmen kann, wie in Fig. 283 und 284, so nennt man sie eine feste Rolle; kann sie sich aber ausserdem mit der Achse fortbewegen, so ist sie eine bewegliche oder lose Rolle (Fig. 286). Bei der festen Rolle trägt das Seil an dem einen Ende eine Last Q, während an dem andern Ende eine Kraft P angebracht wird, um der Last das Gleichgewicht zu halten.

Figur 283.



Figur 284.



Frage 196. Welche zwei Fälle sind in Bezug auf die Richtung der beiden wirksamen Kräfte an der festen Rolle möglich und wenn ist die feste Rolle im Gleichgewicht?

Antwort. Entweder wirken an der festen Rolle beide Kräfte P und Q parallel (siehe Fig. 283) oder sie bilden einen Winkel miteinander (siehe Fig. 284), immer aber sucht jede Kraft die Rolle nach ihrer Richtung hin umzudrehen.

Betrachten wir nun zunächst den ersten Fall (Fig. 283), so lassen sich drei Punkte denken, ein fester in C und zwei nach entgegengesetzten Seiten bewegte A und B, wonach also die Rolle zum Hebel gehört und für den Fall des Gleichgewichts

$$\overline{AC} \cdot P = \overline{BC} \cdot Q$$

oder da $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist

$$P = Q$$

sein muss. Das Seil aber mag eine Richtung in der Ebene der Rolle haben, welche es wolle (z. B. Fig. 284), so bildet es alle-

Erkl. 222. Wirken die Kräfte parallel zu einander, so ist die feste Rolle nichts anderes als ein rotierender gleicharmiger gerader Hebel. Wirken die Kräfte unter einem Winkel zu einander, so ist die Rolle anzusehen als ein rotierender Winkelhebel mit gleich langen Schenkeln oder Armen.

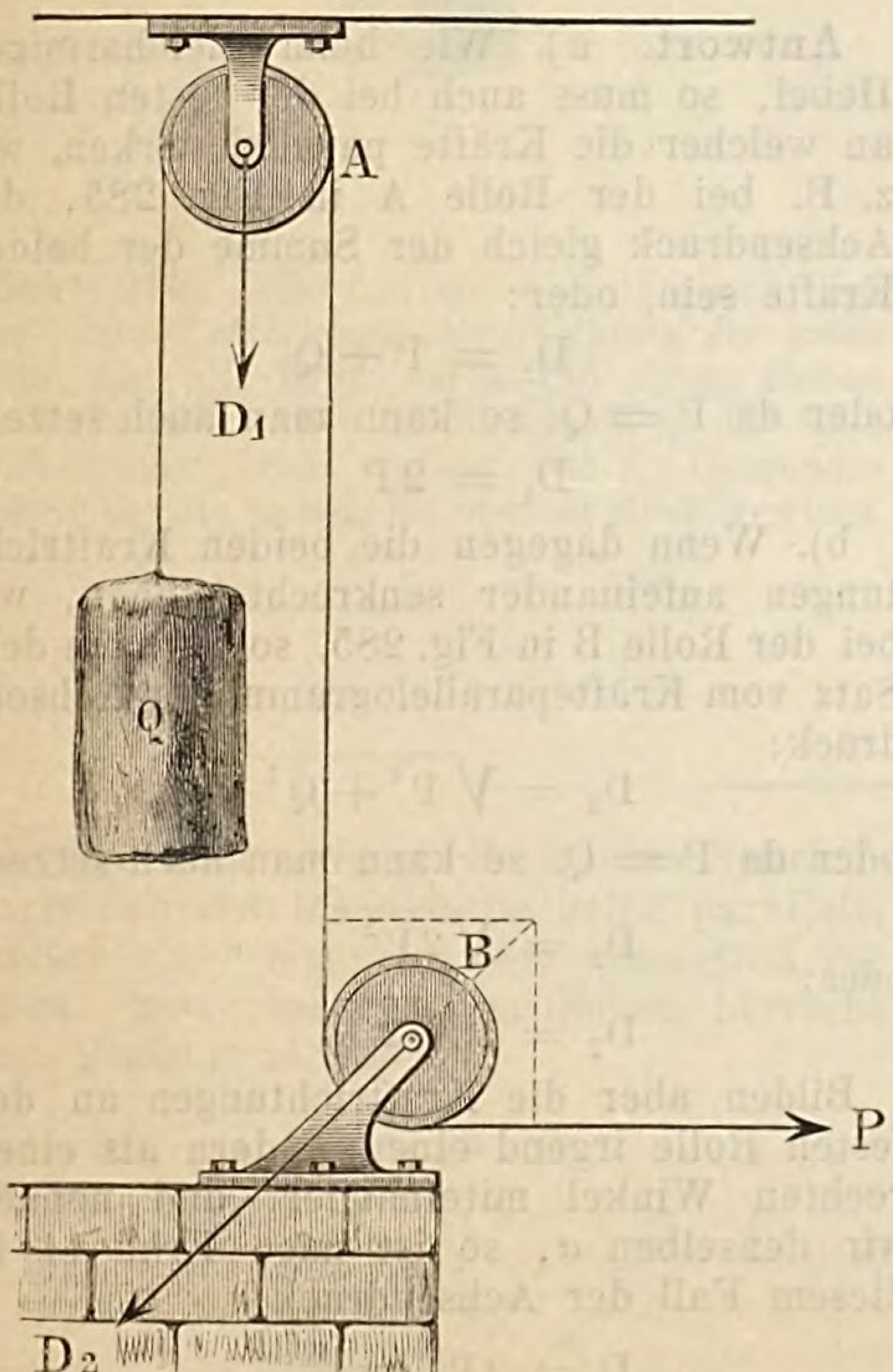
zeit eine Tangente an der Peripherie der Rolle im Angriffspunkt, und demnach ist die Entfernung vom Stützpunkt stets gleich (denn alle Radien eines und desselben Kreises sind gleich gross), weshalb auch, für den Fall, dass die Richtungen der beiden Kräfte P und Q einen Winkel miteinander bilden, für den Zustand des Gleichgewichts

$$P = Q$$

sein muss. Es gilt also allgemein der Satz: Jede feste Rolle ist im Gleichgewicht, wenn die Kraft gleich der Last ist.

Frage 197. Was folgt aus dem vorerwähnten Gesetz in Bezug auf die Kraftersparnis bei Anwendung der festen Rolle und warum findet dieselbe trotzdem so vielfache Verwendung?

Figur 285.



Erkl. 223. Es ist unvorteilhaft und unbequem, die Baumaterialien, als Steine, Mörtel, Hölzer, von der Höhe der Baugerüste aus direkt in der Richtung von unten nach oben hinaufzuziehen; statt dessen bringt man in der Höhe eine feste Rolle an, und zieht mit deren Hilfe vom Boden aus die Gegenstände in der Richtung von oben nach unten in die Höhe. — Ein

Antwort. Die Anwendung einer festen Rolle kann einen Gewinn an Kraft nicht hervorbringen, insofern sich das Verhältnis von Kraft und Last an ihr nicht ändern lässt, vielmehr vermindert sie die Kraft noch um die bei ihr herrschende Reibung und ihr Nutzen besteht nur darin, dass sie die Richtung der Kraft zu ändern und bequemer zu machen gestattet. Sollen nämlich Lasten gehoben werden, so wird die Kraft der Menschen am vorteilhaftesten in senkrecht herabgehender Richtung, die der Pferde in horizontaler angewandt, und selbst tote Körper wirken durch ihr Gewicht bloss in lotrecht herabgehender Richtung, wobei die Rolle das bequemste Mittel abgibt, diese insgesamt auf die angegebene Weise zu benutzen, ohne dass an Geschwindigkeit etwas verloren geht. Die feste Rolle dient also niemals zur Kraftersparnis, sondern nur zur Abänderung der Kraftrichtung und heisst daher auch Leitungsrolle oder Richtungsrolle.

Pferd ist nicht im stande, ohne Beihilfe einer besonderen Vorrichtung Lasten vertikal in die Höhe zu heben; gleichwohl ist es in vielen Fällen vorteilhaft, zur Hinaufschaffung schwerer Lasten auf bedeutende Höhen Pferdekräfte anzuwenden. In solchen Fällen hat man nur nötig, die zu bewegende Last an einem Seile zu befestigen (siehe Fig. 285), dasselbe um eine in der Höhe angebrachte feste Rolle zu schlingen, das freie vertikal herabhängend Ende um eine zweite auf dem Boden befestigte Rolle zu legen, und an das nun wagerecht gerichtete Seilende das Pferd anzuspannen. Indem letzteres in wagerechter Richtung auf der Erde fortschreitet, zieht es die Last vertikal in die Höhe.

Ferner findet die feste Rolle Anwendung bei Thüren, um durch ein senkrecht abwärts ziehendes Gewicht der Thüre eine wagerechte Bewegung zu geben. Beim Rammklotz (s. Fig. 1) läuft das Seil über eine feste Rolle, und Kronleuchter, Rouleaux, Lampen, Vogelkäfige u. dergl. m. sind in ähnlicher Weise befestigt.

Frage 198. Wie gross ist der Achsendruck bei der festen Rolle: a). wenn die Kräfte parallel wirken, b). wenn die Kraftrichtungen einen Winkel bilden?

Antwort. a). Wie beim gleicharmigen Hebel, so muss auch bei der festen Rolle, an welcher die Kräfte parallel wirken, wie z. B. bei der Rolle A in Fig. 285, der Achsendruck gleich der Summe der beiden Kräfte sein, oder:

$$D_1 = P + Q$$

oder da $P = Q$, so kann man auch setzen:

$$D_1 = 2P$$

b). Wenn dagegen die beiden Kraftrichtungen aufeinander senkrecht stehen, wie bei der Rolle B in Fig. 285, so ist nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm der Achsendruck:

$$D_2 = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

oder da $P = Q$, so kann man auch setzen:

$$D_2 = \sqrt{2P^2}$$

oder:

$$D_2 = P\sqrt{2}$$

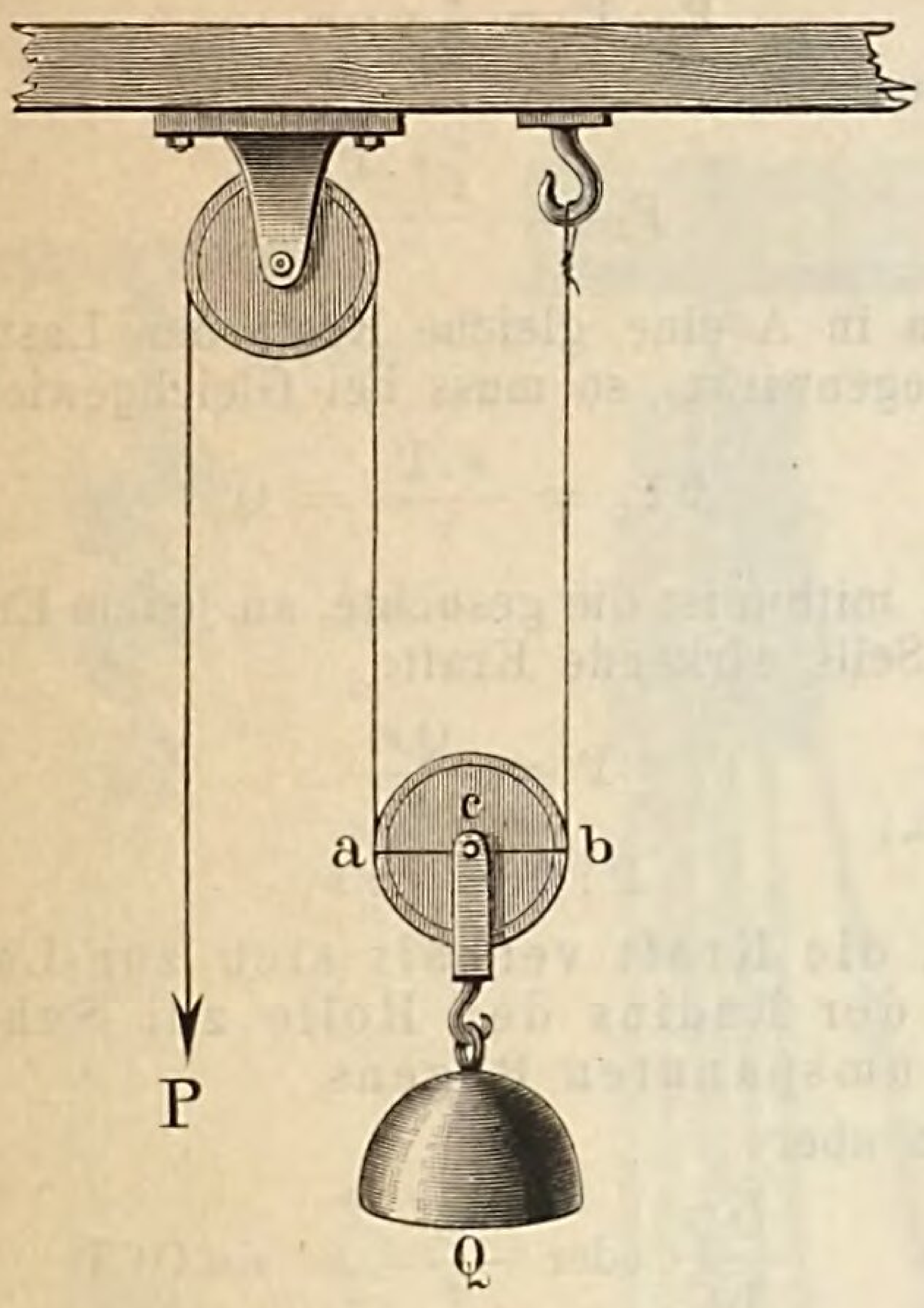
Bilden aber die Kraftrichtungen an der festen Rolle irgend einen andern als einen rechten Winkel miteinander, und nennen wir denselben α, so ist nach Erkl. 44 in diesem Fall der Achsendruck:

$$D = 2P \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

Frage 199. Wodurch unterscheidet sich die lose Rolle von der festen Rolle, und wann herrscht bei derselben Gleichgewicht?

Antwort. Während die feste Rolle nur zu einer Richtungsänderung der Kraft benutzt werden kann, dient die lose oder bewegliche Rolle zur Ersparung von

Figur 286.



Erkl. 224. Wie überall, so zeigt auch hier eine kurze Betrachtung der Wirkung der losen Rolle, dass die Kraft bei irgend einem Heben der Last gerade den doppelten Weg der Last machen muss; man verliert also an Geschwindigkeit gerade soviel, als man an Kraft gewinnt.

Kraft. Dieselbe lagert mit ihrer Achse c (Fig. 286) in einer Hülse, die nach unten in einen Haken endigt und an diesem die Last Q trägt. Das Seil wird an einem Balken befestigt, läuft herab um die Rolle und wieder nach oben, wo es gewöhnlich über eine feste Rolle geht, an welcher dann erst die Kraft P wirkt. Sind die beiden Seilenden, zwischen denen die lose Rolle hängt, einander parallel, so ist die lose Rolle im Gleichgewicht, wenn die Kraft die Hälfte der Last beträgt, wenn man das Gewicht der Rolle und die Reibung nicht in Rechnung bringt, denn die Rolle wirkt wie ein ungleicharmiger einseitiger Hebel. Der Durchmesser ab der Scheibe (Fig. 286) ist der Hebelarm, der Berührungspunkt b des festen Seilendes mit der Rolle der Stützpunkt, der Berührungspunkt a des beweglichen Endes der Angriffspunkt der Kraft P und der Mittelpunkt c der Scheibe der Angriffspunkt der Last. Folglich muss für den Fall des Gleichgewichts:

$$P \cdot \overline{ab} = Q \cdot \overline{bc}$$

sein. Da aber der Kraftarm $\overline{ab}$ doppelt so gross als der Lastarm $\overline{bc}$ ist, so kann obige Gleichung auch lauten:

$$2 \cdot P = 1 \cdot Q$$

oder:

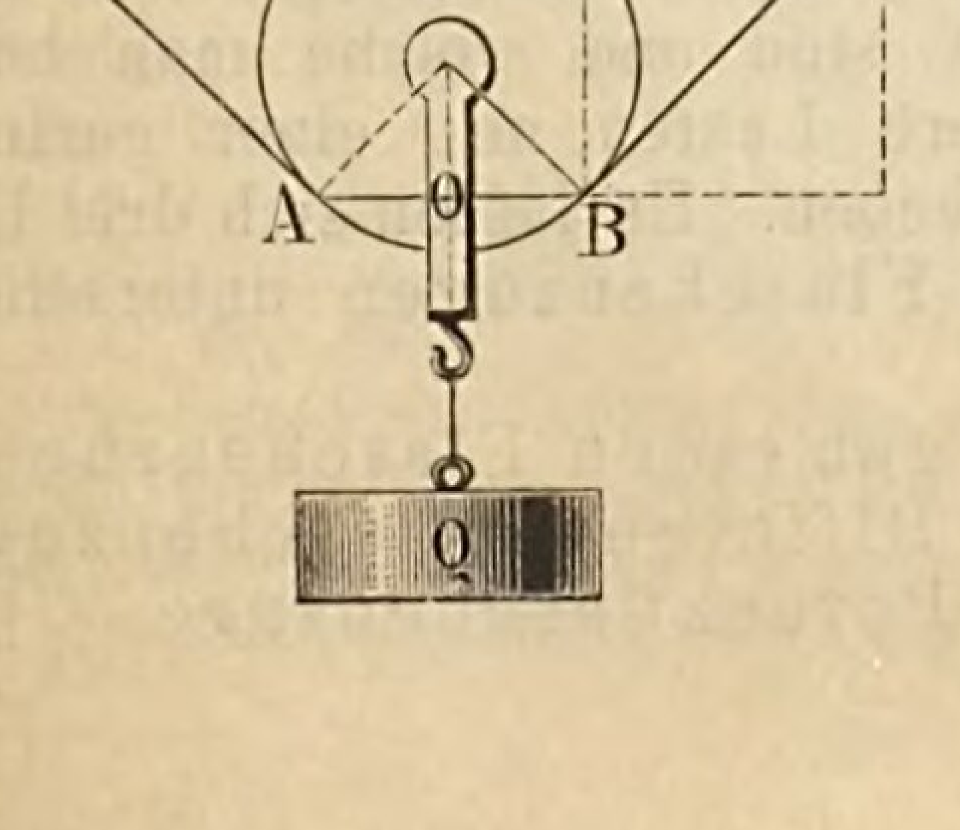
$$P : Q = 1 : 2$$

Sonach gewinnt man durch die lose Rolle immer die Hälfte der Kraft, d. h. vermittelst irgend einer Kraft kann man immer eine doppelt so grosse Last im Gleichgewicht erhalten [1]).

[1]) Siehe Erkl. 224.

Frage 200. Wenn die beiden Seilrichtungen an der losen Rolle keine parallele, sondern eine gegeneinander geneigte Lage haben, unter welchen Umständen herrscht dann Gleichgewicht?

Figur 287.



Antwort. Wenn die beiden Seilrichtungen nicht eine parallele, sondern gegeneinander geneigte Lage haben, so ändert sich das oben erwähnte Verhältnis, wie leicht einzusehen ist, dahin, dass die aufzuwendende Kraft um so grösser werden muss, je flacher der Winkel wird, in welchem die beiden Kraftrichtungen aufeinanderstossen.

Die gesuchten, in den Punkten A und B (siehe Fig. 287) angreifenden gleichen Kräfte P P kann man in je zwei Seitenkräfte zerlegen, deren eine in der Richtung der Sehne AB wirkt und durch eine gleiche entgegengesetzte in A aufgehoben wird, und deren andere P_1 senkrecht dazu wirkt und hier allein in Betracht kommt. Setzt man BC als Radius $= r$,

Erkl. 225. Indem $\sin\frac{1}{2}\alpha$ stets kleiner als $\sin 90^0$ oder als 1 ist, so muss in dem Fall, dass die Seile einander nicht parallel sind, die Kraft, welche einer Last = 1 das Gleichgewicht halten soll, stets grösser sein als $^1/_2$. Ist z. B.:

$$\frac{1}{2}\alpha = 30^0$$

so ist:

$$2 . \sin\frac{1}{2}\alpha = 1$$

(s. Lösung der Aufgabe 16), mithin die Kraft der Last gleich. In diesem Fall ist der Winkel beider Seile, wenn deren Richtungen bis zum Durchschnitt miteinander verlängert gedacht werden, = 120^0 und bei diesem hört der Vorteil der beweglichen Rolle ganz auf. Wird aber der Winkel noch grösser, so muss auch die Kraft grösser und unendlich werden, wenn der Winkel $\alpha = 180^0$ beträgt, weshalb es keine Kraft gibt, die dazu hinreicht, ein Seil völlig gerade zu spannen, wenn dasselbe mit irgend einer Last beschwert ist.

Für den Fall, dass die Richtungen der beiden gleichen Kräfte $P_1 P$ senkrecht zueinander stehen, ist:

$$s = r\sqrt{2}$$

und folglich:

$$P = \frac{Qr}{r\sqrt{2}}$$

oder:

$$P = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

und AB als Sehne = s, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BCO und BP_1P:

$$P_1 : P = \frac{1}{2}s : r$$

woraus

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2}s . P}{r}$$

Da in A eine gleiche Kraft der Last Q entgegenwirkt, so muss bei Gleichgewicht:

$$2 P_1 = \frac{s . P}{r} = Q$$

sein, mithin ist die gesuchte, an jedem Ende des Seils wirkende Kraft:

$$P = \frac{Qr}{s}$$

d. h.:

$$P : Q = r : s$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie der Radius der Rolle zur Sehne des umspannten Bogens.

Da aber:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} \text{ oder } \frac{\frac{1}{2}s}{r} = \sin OCB$$

ist, so ist, wenn $r = 1$ gesetzt wird:

$$s = 2 . \sin OCB$$

oder wenn der Zentriwinkel:

$$ACB = \alpha$$

genannt wird, so ist:

$$s = 2 . \sin\frac{1}{2}\alpha$$

und somit:

$$P : Q = 1 : 2 . \sin\frac{1}{2}\alpha \quad ^{1)}$$

[1]). Siehe Erkl. 225.

β). Die Rollen- und Flaschenzüge.

Frage 201. Was versteht man im allgemeinen unter Rollen- und Flaschenzügen, wozu dienen dieselben und welche Hauptarten derselben unterscheidet man?

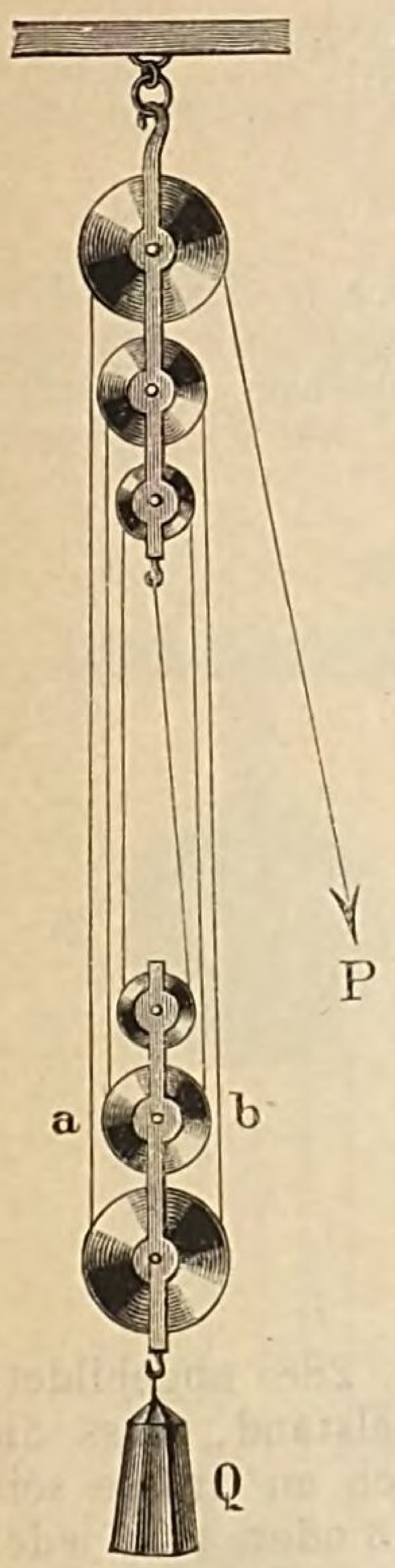
Antwort. Unter Rollen- und Flaschenzügen versteht man im allgemeinen mechanische Vorrichtungen, welche aus mehreren festen und losen Rollen und Seilen zusammengesetzt sind und welche man benützt, um grössere Lasten mit einer geringeren Kraft zu heben. Es lassen sich drei Hauptarten von Flaschenzügen unterscheiden, nämlich:

a). die gemeinen Flaschenzüge,
b). der Differentialflaschenzug,
c). die Potenzflaschenzüge.

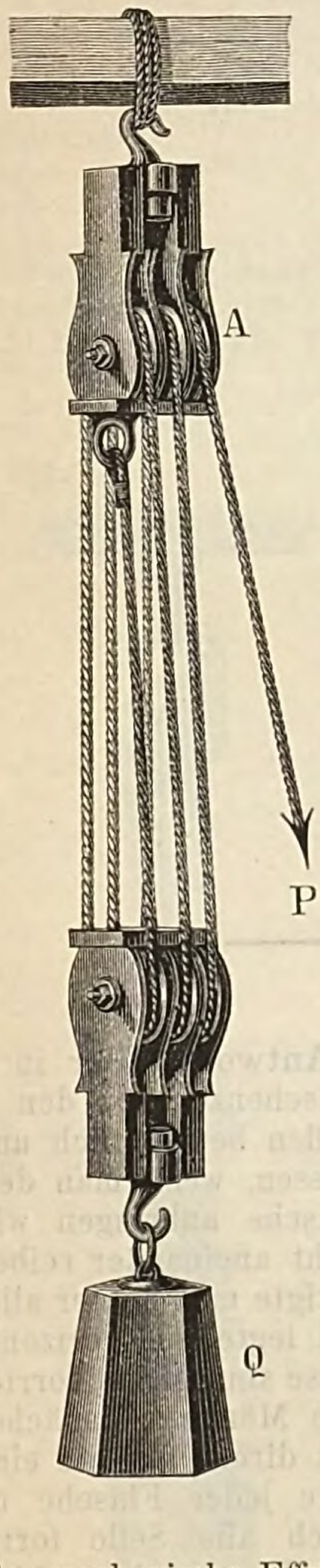
Erkl. 226. Der Flaschenzug ist eine seit den ältesten Zeiten bekannte und bis auf die neueste Zeit herab allgemein angewandte einfache Maschine. Als Erfinder derselben wird der grosse Mathematiker und Physiker *Archimedes* aus Syrakus (287—212 v. Chr.) angenommen und der römische Architekt *Vitruvius*, welcher in den Jahren 16—13 v. Ch. unter anderem auch über Mechanik schrieb, redet von diesem Werkzeug als einem bekannten.

Frage 202. Wie ist der gemeine Flaschenzug eingerichtet und wenn findet an demselben Gleichgewicht statt?

Figur 288.



Figur 289.



Erkl. 227. Obgleich der mechanische Effekt der Flaschenzüge mit der Zahl der Rollen zunimmt, so beträgt dieselbe bei den gewöhnlichen Flaschenzügen gar häufig nur zwei in jeder Flasche, weil jederzeit ein um so längeres, mithin kostspieligeres Seil nötig ist, je grösser die Anzahl der Rollen ist, und weil dann auch bei gleicher Geschwindigkeit des Zuges am Seil die Lasten langsamer gehoben werden, abgesehen davon, dass die Seile durch den Einfluss der atmosphärischen Feuchtigkeit aufgedreht werden uud sich am unbelastet hängenden Flaschenzug nicht selten so ineinander wirren, dass sie nur mit vieler Mühe auseinander gebracht wer-

Antwort. Der gemeine oder gewöhnliche Flaschenzug besteht aus mehreren festen und losen Rollen, die entweder neben- oder übereinander zu 2 bis 4 in metallenen oder hölzernen Kloben oder Flaschen drehbar befestigt sind. Liegen die Rollen übereinander (siehe Fig. 288), so sind dieselben nach dem Ende der Schere hin von abnehmender Grösse, damit die nebeneinander herlaufenden Tauteile sich nicht aneinander reiben. Liegen die Rollen nebeneinander (siehe Fig. 289), so nehmen die Flaschen weniger Raum ein, weshalb man diese Konstruktion der ersteren vorzieht.

Zwei solcher Flaschen, eine obere feste und eine untere bewegliche bilden einen Flaschenzug. Das Zugtau wird an einem Haken der oberen Flasche befestigt und dann abwechselnd über je eine Rolle der unteren und der oberen Flasche gezogen. Das von der letzten Rolle kommende freie Seilende wird entweder zu einer Winde geführt und durch Umdrehen dieser, oder auch unmittelbar durch irgend eine Kraft P angezogen. Die Last Q wird an der unteren Flasche befestigt, die sich mit ihr hebt, wenn das Tau angezogen wird. Enthält nun z. B. jede Flasche 3 Rollen, so wird die Last durch 6 Teile des Taues getragen, verteilt sich daher gleichmässig auf 6 Taue, so dass jedes durch $^1/_6$ der Last Q straff gespannt wird. Wird nun die Last Q durch die Kraft P um einen bestimmten Weg s gehoben, so verkürzt sich jedes Seilstück um denselben Weg s, weshalb bei 6 Seilstücken die Gesamtverkürzung $6s$, oder bei n Seilstücken ns beträgt. Dieser Weg muss von der ganzen Kraft P durchlaufen werden, weshalb die positive Arbeit der Kraft $= Pns$, die negative der Last $= Qs$ ist und demnach findet Gleichgewicht statt, wenn $Pns = Qs$ oder

$$P = \frac{Qs}{ns} = \frac{Q}{n}$$

d. h. am Flaschenzug findet Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie 1 zur Anzahl der Lastseile, abgesehen von der Reibung, die bei diesem Apparat ziemlich gross ist und um so bedeutender wird, je grösser die Anzahl der Rollen ist, so dass bei vielen Rollen in einer Flasche kaum noch ein mechanischer Kraftgewinn möglich ist.

den können, insbesondere wenn sie zahlreich und die nächsten Rollen klein von Durchmesser sind. Endlich ist bei einer grösseren Zahl von Rollen die Länge beider Flaschen zusammengenommen und die beträchtlichere Höhe, in welcher deshalb die obere Flasche befestigt werden muss, nicht ganz unbedeutend.

Erkl. 228. Das in nebenstehender Antwort enthaltene Gesetz wird auch oft folgendermassen ausgedrückt:

Am Flaschenzug findet Gleichgewicht statt, wenn die Last gleich ist der Kraft multipliziert mit der doppelten Anzahl der in einer Flasche befindlichen Rollen oder:

$$Q = 2nP \quad \text{und} \quad P = \frac{Q}{2n}$$

in dieser Formel bedeutet n die Anzahl der in einer Flasche befindlichen Rollen. Wird das Seil an der unteren losen Flasche befestigt, so übertrifft die Anzahl der festen Rollen die der losen um 1, man nennt den Flaschenzug dann einen unsymmetrischen, und wenn derselbe in der unteren Flasche n Rollen hat, so ist dann:

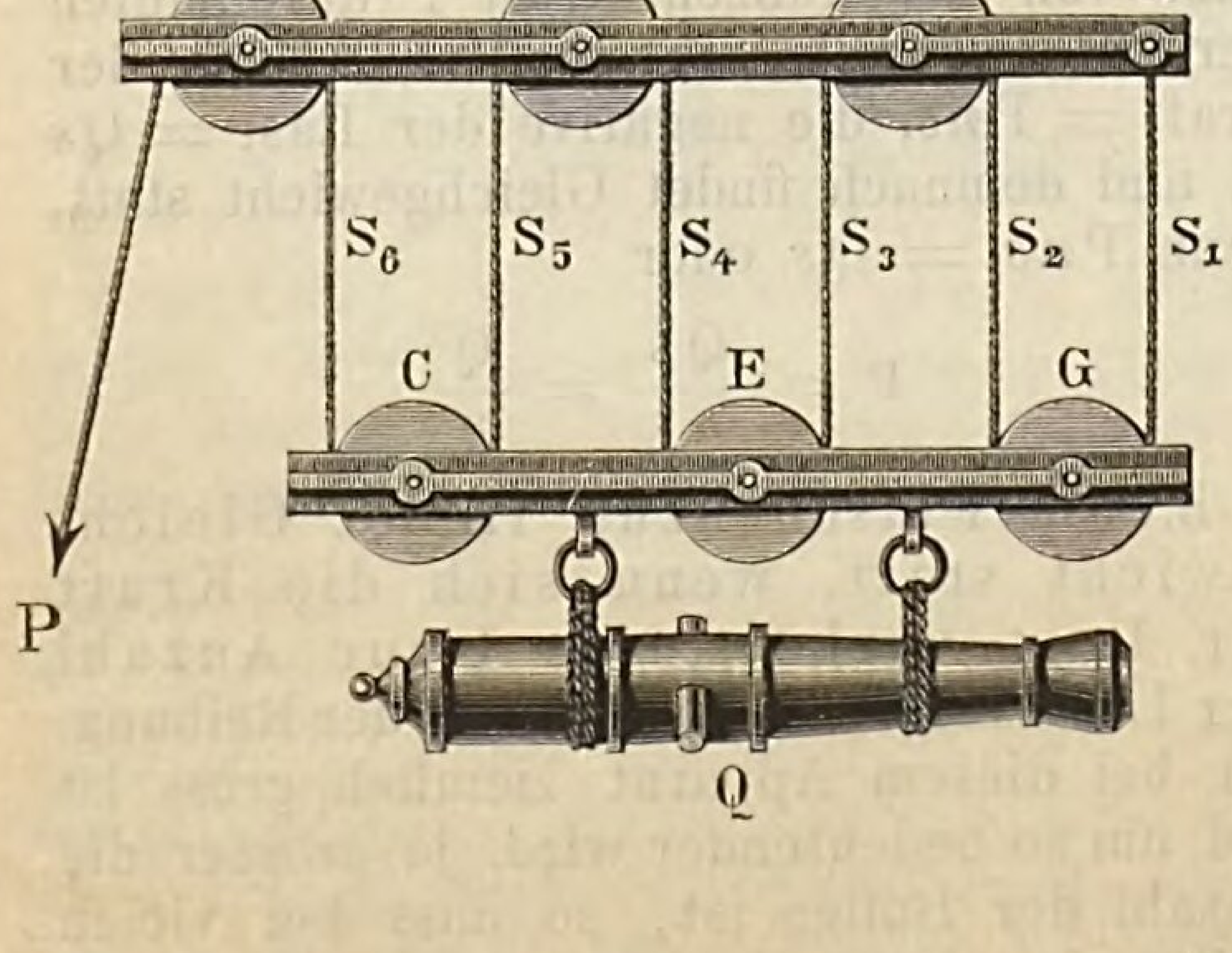
$$P = \frac{Q}{2n+1}$$

Ist G das Gewicht der unteren Flasche, so ist:

$$P = \frac{Q+G}{2n} \quad \text{resp.} \quad \frac{Q+G}{2n+1}$$

Frage 203. Mit welchen Unbequemlichkeiten sind die eben beschriebenen Flaschenzüge behaftet und wie suchte man dieselben zu beseitigen?

Figur 290.



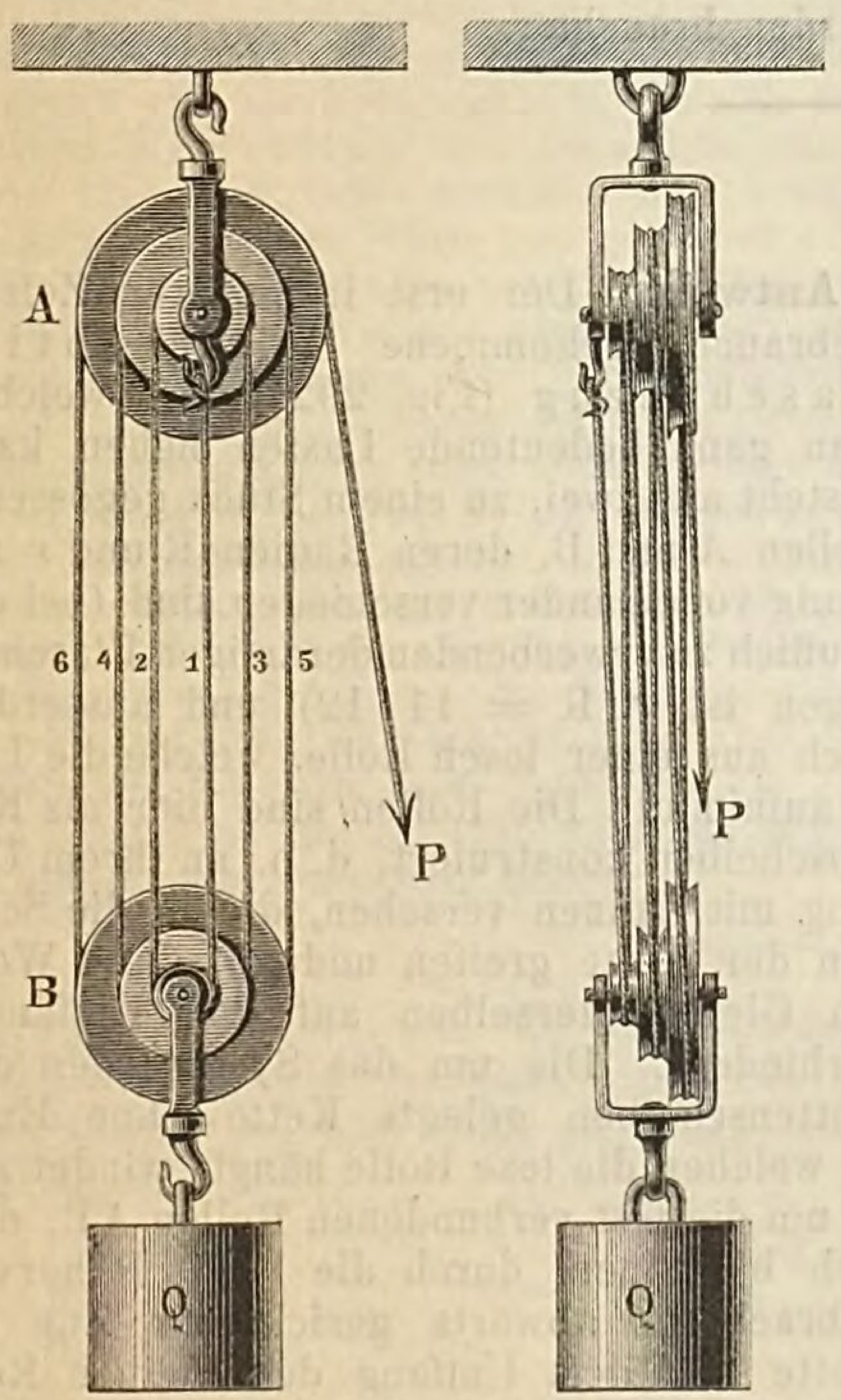
Antwort. Der in Fig. 288 abgebildete Flaschenzug hat den Uebelstand, dass die Rollen beträchtlich ungleich an Grösse sein müssen, wenn man deren 3 oder 4 in jeder Flasche anbringen will und die Seile sich nicht aneinander reiben sollen, und deshalb fertigte man später alle Rollen gleich gross und legte sie horizontal nebeneinander. Diese sinnreiche Vorrichtung hat aber auch ihre Mängel: Zunächst wirkt der Zug am Seil direkt auf die eine Rolle an der einen Seite jeder Flasche und bis derselbe sich durch alle Seile fortpflanzt, kommen die Flaschen in eine schiefe Richtung, wodurch die Wirksamkeit des Apparats gehindert wird. Ferner sind alle Rollen auf einer einzigen Achse befestigt, weshalb man die beiden Backen der Flaschen oben und unten mit einem hinlänglich starken Querstück verbinden und jede Rolle von der andern durch ein hiergegen gestütztes Blech von erforderlicher Dicke trennen muss, wenn die Achse sich nicht biegen soll. Um nun diesen Uebelständen abzuhelfen und um auch die Reibung zu vermindern, welche die einzelnen Rollen an den berührenden Ble-

Erkl. 229. In Fig. 290 ist die Konstruktion eines Flaschenzugs veranschaulicht, bei welchem die feste Flasche horizontal befestigt ist und die lose Flasche in derselben Verticalebene horizontal darunter durch die Seile gehalten wird. Aus der Zeichnung ist die Einrichtung so deutlich zu erkennen, dass jede weitere Beschreibung überflüssig erscheint. Auch für diesen Flaschenzug gilt das Gesetz:

$$P = \frac{Q}{n}$$

worin n die Zahl der Seilstücke, mit Ausnahme desjenigen Stückes, an welchem die Kraft P direkt wirkt, bedeutet. In Bezug auf Fig. 290 würde $n = 6$ sein.

Figur 291.



Erkl. 230. Obgleich die Idee, welche der in nebenstehender Antwort beschriebenen Konstruktion des Flaschenzugs zu Grunde liegt, im ganzen sinnreich ist und die hinzukommende Dicke des Seils das Prinzip nicht abändert, so erfordert dieser Flaschenzug doch eine genaue Fabrikation, ein ganz gleichmässiges Ausschleifen der Rinnen, und weil ausserdem die bewegende Kraft auf die eine Seite desselben wirkt, er daher leicht schief gezogen wird, die Seile sich ausserdem da, wo die Durchmesser der Vertiefungen kleiner sind, leicht verwirren chen der Kloben erleiden, gab *J. White* dem Flaschenzug eine Einrichtung, worin er die beiden oben erwähnten Arten zu vereinigen suchte. Zu diesem Zweck wandte er statt einer beliebigen Anzahl einzeln beweglicher Rollen einen Kegel mit eingeschnittenen Rinnen an, befestigte diesen statt der Flasche in einem Bügel, und zwei der letzteren von gleicher Beschaffenheit ersetzten dann den vollständigen Flaschenzug. Aus Fig. 291 ist ersichtlich, dass das erste Ende des Seils an dem einen Ende des obern Bügels befestigt ist, dann um die schmale Rinne des unteren Kegels läuft und von hier abwechselnd um die grösseren des oberen und unteren Kegels, bis das letzte Ende desselben die äusserste dickste Seite des Kegels umschlingt. Um die hierbei zu Grunde liegende Theorie zu verstehen, darf man sich nur vorstellen, dass jede einzelne Rinne jedes Kegels eine für sich bewegliche Rolle von abnehmendem Durchmesser bildet. Wird nun das letzte Ende des Seils mit der erforderlichen Kraft P herabgezogen, so werden alle Seile zwischen der gesamten Zahl der Rollen verkürzt, alle Verkürzungen der gesamten Seile laufen aber über die letzte Rolle, über die nächstfolgende läuft eine weniger, über die dann zunächstfolgende wieder eine weniger u. s. f., bis ans entgegengesetzte Ende der kegelförmig aneinander gereihten Rollen.

Wenn nun die Peripherien und somit auch die Durchmesser der einzelnen Rollen im gleichen Verhältnis abnehmen, als die über sie laufenden Seillängen, so wird die Zahl ihrer Umläufe gleich sein, und man darf sie also fest miteinander verbinden oder statt ihrer einen Kegel mit Rinnen anwenden. Man darf also nur den Kegel von beliebiger Höhe in soviel gleich hohe Teile abteilen, als er einzelne Rollen ersetzen soll, ihn bei jeder Abteilung cylindrisch abdrehen und in alle diese cylindrischen Teile Vertiefungen von gleicher Tiefe einschneiden; zwei solche ganz gleiche Systeme von wachsenden Cylindern mit ihren Achsen in den Bügeln befestigen und das Seil auf die angegebene Weise über die entstandenen Vertiefungen schlingen, so ist der Flaschenzug hergestellt.

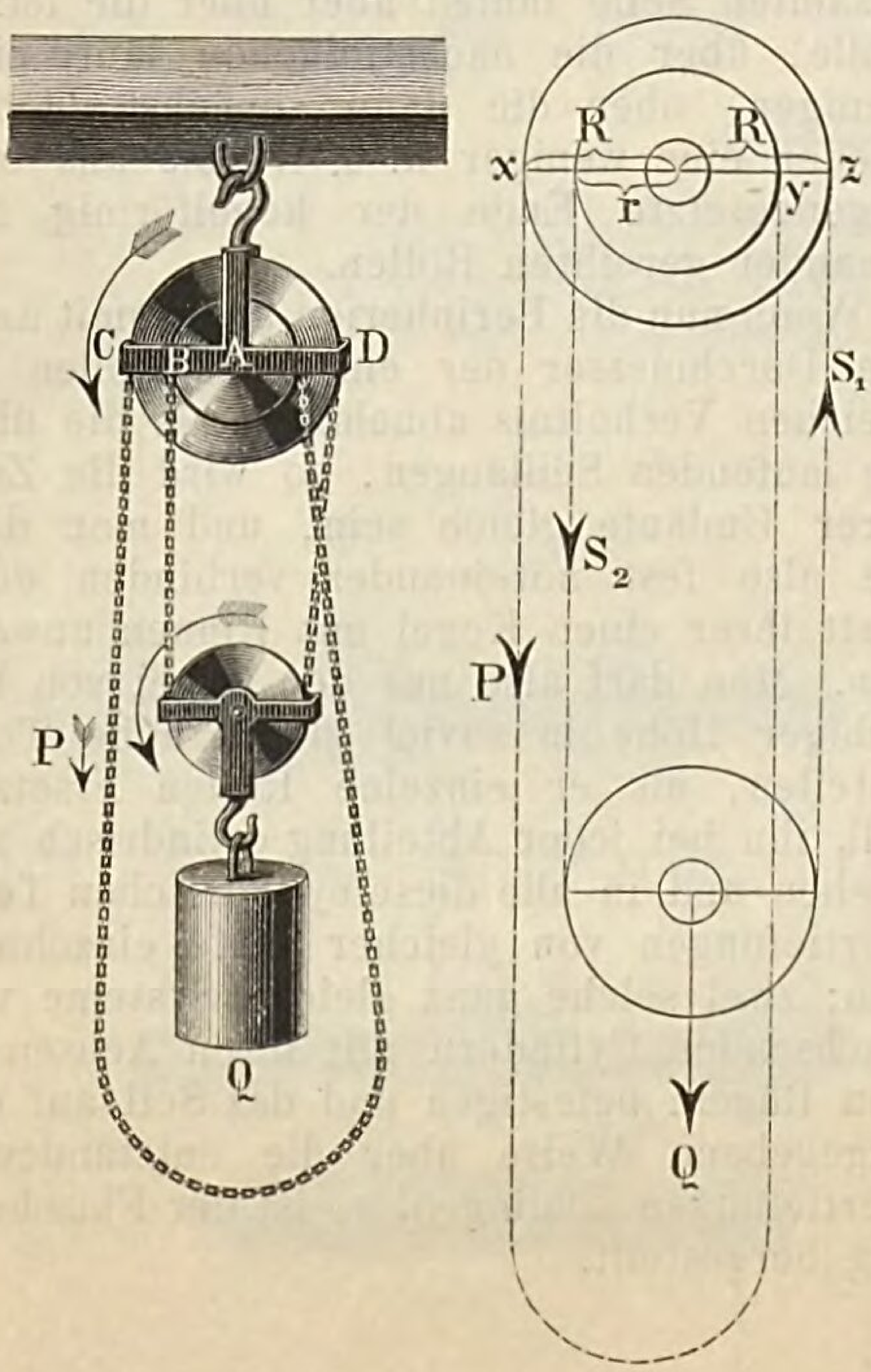
und endlich durch einen schiefen Zug und eine momentane Lockerheit wohl gar in eine nächst niedrigere Vertiefung herabgleiten können, so ist er nicht sehr in Gebrauch gekommen.

Frage 204. Wo finden die gewöhnlichen Flaschenzüge vornehmlich Anwendung?

Antwort. Die gewöhnlichen Flaschenzüge finden fortwährend Anwendung am Bord der Schiffe, um Masten, Segel und Segelstangen zu bewegen, bei Bauten zum Heben der Steinmassen, beim Straffspannen des Seiles für den Seiltänzer etc. Auch findet man häufig an grossen Wand- und Turmuhren das bewegende Gewicht an einer Flasche oder Rolle befestigt, damit der Weg desselben ein möglichst kleiner wird und die Uhr nicht so oft aufgezogen zu werden braucht.

Frage 205. Wie ist der Differentialflaschenzug eingerichtet und wenn herrscht an demselben Gleichgewicht?

Figur 292.



Antwort. Der erst in neuerer Zeit in Gebrauch gekommene Differentialflaschenzug (Fig. 292), mit welchem man ganz bedeutende Lasten heben kann, besteht aus zwei, zu einem Stück gegossenen Rollen A und B, deren Radien R und r nur wenig voneinander verschieden sind (bei den käuflich zu erwerbenden derartigen Flaschenzügen ist $r : R = 11 : 12$) und ausserdem noch aus einer losen Rolle, welche die Last Q aufnimmt. Die Rollen sind hier als Kettenscheiben konstruiert, d. h. an ihrem Umfang mit Zähnen versehen, die in die Schaken der Kette greifen und auf diese Weise ein Gleiten derselben auf den Umfängen verhindern. Die um das System der drei Kettenscheiben gelegte Kette ohne Ende, in welcher die lose Rolle hängt, windet sich so um die fest verbundenen Rollen AB, dass sich bei einem durch die Kraft P hervorgebrachten, abwärts gerichteten Zug die Kette von dem Umfang der kleinen Rolle AB ab- und auf den Umfang der grossen Rolle CD aufwickelt.

Zur Ermittelung des Gesetzes über das Gleichgewicht am Differential-Flaschenzug diene folgende Betrachtung: Es sei xz der Durchmesser der beiden festen Rollen, so wirken links am Hebelarme R die Kraft P und am Hebelarme r die halbe Last $\frac{1}{2}Q$; rechts wirkt nur am Hebelarme R die halbe Last $\frac{1}{2}Q$ und es muss deshalb für den Fall des Gleichgewichts:

Erkl 231. Die Vorzüge des in nebenstehender Antwort beschriebenen Flaschenzugs sind ausser der grossen Wirksamkeit noch deshalb sehr erheblich, weil die Maschine auch bei

gehobener Last stehen bleibt und man zur Erhaltung der Last in irgend einer Stellung keine Kraft anzuwenden braucht, so lange der Unterschied der beiden Rollendurchmesser nicht zu gross ist. Auch kann man in der herabhängenden Seilmasche eine zweite lose Rolle einhängen und diese wird dann abwärts bewegt, während erstere aufwärts geht. Man kann darum, wenn die erstere auf der Höhe angekommen, die zweite lose Rolle belasten, und gibt man dann der Maschine die umgekehrte Drehung, so wird auch diese Last ohne weitere Arbeit in die Höhe gebracht werden.

Eine wesentliche Verbesserung, welche die Maschine in der neuesten Zeit erfahren hat, ist die, dass mehr als zwei feste Rollen auf einer Achse angebracht werden und dass alsdann die beiden äusseren gleiche Durchmesser erhalten, während die Durchmesser der inneren Rollen von jenen und unter sich verschieden sind. Dadurch, dass aussen zwei gleich grosse Rollen angebracht sind, erreicht man, dass das Hängeseil oder die Kettenschleife, die sich von der einen Rolle ab- und auf die andere gleich grosse aufwickelt, stets gleiche Länge behält, also leicht von einer Winde etc. getrieben werden kann. Das Anbringen von Mittelrollen von verschiedenem Durchmesser gestattet aber verschiedene Uebersetzungs- oder Geschwindigkeitsverhältnisse, da man die von der ersten äuseren Rolle ausgehende Kette nach Belieben über die eine od. andre der mittleren Rollen schlagen kann.

Die Differentialflaschenzüge haben teilweise die Einrichtung, dass sie behufs des Hebens geringer Lasten auch als einfache Seilrollen verwendet werden können. Zu dem Zweck sind die zwei festen Rollen oder Scheiben bloss gekuppelt und es wird beim Gebrauch als einfache Rolle die mittels eingreifender Zapfen etc. hergestellte Kuppelung gelöst.

$$PR + \frac{1}{2}Qr = \frac{1}{2}QR$$

oder:

$$P = \frac{Q(R-r)}{2R}$$

sein, d. h. am **Differentialflaschenzug ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Differenz der Radien der beiden festen Rollen zum doppelten Radius der grossen festen Rolle.**

Liesse man die Kraft P anstatt im Punkt x im Punkt y, also rechts wirken, so würde bei Gleichgewicht:

$$\frac{1}{2}Qr = Pr + \frac{1}{2}QR$$

sein, woraus:

$$P = \frac{Q(r-R)}{2r}$$

d. h. es würde sich stets ein negatives Resultat ergeben, da R stets grösser als r, also die Last würde in diesem Fall nicht gehoben werden, sondern sich abwärts bewegen.

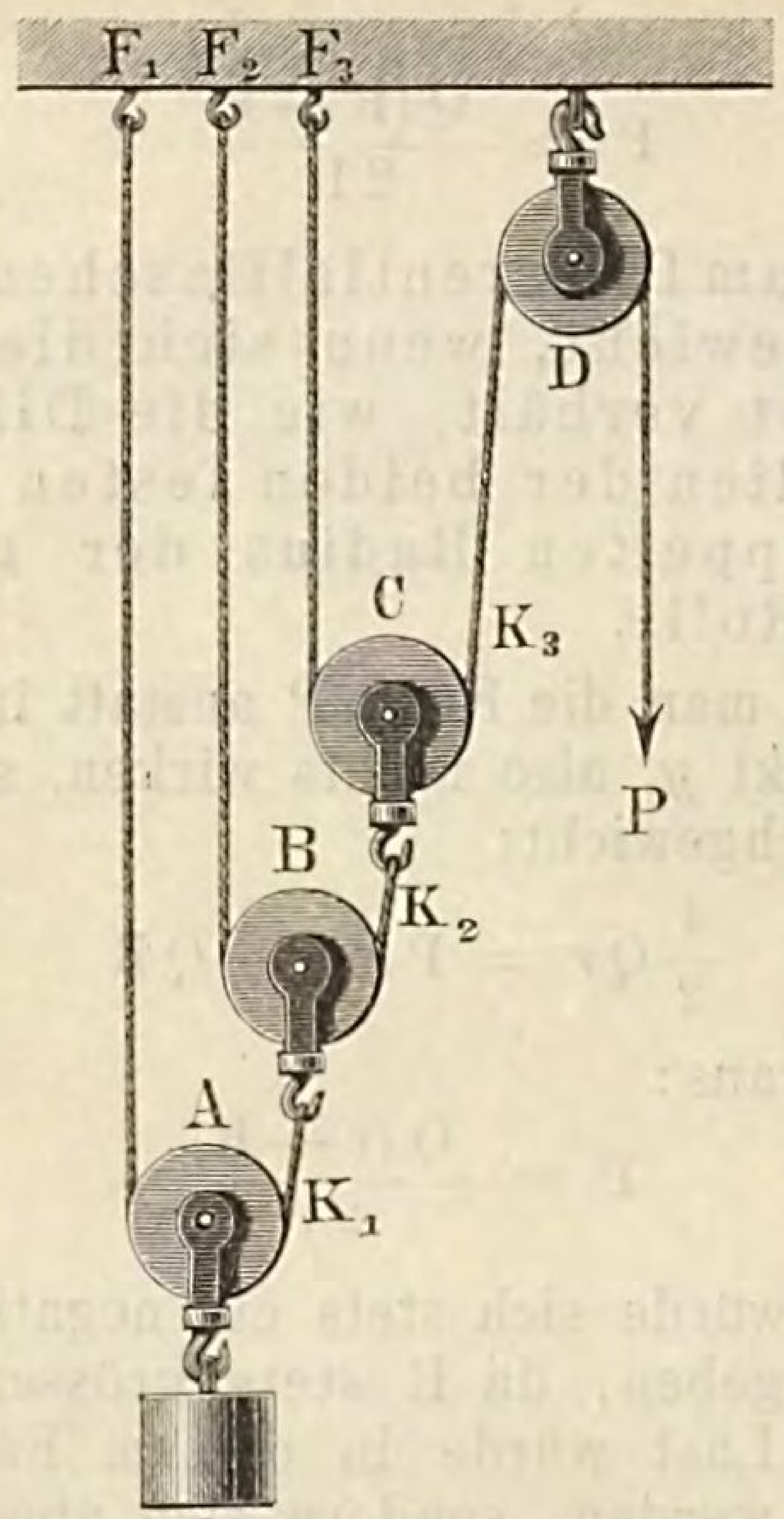
Frage 206. Welches ist der wesentlichste Unterschied zwischen den **Potenzflaschenzügen** und den gemeinen Flaschenzügen?

Antwort. Als wesentlicher Unterschied beider Arten von Flaschenzügen ist anzusehen, dass bei dem gewöhnlichen Flaschenzug die obere Flasche unbeweglich, die untere dagegen beweglich ist, und dass das Seil an einer der Flaschen oder bloss durch Umschlingen um die Rolle festsitzt; bei den Potenzflaschenzügen dagegen nur eine, in der Regel die letzte Rolle unbeweglich ist, während meistens die sämtlichen einzelnen Seile mit ihrem einen Ende an einen unbeweglichen Körper festgeknüpft werden.

Frage 207. Welches ist die gewöhnliche Einrichtung des **Potenzrollen- oder Flaschenzugs** und wenn ist derselbe im Gleichgewicht?

Antwort. Der **Potenzrollen- oder Flaschenzug** (siehe Fig. 293) besteht gewöhnlich aus einer festen und mehreren

Figur 293.



beweglichen Rollen, von denen die unterste die Last trägt. Das Seil der Rolle A ist mit dem einen Ende an einem Balken in F_1 befestigt, mit dem andern an den Haken der zweiten Rolle B geknüpft. Das Seil dieser Rolle ist ebenfalls an dem einen Ende fest (in F_2) mit dem andern an der dritten Rolle *c* befestigt u. s. f. Das Seil der letzten ist wieder an dem einen Ende (in F_3) fest, am andern wirkt die Zugkraft durch Einschaltung einer festen Rolle abwärts. Im Fall des Gleichgewichts ist die Kraft gleich der Last, dividiert durch diejenige Potenz von 2, welche der Zahl der losen Rollen entspricht, wenn man von dem Gewicht der Rollen und der Reibung absieht. Denn legt die Kraft P einen gewissen Weg *s* zurück, so hebt sich die erste lose Rolle C um die Hälfte, die zweite B um $^1/_4$ und die dritte A um $^1/_8$ dieses Weges, daher ist auch:

$$P = \frac{1}{8} Q$$

Wäre eine 4te, 5te lose Rolle vorhanden, so würde die Kraft $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^5}$ der Last betragen, oder wenn die Anzahl der losen Rollen mit *n* bezeichnet wird, so ist:

$$P = \frac{Q}{2^n}$$

Erkl. 232. Wenn die Möglichkeit nicht vorhanden ist, jedes einzelne Seil auf die in nebenstehender Antwort angegebene Weise zu befestigen, wie z. B. auf Schiffen, wo diese Art Flaschenzüge zum Heben grosser Lasten auf geringe Höhen häufig gebraucht wird, so kann man sämtliche Seile in einem gemeinschaftlichen Punkt vereinigt festmachen, so dass selbst die letzte Rolle, über welche das Endseil geht, ebendaselbst befestigt ist.

Frage 208. Welche Rollenverbindungen sind sonst noch bemerkenswert?

Antwort. Zu den bemerkenswertesten Rollen- oder Potenzzügen gehört auch die Verbindung (Fig. 294). Man sieht aus der in der Figur durch Ziffern angegebenen Spannung der einzelnen Seilstücke, dass man bei den dort angewandten drei losen Rollen A, B, C eine $3^3 = 27$ fache Last im Gleichgewicht erhalten kann, oder es ist:

$$P = \frac{Q}{3^3}$$

denn zunächst verteilt sich die an der Rolle A wirkende Last Q auf drei Seilstücke, so dass an der Rolle B nur noch $^1/_3$ Q wirkt, von dieser Last $^1/_3$ Q wirkt auf die Rolle C nur $^1/_3$, d. h. $^1/_3 . ^1/_3$ Q u. s. w. Wären 4 lose Rollen vorhanden, so würde:

$$P = \frac{Q}{3^4}$$

Erkl. 233. So vorteilhaft die nebenstehend erklärten Rollenverbindungen auch mit Rücksicht auf den Kraftgewinn sind, so unbequem ist, namentlich wenn der Rollenzug zusammengesetzt ist, ihre Anwendung, da dieselben alsdann einen gar zu grossen Raum erfordern und dabei leicht eine Verwickelung der Seile etc. eintreten kann.

Erkl. 234. Bei allen Anwendungen der verschiedenen Rollenverbindungen bieten Reibung und Steifigkeit der Seile einen namhaften Bewegungswiderstand. Bei gewöhnlichen Flaschenzügen mit je 2 oder 3 Rollen in jeder Flasche sind die genannten Widerstände zu $1/_3$, bezw. $1/_2$ der Last anzuschlagen, so dass man statt Q in die Rechnung $4/_3$ Q, bezw. $3/_2$ Q nimmt. Bei mehreren Rollen sind die Hindernisse noch grösser (bei 4 Rollen = $2/_3$ Q) und wachsen mit der Zahl der Rollen derart, dass bei vielen Rollen in einer Flasche kaum noch ein mechanischer Kraftgewinn möglich ist.

Noch ist zu bemerken, dass bei den Flaschenzügen das Gewicht der Zugflasche einen Teil der Last Q bildet.

Auch hat man bei sämtlichen Rollenverbindungen in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen mechanischen Grundgesetz, neben dem Kraftgewinn den Nachteil, dass die Kraft einen so vielmal grösseren Weg machen muss als die Last, so vielmal diese grösser ist als die Kraft. Hiernach wird also derjenige Weg, welchen das letzte Seilende oder das hieran als bewegende Kraft geknüpfte Gewicht, zurückzulegen hat, sich zu dem von der bewegten Last durchlaufenen verhalten wie die Grösse der bewegten Last zu der Grösse dieses bewegenden Gewichts. Bei den gemeinen Flaschenzügen findet man also diesen, vom bewegenden Gewicht durchlaufenen Raum oder seine Geschwindigkeit, wenn man diese der bewegten Last zugehörigen Grössen mit der Zahl der Seile multipliziert, auf welche die Last verteilt ist. Dass dieses wirklich der Fall sei, folgt schon einfach daraus, dass die Verkürzungen der gesamten Seile beim Heben der Lasten über die letzte Rolle laufen, und daher der Zahl dieser Seile proportional sein müssen.

Auf gleiche Weise kommt dieses Gesetz bei den Potenzflaschenzügen in Anwendung, und es muss daher bei der ersten beweglichen Rolle die Verkürzung beider Seilenden durch die zweite bewegliche Rolle gehoben werden, mithin der von dieser durchlaufene Weg der doppelte derjenigen Höhe sein, zu welcher die Last gehoben wird, und da dieses nämliche von der zweiten beweglichen Rolle in Beziehung auf die erste gilt, so wächst der von dem bewegenden Gewicht durchlaufene Raum nach den Potenzen der beweglichen Rollen. Indem dieser Grundsatz also als allgemeingiltig anzusehen ist, so kann man umgekehrt die Wirksamkeit eines Flaschenzugs aus dem Verhältnis der Räume nachweisen, welche von den bewegenden Gewichten und den gehobenen Lasten durchlaufen werden. Hiernach lässt sich auch die gesamte Länge des Seiles berechnen, welche erforderlich ist, um eine Last mittels eines Flaschenzugs von gegebener Zahl Rollen auf eine bestimmte Höhe zu heben. Heisst diese Höhe h, die Zahl der Seile, woran die Last hängt, n, der Abstand der Achsen des ersten

sein, und nennen wir die Zahl der losen Rollen überhaupt n, so ist:

$$P = \frac{Q}{3^n}$$

oder:

$$Q = 3^n . P$$

Aehnliche Rollenverbindungen sind die durch Fig. 295 und Fig. 296 dargestellten. Mit dem Rollenzug (Fig. 295), welcher auch Summationspotenzzug genannt wird, und wieder drei lose Rollen A, B und C enthält, kann man, wie die durch Ziffern angegebenen Spannungsverhältnisse zeigen, einer Last:

$$Q = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

oder:

$$Q = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

das Gleichgewicht halten, wenn:

$$P = 1$$

ist. Bezeichnet man auch hier allgemein die Zahl der losen Rollen mit n, so ist:

$$P = \frac{Q}{2^1 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^n}$$

Bei der Verbindung Fig. 296 hingegen kann bei ebenfalls drei losen Rollen A, B und C die Last Q nur $= (1 + 2 + 4 + 8)\,P = 15\,P$ sein, oder wenn allgemein n die Anzahl der losen Rollen bezeichnet, so ist:

$$Q : P = 2^{n+1} - 1 : 1$$

oder:

$$P = \frac{Q}{2^{n+1} - 1}$$

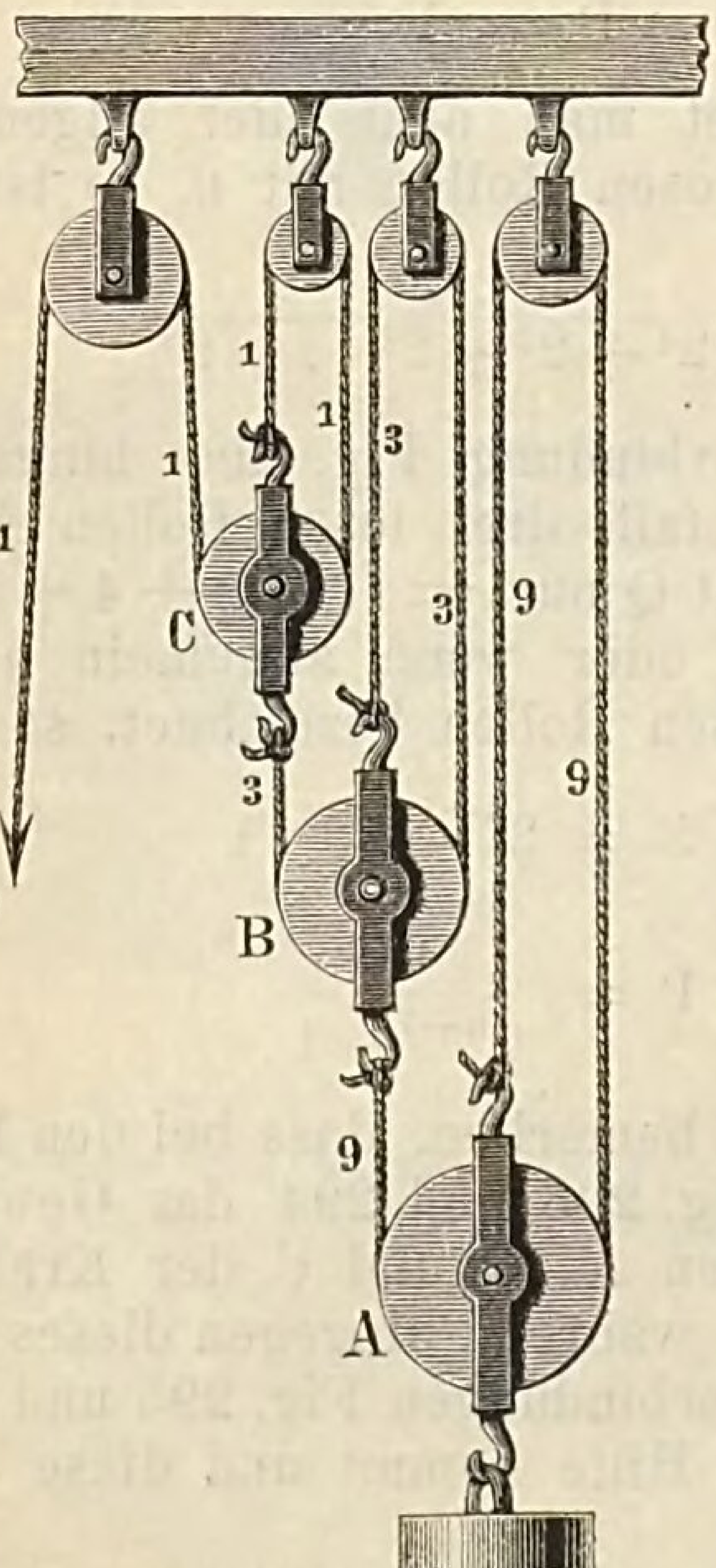
Noch ist zu bemerken, dass bei den Rollenzügen in Fig. 293 und 294 das Gewicht der losen Rollen A, B und C der Kraft P entgegenwirkt, während hingegen dieses Gewicht in den Verbindungen Fig. 295 und 296 der Kraft P zu Hilfe kommt und diese also unterstützt.

Rollenpaares, wenn die Enden der Flaschen sich berühren: a, des zweiten a' etc., der Umfang der ersten Rolle p, der zweiten p' etc. und geht endlich das Seil, woran gezogen wird, von der obersten Rolle wieder auf den Boden herab, so ist die ganze Seillänge:

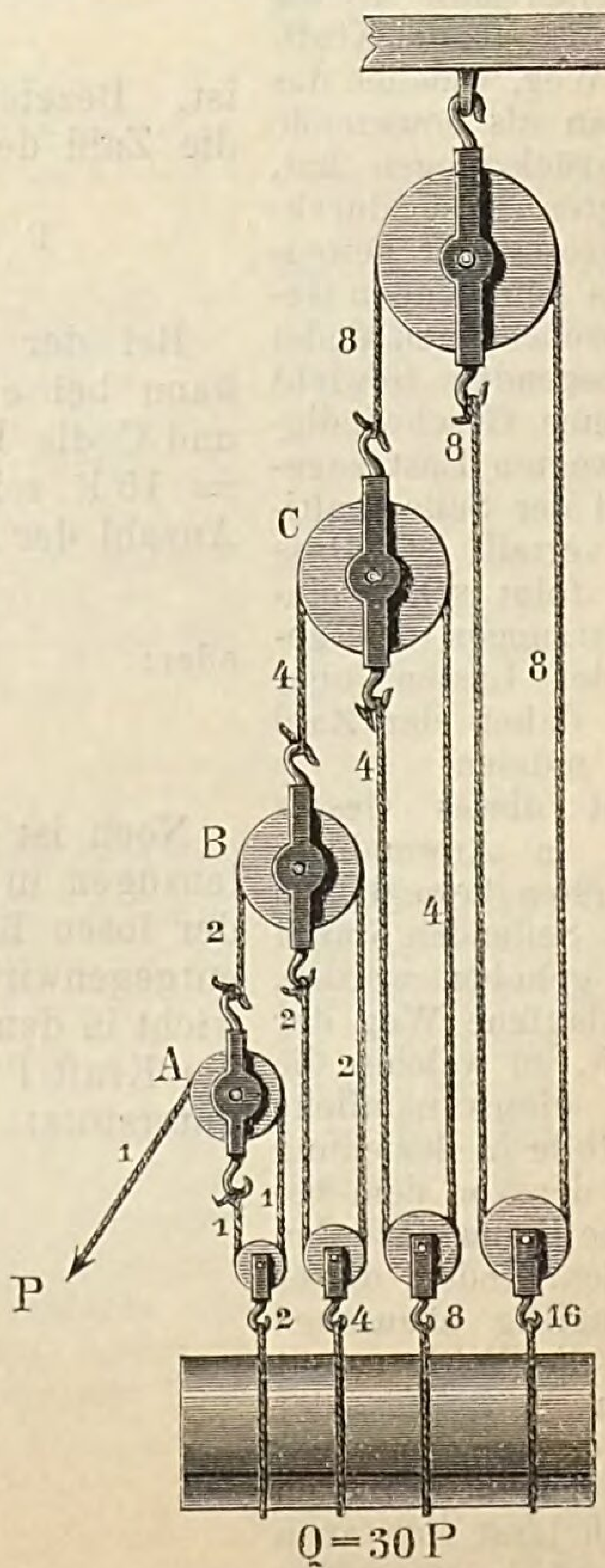
$$L = 2\left(a + a' + a'' \ldots . + a^{\frac{n}{2}}\right) + \left(p + p' + p'' \ldots . + p^{\frac{n}{2}}\right) + h\,(n+1)$$

Erkl. 235. Für die Experimentalbeweise der Gesetze über die Rolle, die verschiedenen Rollen und Flaschenzüge benutzt man Rollen- und Flaschenzugmodelle, welche nebst Gewichten und Gestell, je nach Vollständigkeit und Zusammenstellung zum Preis von M. 18.— bis M. 60.— durch Mechaniker oder Lehrmittelanstalten bezogen werden können.

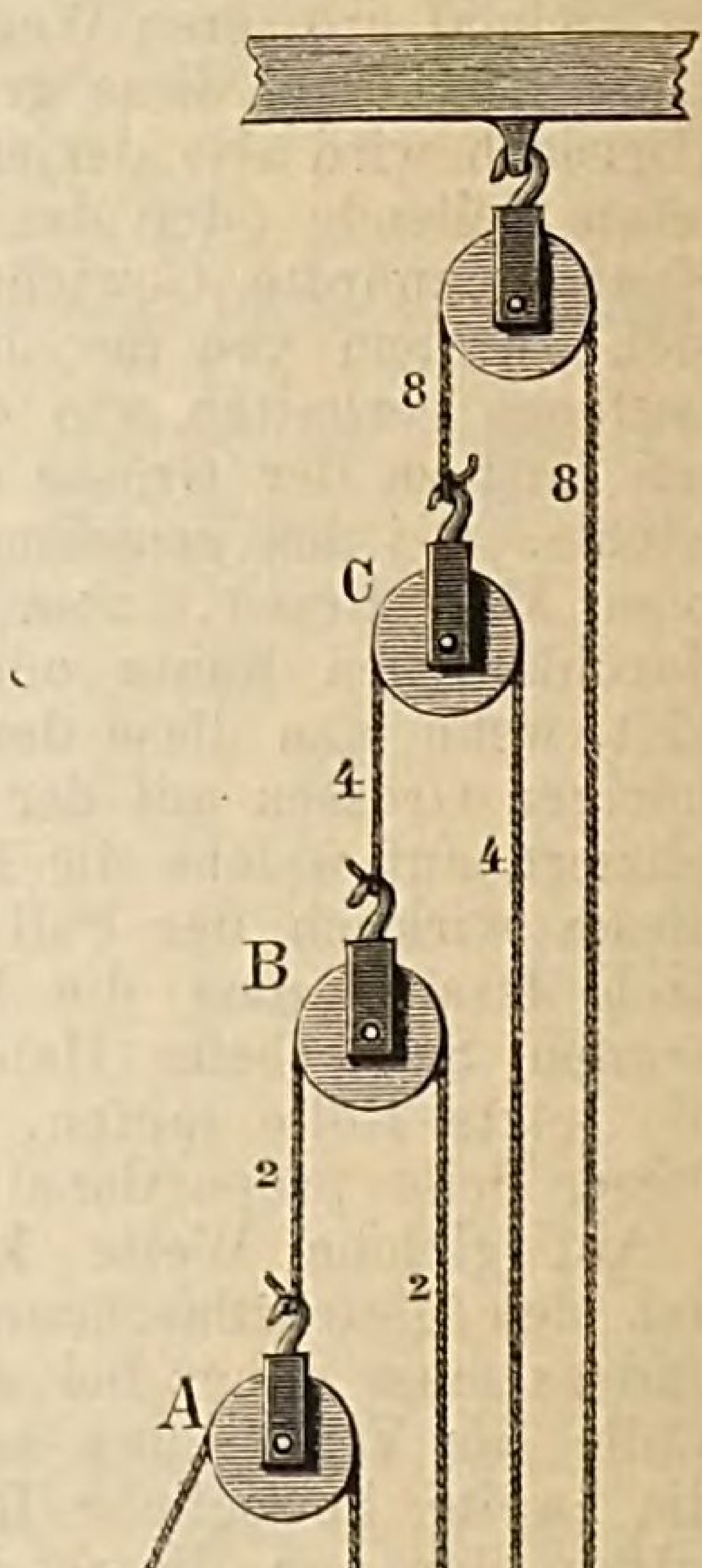
Figur 294.



Figur 295.



Figur 296.



γ). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 251. Mittels einer festen Rolle wird eine Last von 60 kg gehoben. Wie gross ist der Achsendruck, a). wenn die Seilstücke parallel laufen, b). wenn dieselben, verlängert gedacht, einen Winkel von 75⁰ bilden würden?

Hilfsrechnung.

$$120 \,.\, \cos 37^0\,30' = \log 120 + \log \cos 37^0\,30'$$

$$\begin{aligned} \log 120 &= 2{,}0791812 \\ +\log \cos 37^0\,30' &= 9{,}8994667-10 \\ \hline \log D &= 1{,}9786479 \end{aligned}$$

mithin:

num-log D oder D = 95,292

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 198 ist im ersten Fall:

$$D = 2\,P$$

im zweiten Fall:

$$D = 2\,P \,.\, \cos\frac{\alpha}{2}$$

Folglich ist unter Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte:

a). . . $D = 2 \,.\, 60$ oder $D = 120$ kg

b). . . $D = 2 \,.\, 60 \,.\, \cos 37^0\,30'$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$D = 95{,}202 \text{ kg}.$$

Aufgabe 252. Mittels einer losen Rolle (siehe Fig. 286) sollen 200 kg gehoben werden. Welche Kraft ist hierzu nötig, a). ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse, b). wenn die Bewegungswiderstände zu $^1/_{10}$ der Last angenommen werden?

Auflösung. a). Nach Antwort auf Frage 199 ist:

$$P = \frac{1}{2}Q$$

oder den gegebenen Zahlenwert eingesetzt:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 200 \quad \text{oder} \quad P = 100 \text{ kg}$$

b). Werden die Bewegungshindernisse $= \frac{1}{10}Q$ gerechnet, so ist:

$$P = \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200$$

oder:

$$P = 110 \text{ kg}$$

Aufgabe 253. Wenn dieselbe Kraft P = 110 kg an einer Rollenvorrichtung wirkt, deren Seilstücke ähnlich wie in Fig. 287 laufen und wenn der Radius AC = 24 cm, die Sehne AB = 36 cm beträgt, wie gross wird dann unter Berücksichtigung der Reibungswiderstände $= {}^1/_{10}Q$ die zu bewältigende Last sein?

Hilfsrechnung.

$$\frac{10 \,.\, 110 \,.\, 36}{11 \,.\, 24} = \frac{10 \,.\, 10 \,.\, 3}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 200 ist:

$$P = \frac{Q\,r}{s}$$

und wenn die Bewegungshindernisse $\frac{1}{10}Q$ gerechnet werden, so ist:

$$P = \frac{11 \,.\, Q \,.\, r}{10 \,.\, s}$$

Hieraus ergibt sich für:

$$Q = \frac{10 \,.\, P \,.\, s}{11 \,.\, r}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{10 \,.\, 110 \,.\, 36}{11 \,.\, 24}$$

oder:

$$Q = 150 \text{ kg}$$

Aufgabe 254. Eine Last von 500 kg wird mittels einer 10 kg schweren beweglichen Rolle in die Höhe gezogen. Wie gross ist die aufzuwendende Kraft, ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse, wenn:

a). die Seile parallel laufen,

b). die Seilrichtungen sich unter rechtem Winkel schneiden,

c). die Seilrichtungen einen Winkel von 70^0 einschliessen?

Hilfsrechnungen:

1). . . . $$\frac{510}{\sqrt{2}} = \frac{510}{1{,}414}$$

$$510000 : 1414 = 360{,}68$$

```
4242
 8580
 8484
   9600
   8484
   11160
```

2). . . . $$\frac{510}{2 \cdot \cos 35^0} = \frac{255}{\cos 35^0}$$

$$\frac{255}{\cos 35^0} = \log 255 - \log \cos 35^0$$

$$\log 255 = 2{,}4065402$$
$$-\log \cos 35^0 = -9{,}9133645-10$$
$$\log P = 2{,}4921757$$

mithin:

num-log P oder $P = 310{,}58$

Auflösung. Die zu hebende Last:

$$Q = 500 + 10 \text{ oder } 510 \text{ kg}$$

a). Laufen die Seiie parallel, dann ist:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 510$$

oder:

$$P = 255 \text{ kg}$$

b). Schneiden sich die Seilrichtungen unter einem rechten Winkel, dann ist nach Erkl. 225:

$$P = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$P = \frac{510}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$P = 360{,}68 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

c). Schliessen die Seilrichtungen einen Winkel von 70^0 ein, so ist der von den beiden auf den Seilrichtungen senkrecht stehenden Radien gebildete Centriwinkel:

$$\alpha = 180 - 70$$

und somit der in Rechnung kommende Winkel

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\left(180^0 - 70^0\right) = 90 - 35$$

oder:

$$\frac{1}{2}\alpha = 55^0$$

Nach Antwort auf Frage 200 ist nun:

1). . . . $$P = \frac{Q}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha}$$

da aber nach einer goniometrischen Formel:

$$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

ist, so kann man, wenn nicht der Centriwinkel, sondern der Winkel der Seilrichtungen gegeben ist, direkt aus diesem die Kraft P berechnen, indem, wenn α den Winkel der Seilrichtungen bezeichnet,

$$P = \frac{Q}{2 \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha}$$

ist. Unter Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte erhält man nach Gleichung 1).:

$$P = \frac{510}{2 \cdot \sin 55^0}$$

nach Gleichung 2). aber:

$$P = \frac{510}{2 \cdot \cos 35^0}$$

da $\sin 55^0 = \cos 35^0$ ist, so sind beide Formeln gleichwertig und es ist nach Hilfsrechnung 2).:

$$P = 310{,}58$$

Aufgabe 255. Wie verhält sich die Kraft zur Last bei einer beweglichen Rolle, wenn der von dem Seil umfasste Bogen a). 180°, b). 120° beträgt?

Auflösung. a). Ein Bogen von 180° entspricht einem Centriwinkel von 2 R, also laufen die Seilstücke parallel und es verhält sich:

$$P : Q = 1 : 2$$

b). Bei einem Bogen von 120° ist nach Antwort auf Frage 200:

$$P : Q = 1 : 2 . \sin \frac{1}{2} \alpha$$

oder:

$$P : Q = 1 : 2 . \sin 60^0$$

oder da $\sin 60^0 = 0{,}866$ ist, so ist:

$$P : Q = 1 : 2 . 0{,}866$$

oder:

$$P : Q = 1 : 1{,}732$$

Aufgabe 256. Ein gewöhnlicher Flaschenzug hat in jeder Flasche 3 Rollen und es sollen mit demselben 4 Zentner Last gehoben werden, a). wieviel Kraft ist nötig, ohne Rücksicht auf die Reibung und das Gewicht der Rollen, b). welchen Weg muss die Kraft zurücklegen, wenn die Last 40 cm hoch gehoben werden soll?

Auflösung. a). Nach Antwort auf Frage 202 ist:

$$P = \frac{Q}{n}$$

oder:

$$P = \frac{4 . 50}{6} \quad \text{oder} \quad P = 33^1/_3 \text{ kg}$$

b). Der Weg der Kraft ist 6 mal so gross als der der Last, und da die Last 40 cm hoch gehoben werden soll, so ist der Kraftweg:

$$s = 6 . 40 \quad \text{oder} \quad s = 2{,}40 \text{ m.}$$

Aufgabe 257. Es sei die Anzahl der beweglichen Rollen an einem gemeinen Flaschenzug $n = 4$, ihr Gesamtgewicht $G = 16$ Pfund, welche Kraft P ist nötig, um einer Last $Q = 1200$ Pfund das Gleichgewicht zu halten

a). wenn das Seilende an der Hülse der festen Flasche,

b). wenn es an der beweglichen Flasche befestigt ist?

Wieviel Männer sind zum Heben der Last nötig, wenn die Kraft eines Mannes zu 60 Pfund gerechnet wird?

Auflösung. a). Bezeichnet man die Zahl der losen Rollen mit n, so ist nach Erkl. 228, wenn das Seilende an der festen Flasche befestigt ist:

$$P = \frac{Q + G}{2n}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{1200 + 16}{2 . 4}$$

oder:

$$P = 152 \text{ Pfund}$$

b). Ist aber das Seilende an der beweglichen Flasche befestigt, so ist:

$$P = \frac{Q + G}{2n + 1}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{1216}{2 . 4 + 1}$$

oder:

$$P = \frac{1216}{9} = 135^1/_9 \text{ Pfund.}$$

Es sind somit in beiden Fällen 3 Mann zum Heben der Last nötig.

Aufgabe 258. Eine Gewichtsuhr wird durch ein Gewicht von 2 kg in Gang gesetzt, welches alle 12 Stunden von neuem aufgezogen werden muss, da es sonst am Boden aufstösst. Es soll nun die Gewichtsschnur zunächst über eine feste Rolle gleiten und dann unter Anwendung eines mit der Uhr in gleicher Höhe befindlichen Flaschenzugs die Uhr erst alle 3 Tage aufgezogen werden.

a). Was für ein Flaschenzug ist anzuwenden;
b). Mit welchem Gewicht ist der Flaschenzug zu belasten;
c). Welche Länge muss die Schnur haben?

Auflösung. a). Da die Uhr sechsmal so lange gehen soll als bisher, so muss der Weg des sinkenden Gewichts um das Sechsfache verkürzt werden und es ist somit ein Flaschenzug mit 6 Seilstücken, d. h. ein symmetrischer Flaschenzug mit je 3 Rollen anzuwenden.

b). Dementsprechend muss die Belastung sechsmal so gross, also $6 . 2 = 12$ kg genommen werden, und

c). die Schnur muss mindestens
$$2 . 3 + 1 = 7 \text{ mal so lang sein}$$
als bei der gewöhnlichen Einrichtung.

Aufgabe 259. An einem Differentialflaschenzug ist der Durchmesser der grossen Rolle 40 cm und der der kleinen Rolle 36 cm. Welche Kraft ist erforderlich, um 2100 kg zu heben, ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse?

Hilfsrechnung.
$$\frac{2100 . 2}{2 . 20} = \frac{2100}{20} = \frac{210}{2} = 105$$

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 205 ist:
$$P = \frac{Q(R - r)}{2R}$$
oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt ist:
$$P = \frac{2100(20 - 18)}{2 . 20}$$
oder:
$$P = 105 \text{ kg}$$

Aufgabe 260. Wenn sich an einem Differentialflaschenzug die Radien der beiden festen Rollen zueinander verhalten wie 12:11 und die Kraft, welche die Last hebt, zu wirken aufhört, welche Kraft muss dann in y (Fig. 292) angreifen, damit sich die Last nicht wieder senkt?

Auflösung. Nach der zweiten Gleichung in Antwort auf Frage 205 ist die gesuchte Kraft:
$$P = \frac{Q(r - R)}{2r}$$
oder das gegebene Verhältnis der beiden Radien angewandt, ist:
$$P = \frac{Q(11 - 12)}{2 . 11}$$
oder:
$$P = -\frac{1}{22} Q$$
d. h. es wird in y eine nach oben wirkende Kraft nötig sein, welche $= \frac{1}{22}$ der Last beträgt. Da aber die Reibung an den Achsen sowohl, als ganz besonders die bedeutende Reibung an den mit Zähnen versehenen Rollenumfängen jederzeit grösser als $\frac{1}{22}$Q ist, so braucht man zur Erhaltung der Last in irgend einer Höhe gar keine Kraft anzuwenden (siehe Erkl. 231).

Aufgabe 261. An einem Potenzrollenzugmodell von drei beweglichen Rollen hängen 50 g als Kraft. Wieviel Last darf man anhängen, damit Gleichgewicht herrscht und welchen Weg legt die Kraft zurück, wenn die Last 15 cm gehoben wird?

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 207 ist:

$$Q = 2^n . P$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = 2^3 . 50 \text{ g}$$

oder:

$$Q = 8 . 50 \text{ g}$$

oder:

$$Q = 400 \text{ g}$$

Die Last beträgt also das 8fache der Kraft, mithin der Kraftweg das 8fache des Lastwegs und wenn die Last 15 cm gehoben wird, so muss die Kraft 8 . 15 = 120 cm sich senken.

Aufgabe 262. Wie gross müsste bei einem Potenzrollenzug die Zahl der beweglichen Rollen sein, um mit einer Kraft von 20 kg eine Last von 640 kg zu heben?

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 640 = & 2{,}8061800 \\ -\log 20 = & -1{,}3010300 \\ \hline & 1{,}5051500 : 0{,}30103 = 5 \\ & 1{,}5051500 \\ \hline & = \; = \; = \end{array}$$

Erkl. 236. Diese Aufgabe konnte auch ganz elementar gelöst werden, indem

$$2^n = \frac{Q}{P} = \frac{640}{20} = 32$$

ist. Hat man aber die Gleichung:

$$2^n = 32$$

und soll daraus das n, also den Exponent der Zahl 2 ermitteln, so geschieht dies jedenfalls ohne alle Rechnung, indem als bekannt vorausgesetzt werden darf, dass $32 = 2^5$, also in diesem Fall $n = 5$ ist.

Auflösung. Nach Antwort auf Frage 207 ist:

$$2^n = \frac{Q}{P}$$

oder diese Gleichung logarithmiert:

$$n . \log 2 = \log Q - \log P$$

und somit ist:

$$n = \frac{\log Q - \log P}{\log 2}$$

oder:

$$n = \frac{\log 640 - \log 20}{\log 2}$$

oder:

$$n = 5 \quad \text{(siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. der anzuwendende Potenzrollenzug müsste 5 bewegliche Rollen haben.

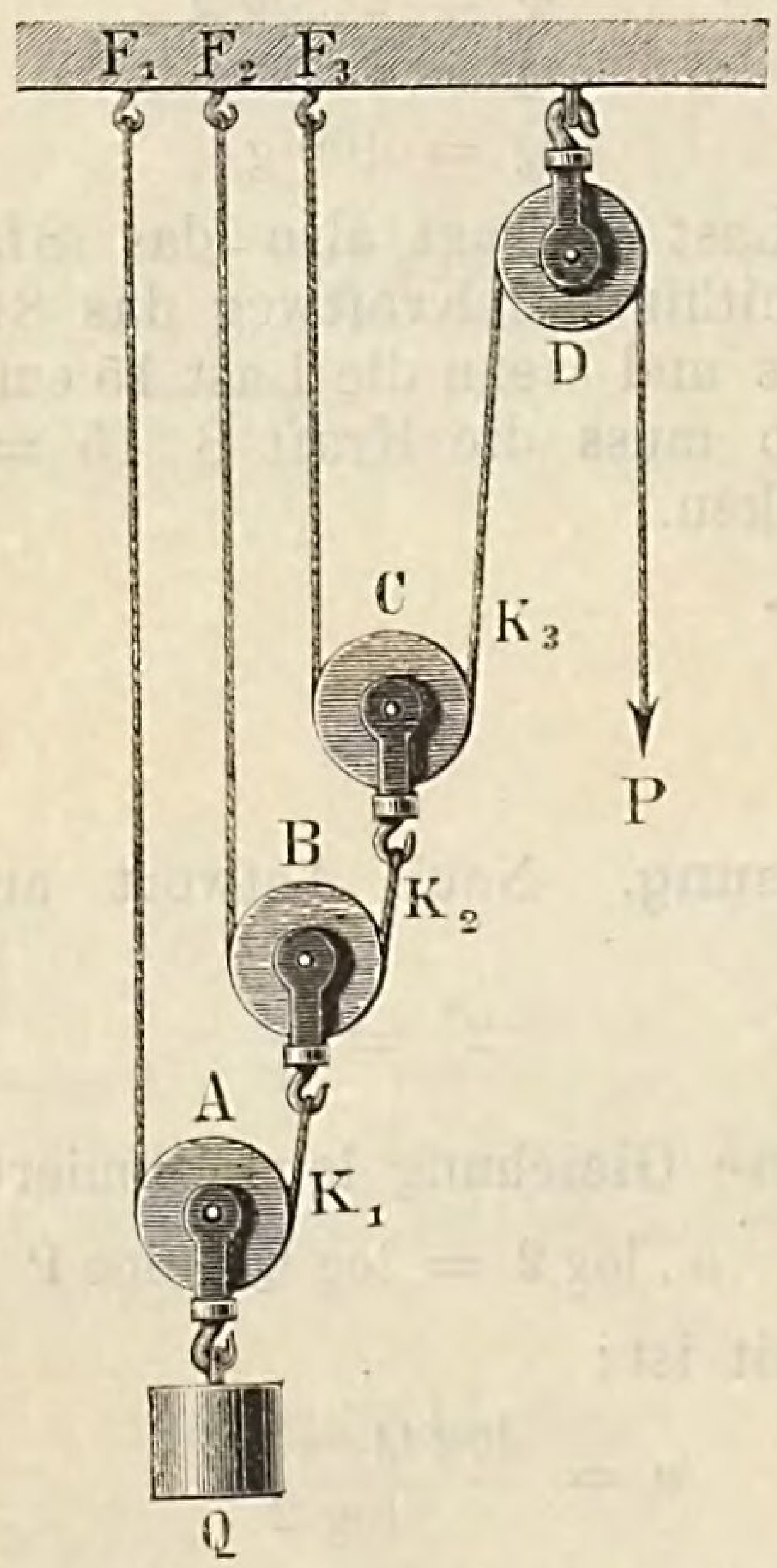
Aufgabe 263. Wenn bei einem Potenzrollenzug jede der n beweglichen Rollen das Gewicht g hat und die zu hebende Last Q beträgt, wie gross ist dann die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft P?

Auflösung. Betrachten wir Fig. 297, so ist nach der gestellten Aufgabe das Gewicht der ersten Rolle A, nebst der daran hängenden Last $(Q+g)$; davon trägt Punkt F_1 die Hälfte, während die andere Hälfte also $\frac{1}{2}(Q+g)$ als Kraft anzuwenden wäre, wenn nur die eine bewegliche Rolle A vorhanden wäre. Ist aber noch eine zweite lose Rolle B da, so trägt diese die vorherberechnete Last $= \frac{1}{2}(Q+g)$, wozu noch das eigene Gewicht g dieser Rolle kommt, folglich beträgt die an der Rolle B wirkende Gesamtlast =

$$\frac{1}{2}(Q+g)+g = \frac{Q}{2}+\frac{3}{2}g = \frac{1}{2}(Q+3g)$$

Davon trägt Punkt F_2 die Hälfte, während die andere Hälfte als Kraft anzuwenden

Figur 297.



ist oder für den Fall, dass noch eine dritte lose Rolle vorhanden ist, so hängt an dieser:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Q+3g)\right) = \frac{1}{4}(Q+3g)$$

zählen wir dazu das eigene Gewicht g der dritten Rolle und halbieren diese Summe abermals, so erhalten wir die Kraft:

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(Q+3g)+g\right)$$

oder:

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4}+\frac{3}{4}g+g\right)$$

oder:

$$P = \frac{Q}{8}+\frac{3}{8}g+\frac{g}{2}$$

oder:

$$P = \frac{1}{8}(Q+7g)$$

welche nötig ist, wenn drei lose Rollen vorhanden sind. Bei vier losen Rollen ergibt sich in analoger Weise:

$$P = \frac{1}{16}(Q+15g)$$

bei fünf losen Rollen erhält man:

$$P = \frac{1}{32}(Q+31g)$$

und allgemein bei n losen Rollen:

$$P = \frac{1}{2^n}\left(Q+(2^n-1)g\right)$$

oder:

$$P = \frac{(Q+2^n g - g)}{2^n}$$

oder:

1). . . . $P = \frac{Q-g}{2^n}+g$

Aufgabe 264. Es sollen mit Hilfe eines Potenzrollenzuges von vier beweglichen Rollen, deren jede 3 kg wiegt, 1000 kg gehoben werden. Welche Kraft ist ohne Rücksicht auf die Reibung nötig?

Hilfsrechnung.

$$\frac{1000-3}{2^4}+3 = \frac{997}{16}+3 = \frac{997+3.16}{16}$$

```
 997
  48
1045 : 16 = 65,3125
  96
   85
   80
    50
    48
     20
     16
      40
      32
       80
```

Auflösung. Nach der in voriger Auflösung ermittelten Formel ist:

$$P = \frac{Q-g}{2^n}+g$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{1000-3}{2^4}+3$$

oder:

$$P = 65{,}3125 \text{ kg} \quad \text{(siehe Hilfsrechn.)}$$

Aufgabe 265. Wieviel Rollen, von denen jede 6 kg wiegt, sind bei einem Potenzrollenzug nötig, um mit einer Kraft von 55,25 kg einer Last von 400 kg das Gleichgewicht zu halten?

Hilfsrechnungen:

1). Nach Gleichung 1). in Auflösung der Aufgabe 263 ist:

$$P = \frac{Q-g}{2^n} + g$$

oder:

$$P - g = \frac{Q-g}{2^n}$$

oder:

$$2^n = \frac{Q-g}{P-g}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$n \,.\, \log 2 = \log(Q-g) - \log(P-g)$$

folglich ist:

$$n = \frac{\log(Q-g) - \log(P-g)}{\log 2}$$

2). $\log 394 = 2{,}5954962$
$- \log 49{,}25 = -1{,}6924062$
$0{,}3010300 \,|\, 0{,}9030900 = 3$
$0{,}9030900$
= = =

Auflösung. Aus der in Auflösung der Aufgabe 263 entwickelten Formel ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung 1). für die gesuchte Anzahl der Rollen:

$$n = \frac{\log(Q-g) - \log(P-g)}{\log 2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$n = \frac{\log(400-6) - \log(55{,}25-6)}{\log 2}$$

oder:

$$n = \frac{\log 394 - \log 49{,}25}{\log 2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$n = 3$$

d. h. der anzuwendende Potenzrollenzug muss drei bewegliche Rollen haben.

Aufgabe 266. Mittels einer Kraft von 43¾ kg will man durch einen Potenzrollenzug, der aus drei beweglichen Rollen besteht, welche der Reihe nach 10, 8 und 6 kg wiegen, eine Last Q heben; wie gross kann diese sein?

Hilfsrechnungen:

1). . $P = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}g_1 + g_2\right) + g_3\right]$

oder:

$$P = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}g_1 + \frac{1}{2}g_2\right) + g_3\right]$$

oder:

$$P = \frac{1}{8}Q + \frac{1}{8}g_1 + \frac{1}{4}g_2 + \frac{1}{2}g_3$$

oder:

$$8P = Q + g_1 + 2g_2 + 4g_3$$

oder:

$$Q = 8P - g_1 - 2g_2 - 4g_3$$

oder:

$$Q = 8P - (g_1 + 2g_2 + 4g_3)$$

2). . . $8 \,.\, 43\frac{3}{4} - (10 + 2 \,.\, 8 + 4 \,.\, 6) =$

$$\frac{8 \,.\, 175}{4} - 50 = 2 \,.\, 175 - 50 =$$

$$350 - 50 = 300$$

Auflösung. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Rollen der Reihe nach g_1, g_2 und g_3, so wirkt an der Schere der zweiten losen Rolle (siehe Fig. 297):

$$\frac{1}{2}(Q + g_1)$$

an der Schere der dritten Rolle:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Q+g_1) + g_2\right)$$

folglich muss die an dem Seilstück der dritten losen Rolle wirkende Kraft:

$$P = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Q+g_1) + g_2\right) + g_3\right]$$

sein, und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung 1). für die gesuchte Last:

$$Q = 8P - (g_1 + 2g_2 + 4g_3)$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = 8 \,.\, 43\frac{3}{4} - (10 + 2 \,.\, 8 + 4 \,.\, 6)$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2).:

$$Q = 300 \text{ kg.}$$

δ). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 267. Mittels einer festen Rolle wird eine Last von 100 kg gehoben. Wie gross ist der Achsendruck a). wenn die Seilstücke parallel laufen, b). einen rechten Winkel, c). einen Winkel von 68° bilden?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 251.

Aufgabe 268. Mittels einer losen Rolle, deren Seilstücke parallel laufen, sollen 325 kg gehoben werden. Welche Kraft ist hierzu nötig a). ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse, b). wenn die Bewegungshindernisse zu $^1/_8$ der Last angenommen werden?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 252.

Aufgabe 269. Wenn eine Kraft von $19^1/_2$ kg an einer losen Rolle wirkt, deren Seilstücke nicht parallel laufen, sondern einen Bogen einschliessen, dessen Sehne 30 cm beträgt, während der Radius 18 cm gross ist, wie gross wird dann unter Berücksichtigung der Reibungswiderstände $= {}^1/_7\,Q$ die zu bewältigende Last sein?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 253.

Aufgabe 270. Eine Last von 360 kg soll mittels einer 8 kg schweren beweglichen Rolle in die Höhe gezogen werden. Wie gross ist die aufzuwendende Kraft, wenn die Bewegungshindernisse $= {}^1/_{10}\,Q$ gerechnet werden und
a). die Seile parallel laufen,
b). einen Winkel von 80° einschliessen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 254.

Aufgabe 271. Wie verhält sich die Kraft zur Last bei einer beweglichen Rolle, wenn der von dem Seil umfasste Bogen a). 90°, b). 60° beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 255.

Aufgabe 272. Ein Flaschenzug hat in jeder Flasche 4 Rollen und es sollen mit demselben 194 kg gehoben werden, während die bewegliche Flasche 6 kg wiegt. a). Wieviel Kraft ist nötig, ohne Rücksicht auf die Reibung; b). wieviel Kraft ist nötig, wenn die Reibung 15 % beträgt; c). welchen Weg muss die Kraft zurücklegen, wenn die Last 30 cm gehoben werden soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 256.

Aufgabe 273. Es sei die Anzahl der beweglichen Rollen an einem Flaschenzug 3, das Gewicht derselben 8 kg und die zu hebende Last 282 kg. Welche Kraft ist nötig, um Gleichgewicht herzustellen, wenn das Seilende a). an der Hülse der festen, b). an der Hülse der beweglichen Flasche befestigt ist, und die Reibung in jedem Fall $12^1/_2$ % beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 257.

Aufgabe 274. An einem Differentialflaschenzug ist das Verhältnis der beiden Radien der festen Rollen 9 : 10. Welche Kraft ist zum Heben einer Last von 1045 kg nötig?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 259.

Aufgabe 275. An einem Potenzrollenzug von 4 beweglichen Rollen wirkt eine Kraft von 25 kg. Wie gross ist die zu hebende Last und welchen Weg legt die Kraft zurück, wenn die Last 25 cm gehoben werden soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 259.

Aufgabe 276. Es soll mit Hilfe eines Potenzrollenzugs von 8 beweglichen Rollen, deren jede $2^1/_2$ kg wiegt, eine Last von 10000 kg gehoben werden. Welche Kraft ist ohne Rücksicht auf die Reibung nötig?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 264.

Aufgabe 277. Wieviel bewegliche Rollen braucht man wenigstens, um mit einem Potenzrollenzug 5000 kg mit 25 kg Kraft zu heben?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 262.

Aufgabe 278. Mittels eines Potenzrollenzugs, der aus vier losen Rollen von dem Gewicht 10, 9, 8 und 7 kg besteht, sollen 1732 kg gehoben werden. Welche Kraft ist hierbei nötig?

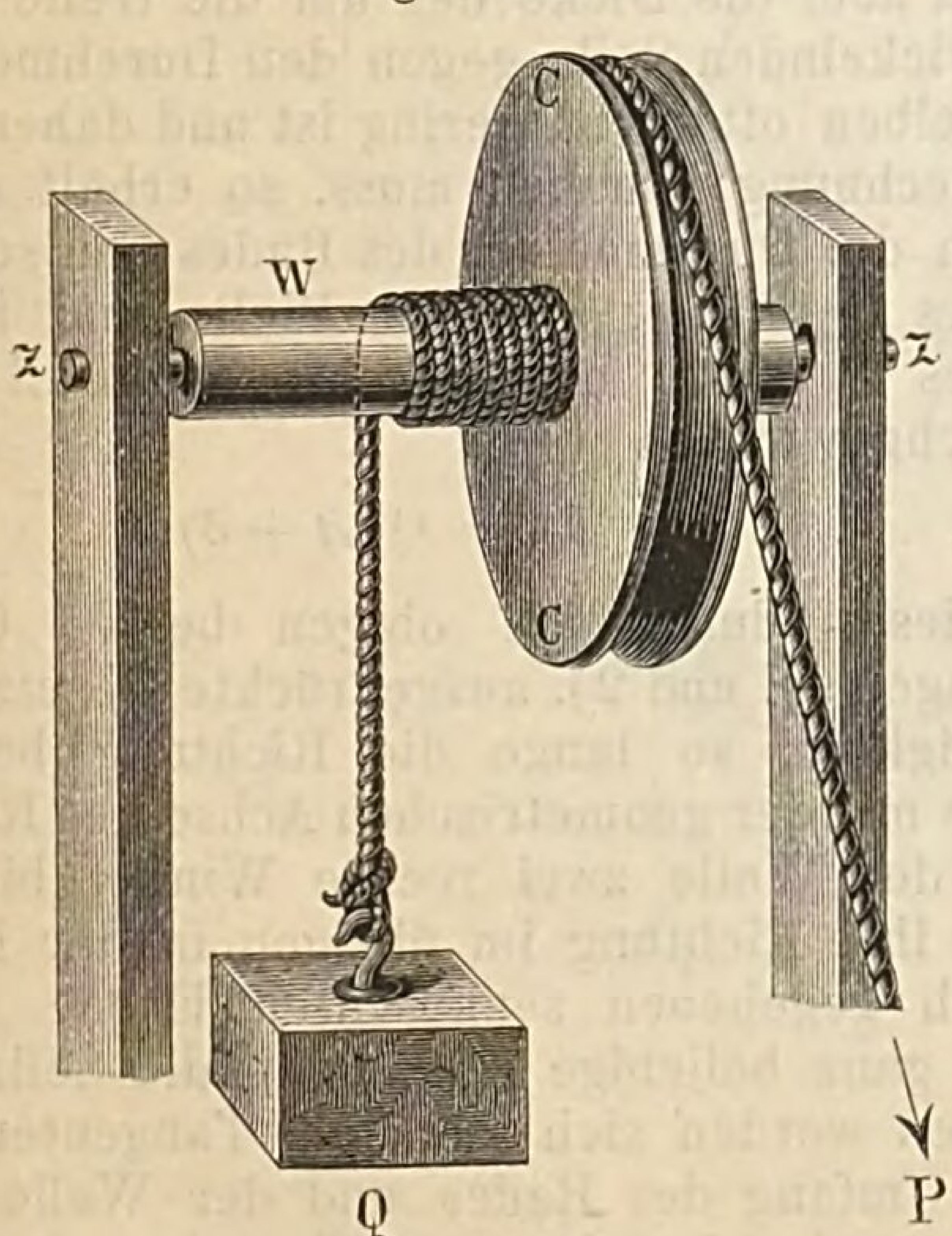
Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 266, nur ist hier nicht Q, sondern P zu ermitteln.

e. Das Rad an der Welle oder das Wellrad.

α). Erklärung des Wellrads. Verhältnis zwischen Kraft und Last. Die verschiedenen Arten des Wellrads.

Frage 209. Wie ist das Rad an der Welle oder das Wellrad eingerichtet?

Figur 298.



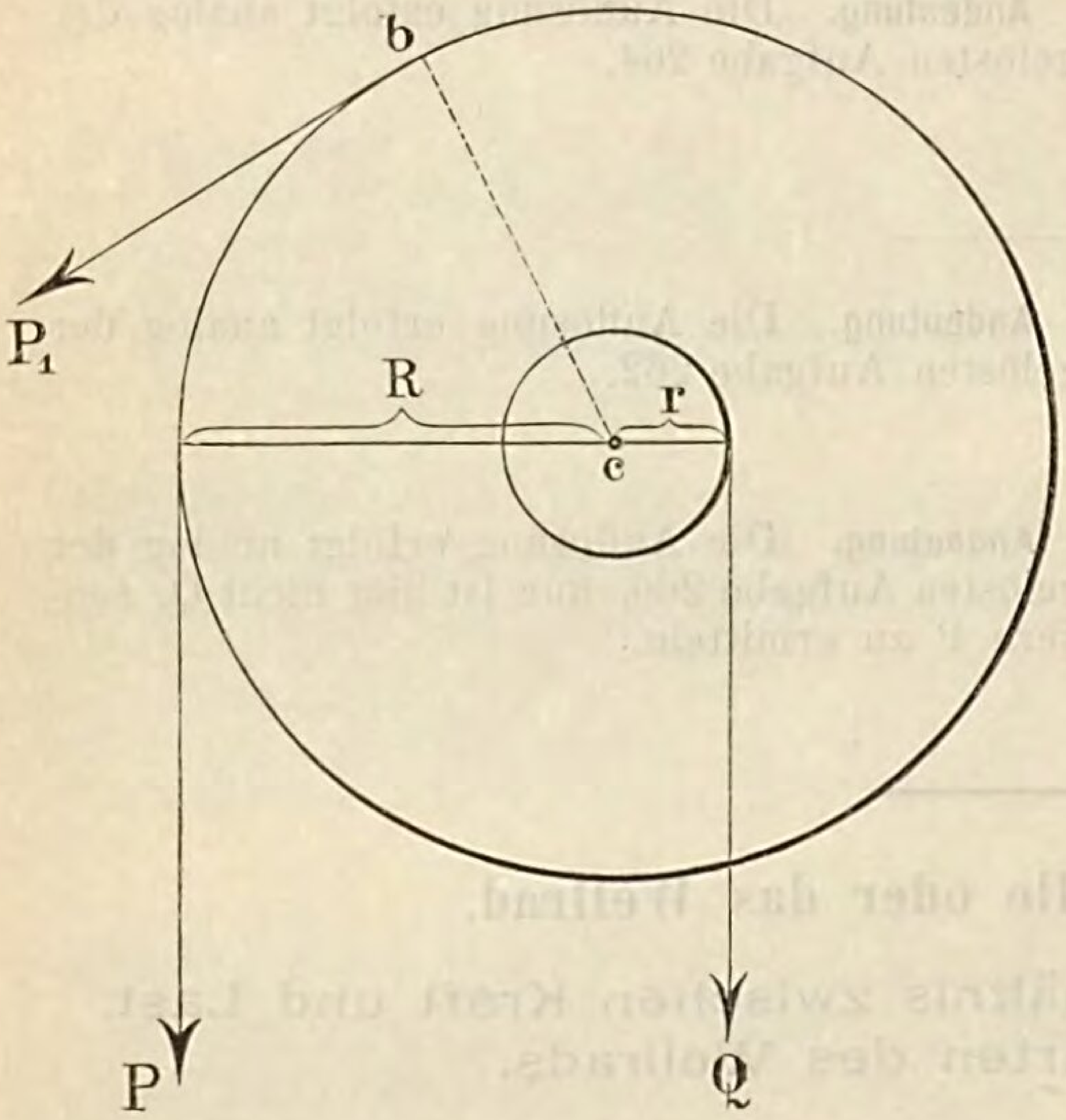
Erkl. 237. Damit das Seil nicht abgleite, ist es zuweilen mit Knoten versehen, welche hinter eiserne Gabeln fassen — Grössere Maschinen dieser Art sind gewöhnlich mit einem kleinen Sperrrad versehen, in welches ein Sperrhaken eingreift, damit die Last nicht herabfallen kann.

Antwort. Das Rad an der Welle oder das Wellrad (siehe Fig. 298) besteht in seiner einfachsten Form aus einem etwa 1,5 bis 6 m im Durchmesser haltendem Rad CC, welches mit einer langen, horizontalen, cylindrischen Walze, der Welle W fest verbunden ist, so, dass beide eine gemeinschaftliche Achse haben. Die Welle hat einen Durchmesser von etwa 15—45 cm und ist an ihren Enden mit zwei eisernen Zapfen versehen, welche durch Zapfenlager ZZ so gestützt sind, dass sich die ganze Vorrichtung leicht umdrehen lässt. Das Rad CC ist der Leichtigkeit wegen meist nicht massiv, sondern besteht in der Regel aus einem leichten Radkranz mit einer Rinne versehen, welche durch zwei an den Seiten befestigte parallele Ringe gebildet wird und worin ein mit dem Ende festgemachtes Seil liegt[1]), so, dass durch Ziehen an demselben das Rad nebst der Welle um die Zapfen läuft, wobei sich das, der Kraft zum Angriff dienende Seil vom Rad abwickelt, während sich zugleich ein zweites, an der Welle befestigtes Seil, welches die Last Q trägt, auf die Welle aufwickelt und somit die Last in die Höhe hebt.

[1]) Siehe Erkl. 237.

Frage 210. Auf welchem Prinzip beruht das Rad an der Welle und wenn ist dasselbe im Gleichgewicht?

Figur 299.



Erkl. 238. Da sich das Rad an der Welle nicht nur im Gleichgewicht, sondern meist im Zustand der Bewegung befinden soll, so muss die Kraft beträchtlich grösser sein als die nebenstehende, fürs Gleichgewicht aufgestellte Gleichung angibt; denn die Kraft muss bei eintretender Bewegung nicht nur die Reibung der Zapfen in den Lagern überwinden, sondern es wird auch durch die Bewältigung des Gewichts und der Steifheit der Seile ein beträchtlicher Teil der Kraft verzehrt. In der Praxis rechnet man den Reibungs- und Steifigkeitswiderstand gewöhnlich zu $\frac{1}{3}$, in günstigeren Fällen zu $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ der Last Q. Eine genaue Berechnung dieser Widerstände folgt in dem Abschnitt, welcher „die Bewegungshindernisse" behandelt.

Was das Gewicht des Seiles anbetrifft, so wird dasselbe immer geringer, je höher die Last gehoben wird, weshalb die Kraft in entsprechendem Verhältnis abnehmen kann. Will man aber, dass die am Rad wirkende Kraft unverändert bleibt, so kann man den Durchmesser der Welle in dem gleichen Verhältnis vergrössern als die Last durch Abnahme der Seillänge kleiner wird. Zu dem Zweck gibt man der Welle eine kegelförmige oder konische Gestalt, derart, dass beim Anfang des Aufzugs das Lastseil am dünnen Ende sich aufzuwickeln beginnt.

Noch ist zu bemerken, dass bei einer einmaligen Umwickelung des Lastseiles um die Welle, der Wellenhalbmesser, d. h. der Hebelarm der Last bis in die Mitte des Seiles zu rechnen ist. Wenn sich das Seil in mehreren Lagen aufwindet, so wächst nun dieser Halb-

Antwort. Das Rad an der Welle beruht auf dem für den Hebel gültigen Prinzip, denn die Leistung am Wellrad ist genau dieselbe, als ob Kraft und Last an einem zweiarmig-ungleicharmigen Hebel wirkten, dessen Arme durch die Halbmesser r und R dargestellt werden. Die Kraft P (siehe Fig. 299) wirkt am Radius R des Rades, die Last Q am Radius der Welle, so dass für den Fall des Gleichgewichts:

$$P \cdot R = Q \cdot r$$

oder:

$$P = \frac{Q\,r}{R}$$

oder:

1). $P : Q = r : R$

ist, d. h. **beim Rad an der Welle ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Radius der Welle zum Radius des Rades.** Da die Durchmesser zweier Kreise in demselben Verhältnis stehen wie ihre Radien, so kann man, wenn der Durchmesser des Rades D und der Durchmesser der Welle $\varDelta$ heisst, auch setzen:

$$P : Q = \varDelta : D$$

oder:

$$P \cdot D = Q \cdot \varDelta$$

Da aber die Dicke des um die Welle sich aufwickelnden Seils gegen den Durchmesser derselben oft nicht gering ist und daher mit in Rechnung kommen muss, so erhält man, wenn die Durchmesser des Rades und seines Seiles D und d, die der Welle und ihres Seiles $\varDelta$ und δ heissen, für den Fall des Gleichgewichts:

2). . . . $P(D + d) = Q(\varDelta + \delta)$

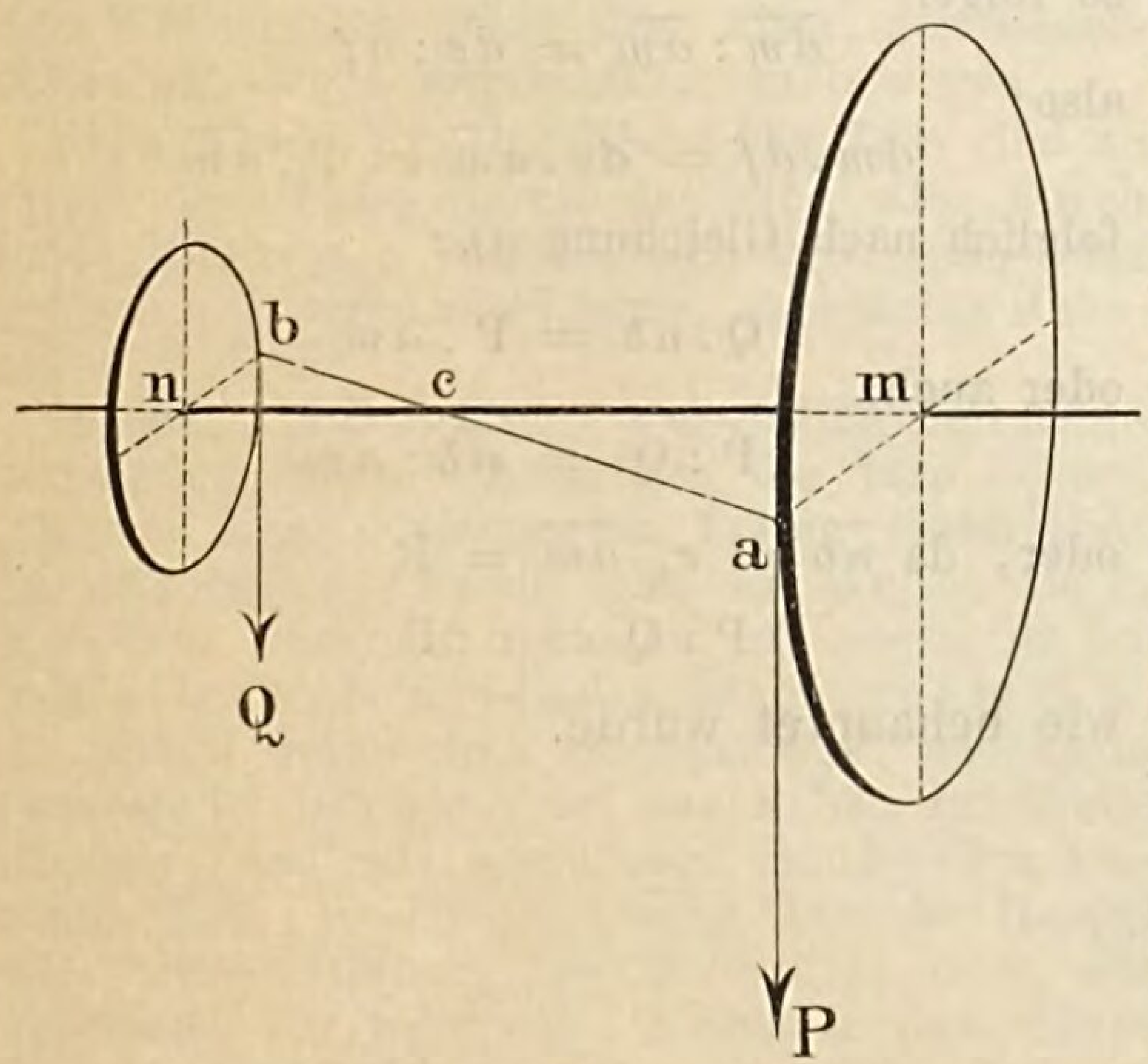
Dieses durch die obigen beiden Gleichungen 1). und 2). ausgedrückte Gesetz hat Gültigkeit, so lange die Richtung beider Seile mit der geometrischen Achse des Rades und der Welle zwei rechte Winkel bildet, mag ihre Richtung im übrigen in der hierdurch gegebenen senkrechten Ebene auch eine ganz beliebige sein, denn die Seilrichtungen werden sich stets als Tangenten an den Umfang des Rades und der Welle anlegen und daher im Angriffspunkt mit dem von der Achse aus an diesen Punkt gezogenen Radius allezeit einen rechten Winkel bilden, gleichwie die Richtung der Kraft P_1 (siehe Figur 299) mit dem Radius bc.

messer um ebensoviel ganze Seildicken und es muss alsdann auch die bewegende Kraft zunehmen. Wirkt auch die Kraft an einem Seil, so ist ihrem Hebelarm gleichfalls die halbe Seildicke auf beiden Seiten, also einmal die ganze Seildicke zuzuzählen, wie es in nebenstehender Gleichung 2). geschehen ist.

Erkl. 239. Aus dem in nebenstehender Antwort enthaltenen Gesetz folgt, dass man am Wellrad um so weniger Kraft gebraucht, je grösser R und je kleiner r, d. h. je grösser der Radius des Rades, an welchem die Kraft wirkt, im Verhältnis zum Radius der Welle, an welcher die Last wirkt, ist. Durch das Wellrad wird also an Kraft gespart, aber ebensoviel geht am Weg verloren.

Frage 211. Gilt das in der vorigen Antwort enthaltene Gesetz für das Wellrad auch dann, wenn Rad und Welle nicht unmittelbar aneinander, sondern in endlicher Entfernung voneinander auf gemeinsamer Achse befestigt sind, oder erleidet dann dieses Gesetz eine Abänderung?

Figur 300.



Antwort. Das in der vorigen Antwort enthaltene Gesetz für das Wellrad gilt auch dann, wenn Rad und Welle oder Kraftrolle und Lastrolle in endlicher Entfernung voneinander auf gemeinschaftlicher Achse befestigt sind, wie folgende mathematische Untersuchung beweist:

Es mögen zunächst Kraft und Last parallel gerichtet sein und zwar die Kraft P in a am Umfang der Rolle oder des Rades m und die Last Q in b am Umfang der Rolle oder der Welle n angreifen (siehe Fig. 300). Verbindet man a mit b, so muss $\overline{ab}$ die Achse $\overline{mn}$ schneiden, denn die Ebenen der Rollen sind parallel, da beide senkrecht zu $\overline{mn}$ stehen; ferner ist $P \parallel Q$ und $\measuredangle\, maP = \measuredangle\, nbQ$, da jeder $= 90^0$ in diesen Ebenen, daher $\overline{am} \parallel \overline{bn}$, folglich $\overline{am}$ und $\overline{bn}$ in einer Ebene, in der auch $\overline{mn}$ und $\overline{ab}$ liegen. Da nun a und b auf verschiedenen Seiten von $\overline{mn}$ liegen, so muss $\overline{ab}$ die Achse $\overline{mn}$ in c schneiden.

Soll nun das Wellrad im Gleichgewicht sein, so muss die Resultierende von P und Q durch den festen Punkt c der Achse gehen; hierzu ist aber erforderlich, dass

$$P : Q = \overline{cb} : \overline{ac}$$

ist; da aber

$$\triangle\, amc \sim \triangle\, bnc$$

also:

$$\overline{cb} : \overline{ac} = \overline{nb} : \overline{am}$$

so heisst die Bedingung:

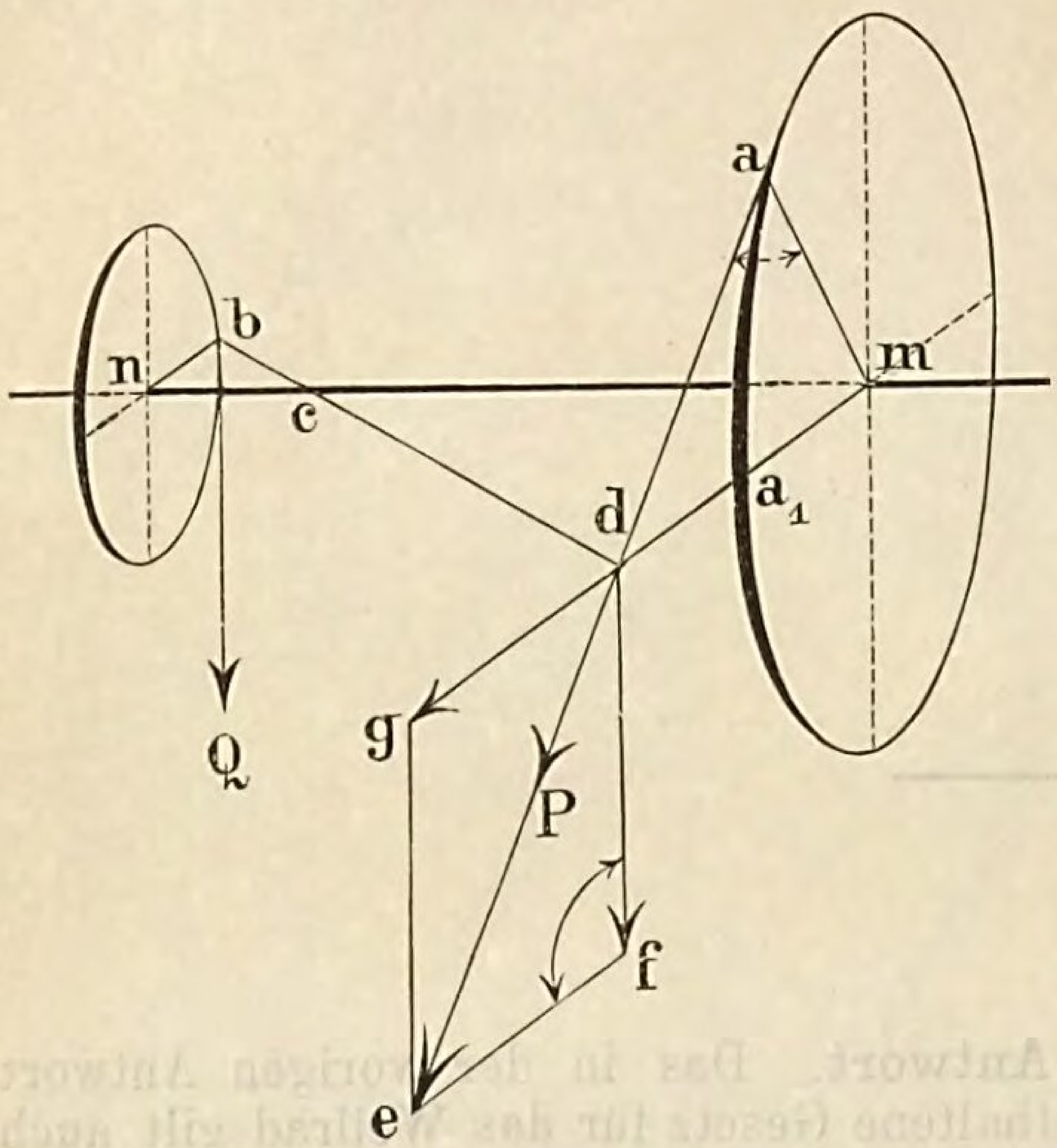
$$P : Q = \overline{nb} : \overline{am}$$

oder:

$$P : Q = r : R$$

wie behauptet wurde.

Figur 301.



Erkl. 240. Aus dem durch die Proportion:

$$P : Q = r : R$$

ausgedrückten Gesetz ergibt sich, dass an irgend einem Punkt des Umfangs des Rades eine Kraft

$$P = Q \cdot \frac{r}{R}$$

wirken muss, um der Last Q das Gleichgewicht zu halten. Es erzeugt daher der Druck Q, welcher am Umfang der Welle wirkt, auf einen beliebigen Punkt des Radumfangs einen Druck von der Grösse $Q \cdot \frac{r}{R}$; ebenso erzeugt ein am Umfang des Rades wirkender Druck P auf einen beliebigen Punkt des Wellenumfangs einen Druck von der Grösse $P \cdot \frac{R}{r}$.

In beiden Fällen sagt man, dass man den gegebenen Druck, Q oder P, auf einen bestimmten Punkt des Rad- oder Wellenumfangs reduziere. Man hat dabei nur zu beachten, dass eine in einer bestimmten Entfernung $= r$ vom Mittelpunkt der Radwelle wirkende Kraft Q in Punkten, die eine grössere Entfernung $= R$ vom Mittelpunkt haben, einen nach dem Verhältnis dieser Entfernung (Hebelarm) kleiner werdenden Druck erzeugt, und umgekehrt. Im ersteren Fall, bei weiter entfernten Angriffspunkten, hat man daher bei der Reduktion der Kraft Q diese mit einem aus den Radien r und R zu bildenden echten Bruch zu multiplizieren $\left(Q \cdot \frac{r}{R}\right)$, im letzteren Fall, wenn die Kraft auf einen dem Mittelpunkt näher liegenden Punkt zu reduzieren ist, muss dieselbe mit einem aus den Radien zu bildenden unechten Bruch multipliziert werden $\left(P \cdot \frac{R}{r}\right)$.

Wirken die Kräfte P und Q nicht parallel, wie in Fig. 301, so verlängere man P bis zum Durchschnitt mit der zu $\overline{nb}$ parallelen Geraden $\overline{ma_1}$ in d, verlege die Kraft P nach d ($\overline{de} = P$) und zerlege dieselbe nach dem Kräfteparallelogramm in zwei Seitenkräfte $\overline{df} \parallel Q$ und $\overline{dg}$ in der Richtung $\overline{ma_1}$ wirkend. Die Seitenkraft $\overline{dg}$ wird, da sie durch m geht, aufgehoben. Damit also das Wellrad in Ruhe ist, muss die Resultierende von $\overline{df}$ und Q die Achse $\overline{mn}$ schneiden. Zieht man $\overline{bd}$, so muss, weil $\overline{md} \parallel \overline{nb}$ gezogen ist, also beide Linien in einer Ebene und d und b auf verschiedenen Seiten von $\overline{mn}$ liegen, $\overline{db}$ die Achse $\overline{mn}$ schneiden. Die Bedingung dafür, dass der Schnittpunkt c der Angriffspunkt der Resultierenden von $\overline{df}$ und Q ist, lautet wiederum:

$$\overline{df} : Q = \overline{bc} : \overline{dc}$$

oder, weil $\triangle cnb \sim \triangle dmc$

ist: $\overline{df} : Q = \overline{nb} : \overline{md}$

oder auch:

$$\overline{df} . \overline{md} = Q . \overline{nb}$$

Da nun:

$$\triangle def \sim \triangle amd$$

($\sphericalangle a = \sphericalangle f = 90^0$ und $\sphericalangle adm = \sphericalangle def$)

so folgt:

$$\overline{dm} : \overline{am} = \overline{de} : \overline{df}$$

also:

$$\overline{dm} . \overline{df} = \overline{de} . \overline{am} = P . \overline{am}$$

folglich nach Gleichung a).:

$$Q . \overline{nb} = P . \overline{am}$$

oder auch:

$$P : Q = \overline{nb} : \overline{am}$$

oder, da $\overline{nb} = r$, $\overline{am} = R$

$$P : Q = r : R$$

wie behauptet wurde.

Erkl. 241. Es wird von dem Wellrad der vielseitigste Gebrauch gemacht, wonach dasselbe dann verschiedene Abänderungen erleidet, die einzeln besondere Namen erhalten, im ganzen aber in 2 Klassen, in Wellräder mit horizontaler u. vertikaler Welle zerfallen, obgleich es auch in seltenen Fällen gegen den Horizont geneigte Wellen gibt. Alle diese Apparate aber sind auf das nämliche Prinzip gegründet und gestatten daher eine gleiche Berechnung des Verhältnisses der Kraft und der Last wie das oben beschriebene Wellrad in seiner einfachsten Form.

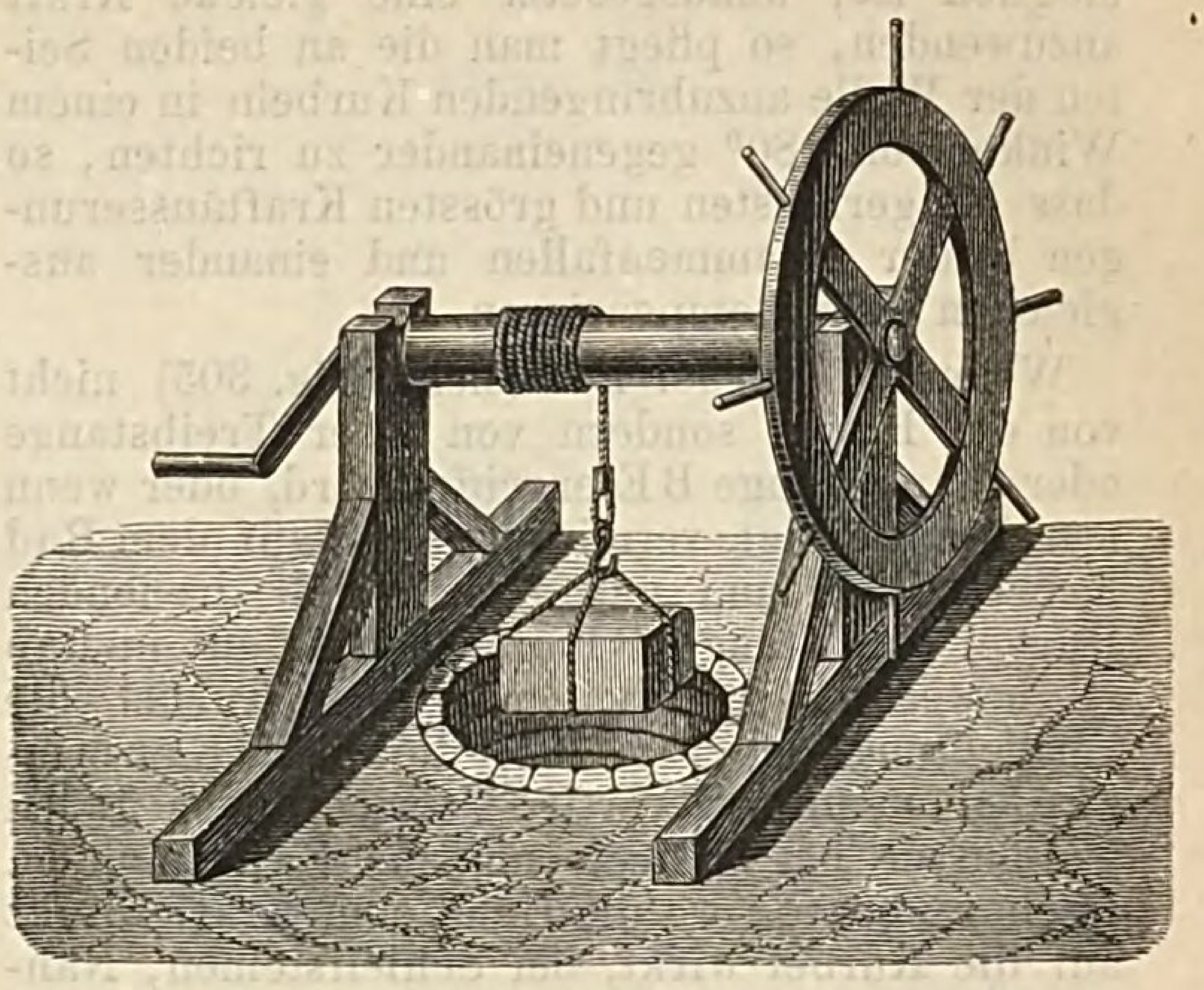
Ist die Welle horizontal, so heisst das Wellrad Haspel; ist dieselbe vertikal, so nennt man das Wellrad Winde oder Göpel. Immer greift die Kraft am Umfang des grossen Kreises, des Rades an, ganz einerlei, ob das Rad vollständig ist oder ob nur einige Radien desselben in Form sog. Speichen vorhanden sind, um der Kraft Angriffspunkte zu geben.

Zu den Wellrädern mit horizontaler Welle gehört das Spillenrad oder der Spillen- oder Radhaspel (siehe Fig. 302), bei welchem an das eine Ende der Welle ein mit Handhaben oder Spillen besetztes Rad befestigt ist, durch dessen Drehung die Welle sich ebenfalls dreht. Die Hand fasst eine Spille nach der andern und drückt sie stets in derselben Richtung fort, oder die beiden Hände fassen zwei diametral gegenüberstehende Spillen und drücken darauf in entgegengesetzter Richtung. In dieser Form begegnen wir dem Wellrad unter anderem bei dem Steuerrad, welches dazu dient, das Steuerruder auf den Dampfschiffen zu bewegen.

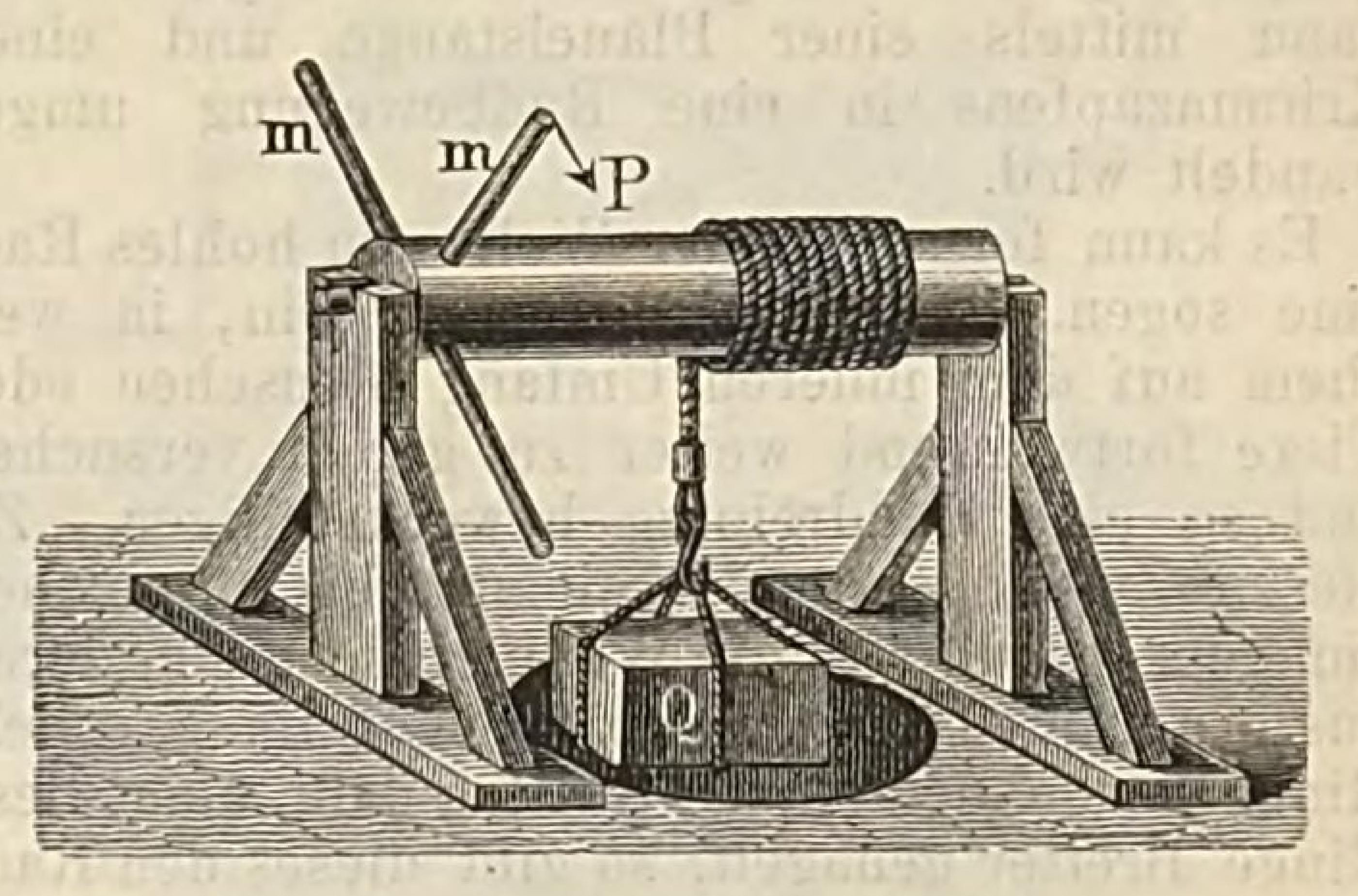
Beim Kreuzhaspel (siehe Fig. 303) sind an Stelle des Rades durch das eine oder durch beide Enden der Welle 4 sich kreuzende oder rechtwinklig treffende Bäume, sogenannte Hebearme, gesteckt.

In sehr vielen Fällen, namentlich bei Brunnenwinden, bei den Aufzügen, die dazu dienen, um aus nicht bedeutenden Tiefen Materialien heraufzuholen, versieht man die Welle, wie in Fig. 304, statt mit Speichen, an einem, in der Regel aber an beiden Enden, mit Kurbeln F, G, die nichts weiter sind als Speichen, welche in senkrechter Richtung auf der Achse der Welle befestigt und mit besonderen Handgriffen versehen sind. In der Zeichnung steht der Haspel über der Oeffnung des Schachtes oder des Brunnens, aus welchem die Last in dem Eimer E heraufgeschafft werden soll. Das Seil ist dabei einige Male um die Welle geschlungen, jedoch keines der Enden auf der Welle befestigt. An jedem Ende hängt ein Eimer, von denen der eine leere immer herabgeht, während der andere gefüllte in die Höhe steigt. Da die beiden Eimer nach entgegengesetzter Richtung auf die Welle wirken, so heben die aus ihrem Gewicht hervorgehenden Kräfte sich gegenseitig auf, so dass die an den Kurbeln arbeitenden Kräfte nur das Gewicht der in dem vollen Eimer befindlichen Materialien zu bewältigen haben. Da es bei den verschiedenen

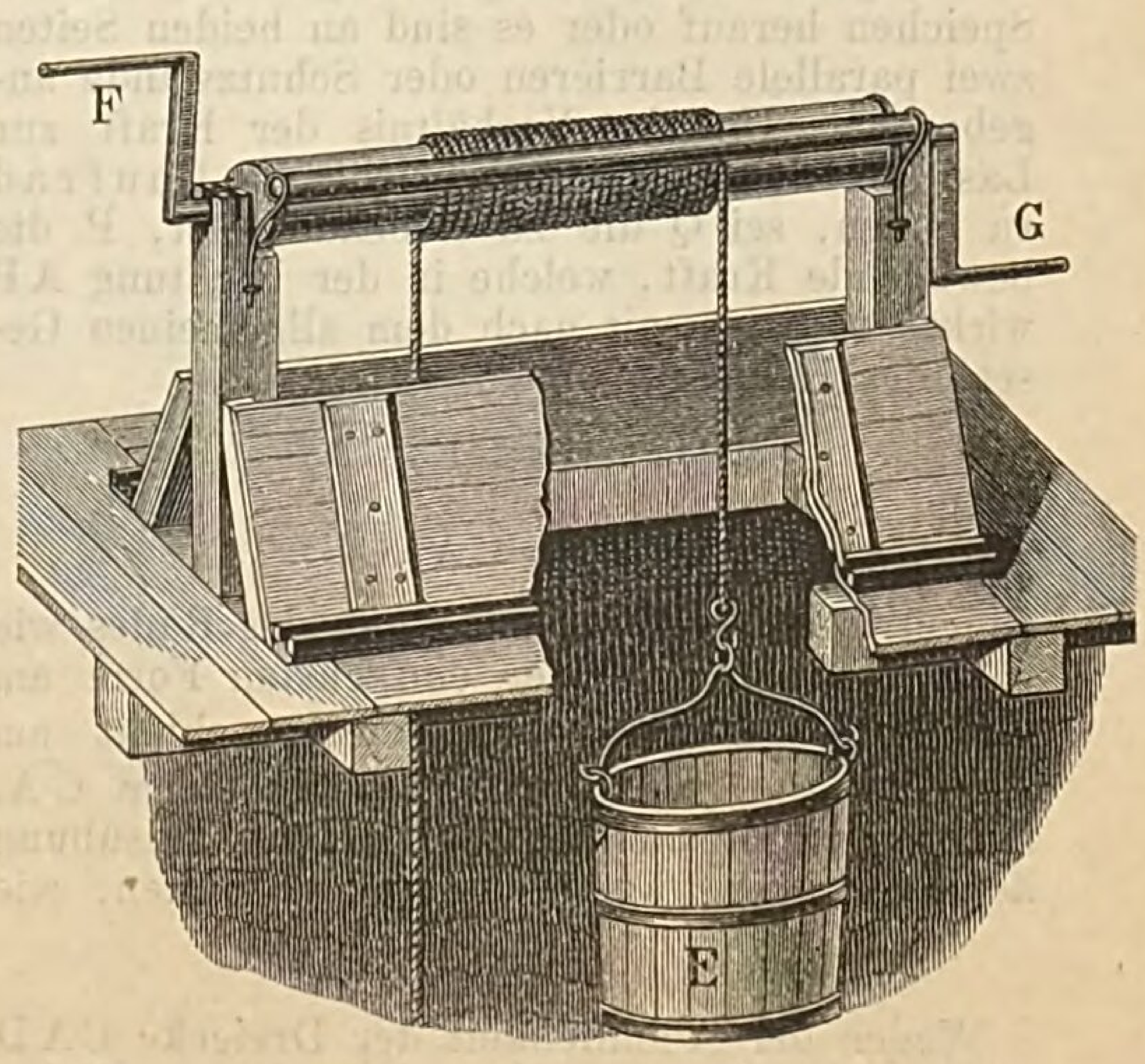
Figur 302.



Figur 303.



Figur 304.



Stellungen, welche die Arbeiter beim Drehen an den beiden Kurbeln annehmen müssen, unmöglich ist, unausgesetzt eine gleiche Kraft anzuwenden, so pflegt man die an beiden Seiten der Welle anzubringenden Kurbeln in einem Winkel von 180° gegeneinander zu richten, so dass die geringsten und grössten Kraftäusserungen beider zusammenfallen und einander ausgleichen oder kompensieren.

Wenn die Kurbel BD (siehe Fig. 305) nicht von der Hand, sondern von einer Treibstange oder Bläuelstange BE ergriffen wird, oder wenn man beabsichtigt, vermittelst einer auf dem Rad R befestigten und mit diesem sich drehenden Kurbel eine Stange BE geradelinig auf und ab zu bewegen, so gibt man der Kurbel die Einrichtung der Fig. 305, die man Krummzapfen nennt. Derartige Vorrichtungen finden wir ausser bei Kaffeetrommeln, Kaffeemühlen, Drehorgeln etc., wo die Hand oder Kraft direkt auf die Kurbel wirkt, bei Schleifsteinen, Nähmaschinen, Spinnrädern, Drehbänken u. Dampfmaschinen, wo die bewegende Kraft zunächst eine hin- und hergehende oder eine auf- und niedersteigende Bewegung hervorbringt, welche dann mittels einer Bläuelstange und eines Krummzapfens in eine Radbewegung umgewandelt wird.

Es kann ferner an der Welle ein hohles Rad, eine sogen. Trommel befestigt sein, in welchem auf dem inneren Umfang Menschen oder Tiere fortwährend weiter zu gehen versuchen und so eine Raddrehung bewerkstelligen. Zu diesem Zweck werden zweimal 4 bis 8 Speichen einander parallel in die Welle eingelassen, deren äussere Enden durch zwei gleichfalls parallele Ringe verbunden sind. Werden dann über diese Ringe Bretter genagelt, so gibt dieses den Radkranz, in welchem Menschen oder Tiere sich bewegen (siehe Fig. 306) und durch ihr Gewicht das Rad umdrehen. Damit diese nicht herausfallen, gehen die genannten Ringe hoch an den Speichen herauf oder es sind an beiden Seiten zwei parallele Barrièren oder Schutzwände angebracht. Um das Verhältnis der Kraft zur Last bei dem eben beschriebenen Laufrad zu finden, sei Q die zu hebende Last, P die bewegende Kraft, welche in der Richtung AP wirkt; es ist somit nach dem allgemeinen Gesetz des Hebels:

$$Q \cdot \overline{CB} = P \cdot \overline{CA}$$

oder:

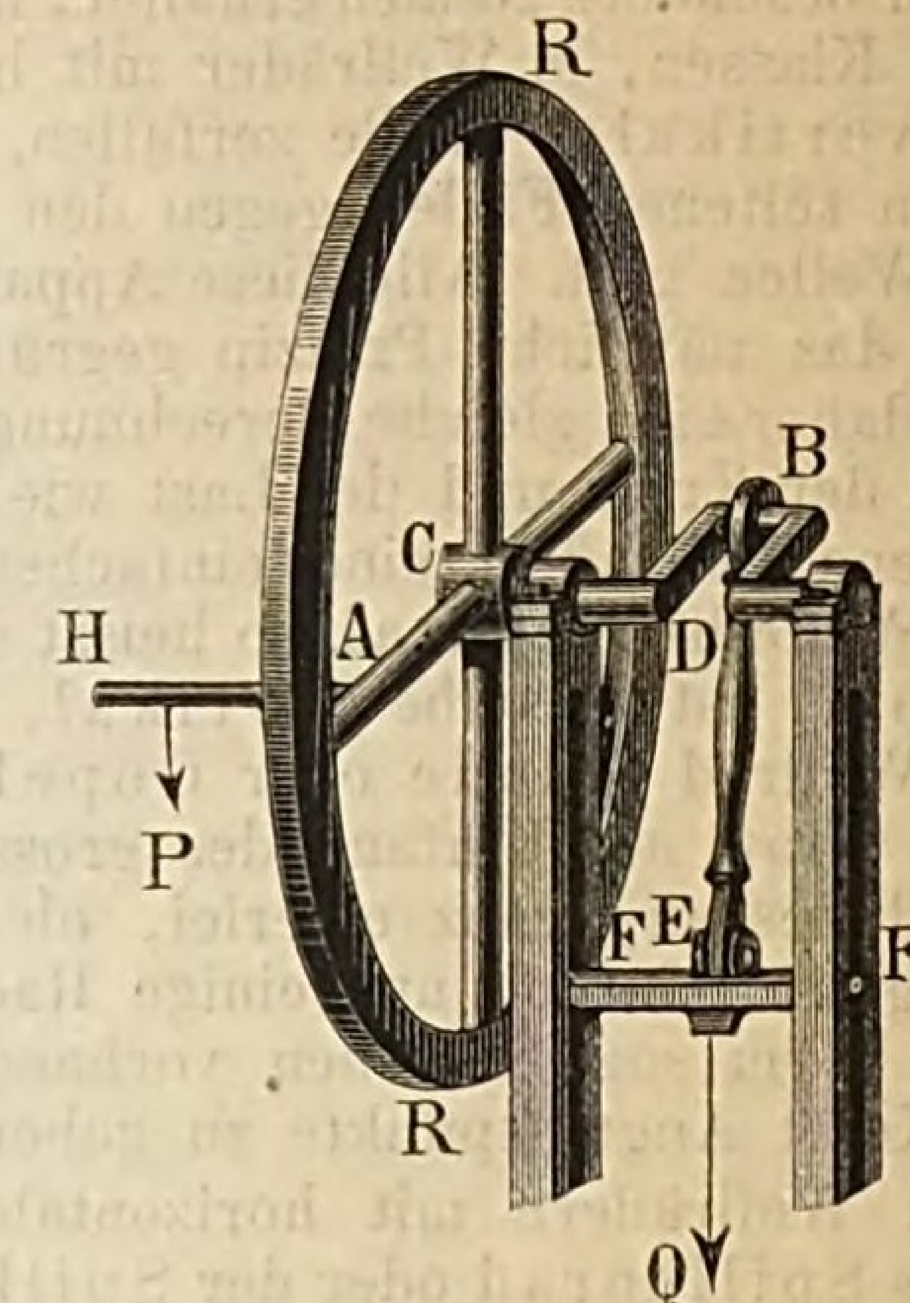
$$Q : P = \overline{CA} : \overline{CB}$$

Eigentlich sollte die Umdrehung des Rades wie beim Wellrad in seiner einfachsten Form am Hebelarm $\overline{CD}$ geschehen, sie geschieht am Laufrad aber nur durch den Hebelarm $\overline{CA}$, mithin verhält sich die wirklich zur Ausübung kommende Kraftäusserung zur absoluten, wie

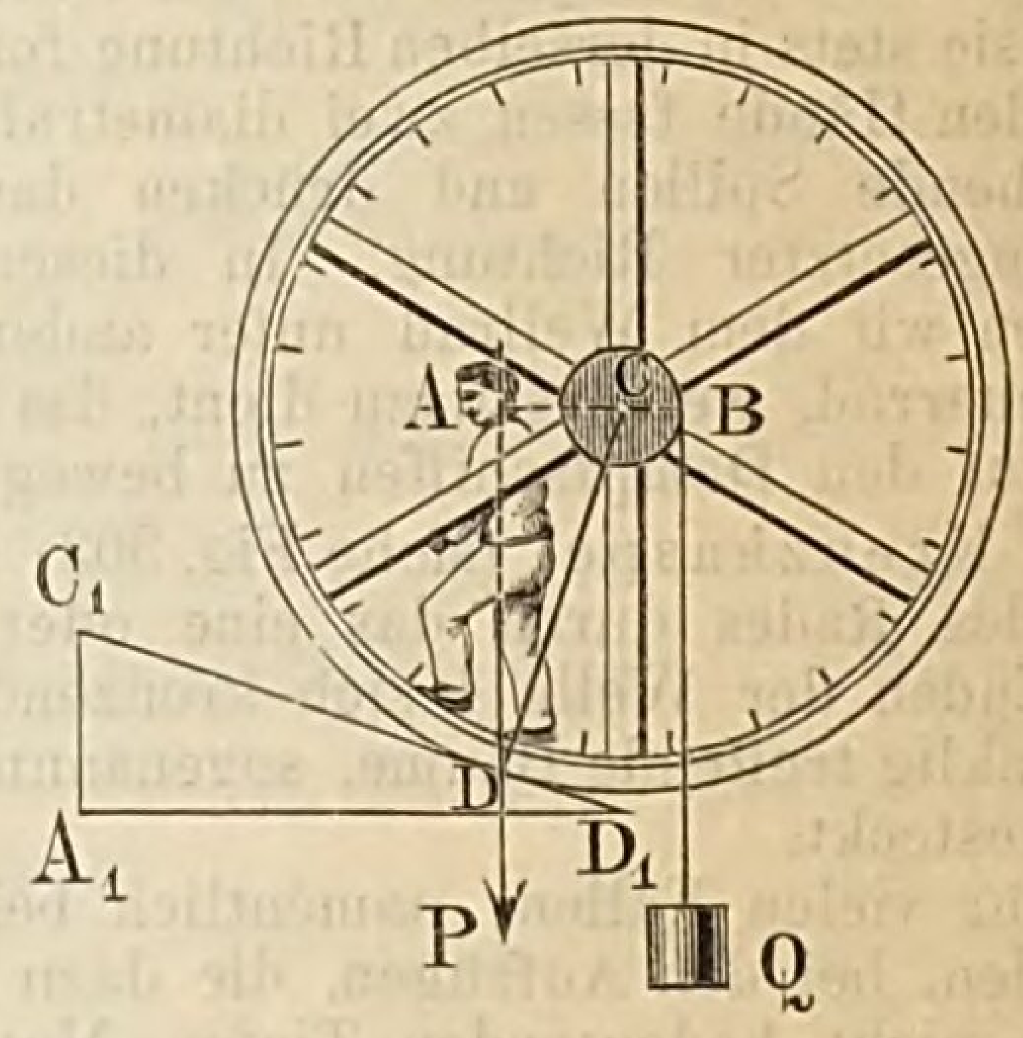
$$\overline{CA} : \overline{CD}$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CAD und $C_1A_1D_1$ ist also die Arbeit die nämliche,

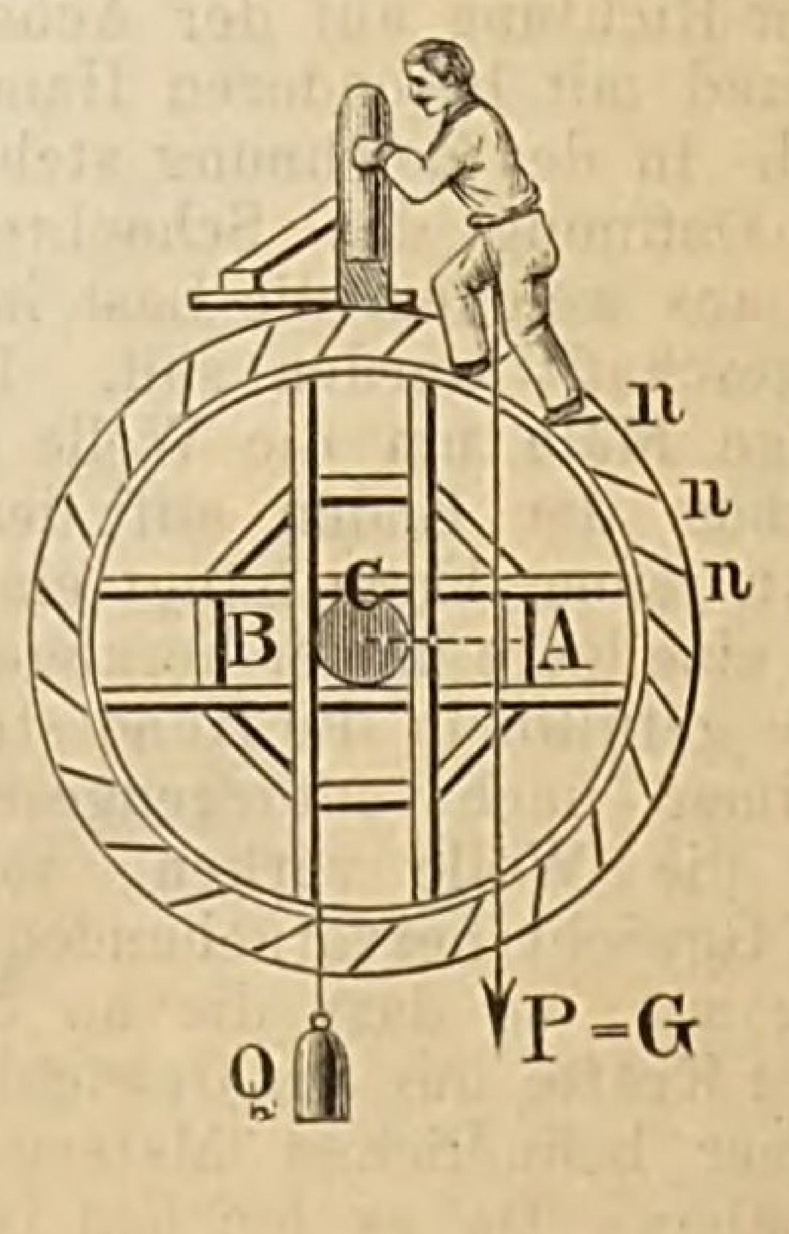
Figur 305.



Figur 306.



Figur 307.

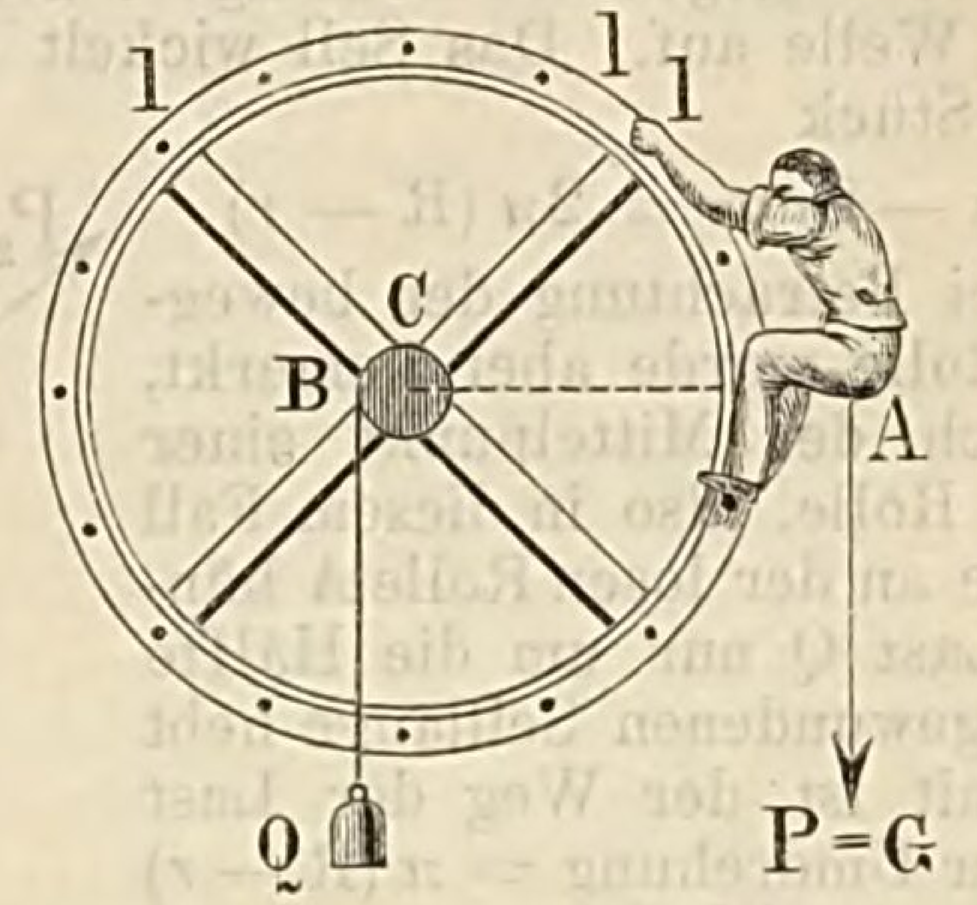


als ob der Mensch oder das Tier sein eigenes Gewicht auf der geneigten Ebene C_1D_1 bewegt, und da diese Art der Kraftanwendung keineswegs die vorteilhafteste ist, so folgt daraus, dass auch die Laufräder keinen besonderen Vorteil gewähren.

Dasselbe gilt von dem Tretrad (siehe Fig. 307), bei welchem auf dem Radumfang Trittbretter oder Stufen *n n* angebracht sind, auf welche gewöhnlich ein Arbeiter tritt und durch sein Gewicht G die Maschine in Bewegung setzt.

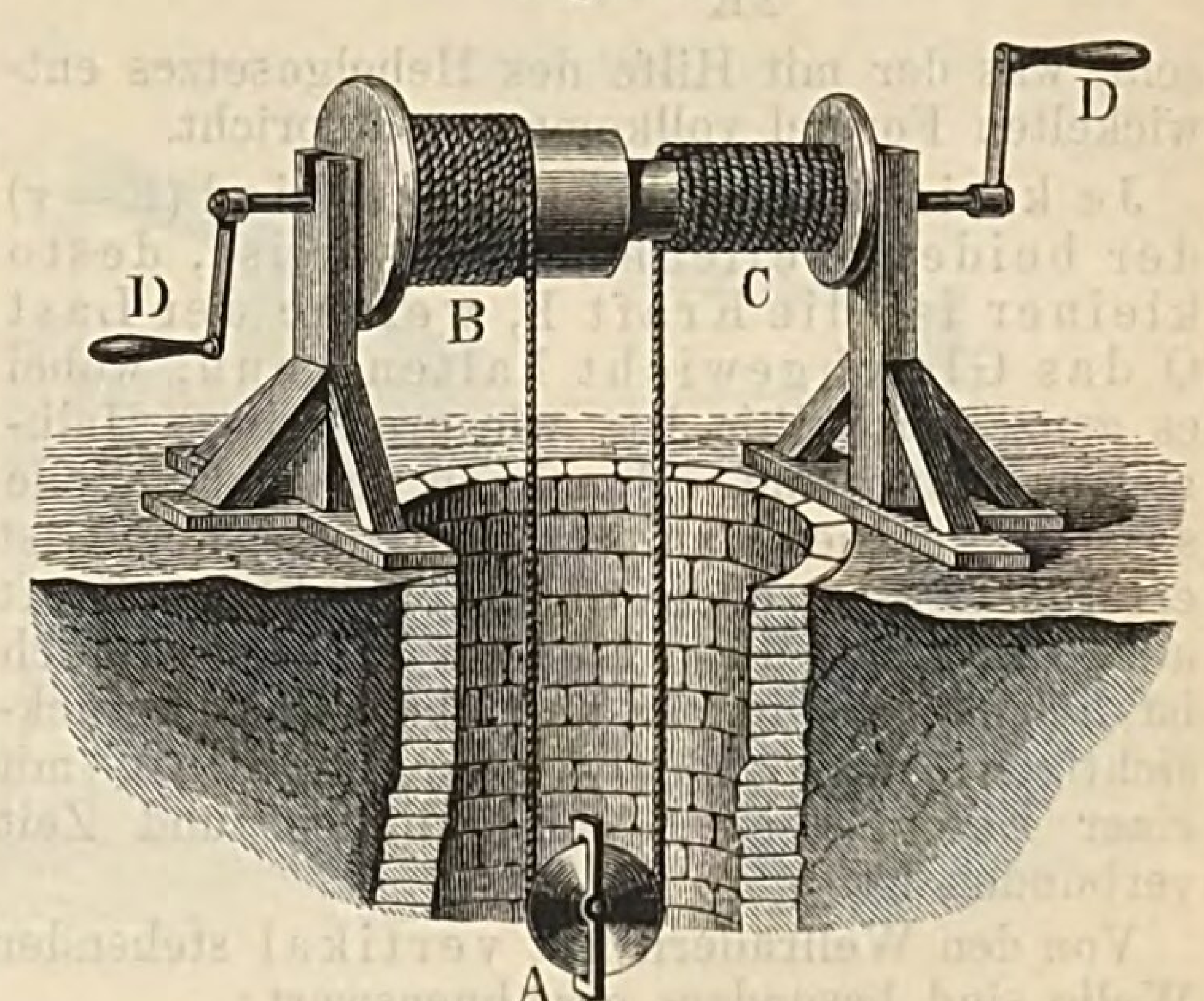
Sind aber anstatt der Tritte Sprossen *l l* (siehe Fig. 308) angebracht, an welchen man wie an einer Leiter emporklettert, so heisst die Maschine Sprossenrad.

Figur 308.



Aus den bisherigen Untersuchungen hat sich ergeben, dass man mit einer um so kleineren Kraft selbst einer sehr bedeutenden Last am Haspel das Gleichgewicht halten kann, je kleiner der Halbmesser der Welle ist im Verhältnis zu der Länge des Hebelarms, an welchem die Kraft arbeitet. Durch fortwährende Verkleinerung jenes Halbmessers würde man also eine beständige Vermehrung des Kraftgewinnes erhalten; in der Wirklichkeit aber kommt man dabei sehr bald zu einer gewissen Grenze, welche man nicht überschreiten darf, wenn man die Festigkeit der Welle nicht gefährden will. Ist daher die durch einen Haspel zu hebende Last sehr bedeutend und steht zu deren Förderung nur eine verhältnismässig kleine Kraft zu Gebot, so gibt man der Welle, wie es in Fig. 309 abgebildet ist, in ihren beiden Hälften verschiedene Durchmesser. Die Last Q hängt an dem Haken einer losen Rolle A und die Seilenden sind in entgegengesetztem Sinn um die beiden ungleich dicken Wellenhälften geschlungen, so dass bei erfolgter Drehung mittels der Kurbeln D D sich das Seil auf dem dickeren Cylinder auf- und von dem dünneren abwickelt, wodurch ein Heben der Last erfolgt. Man nennt eine solche Vorrichtung Differentialwelle oder chinesische Winde.

Figur 309.



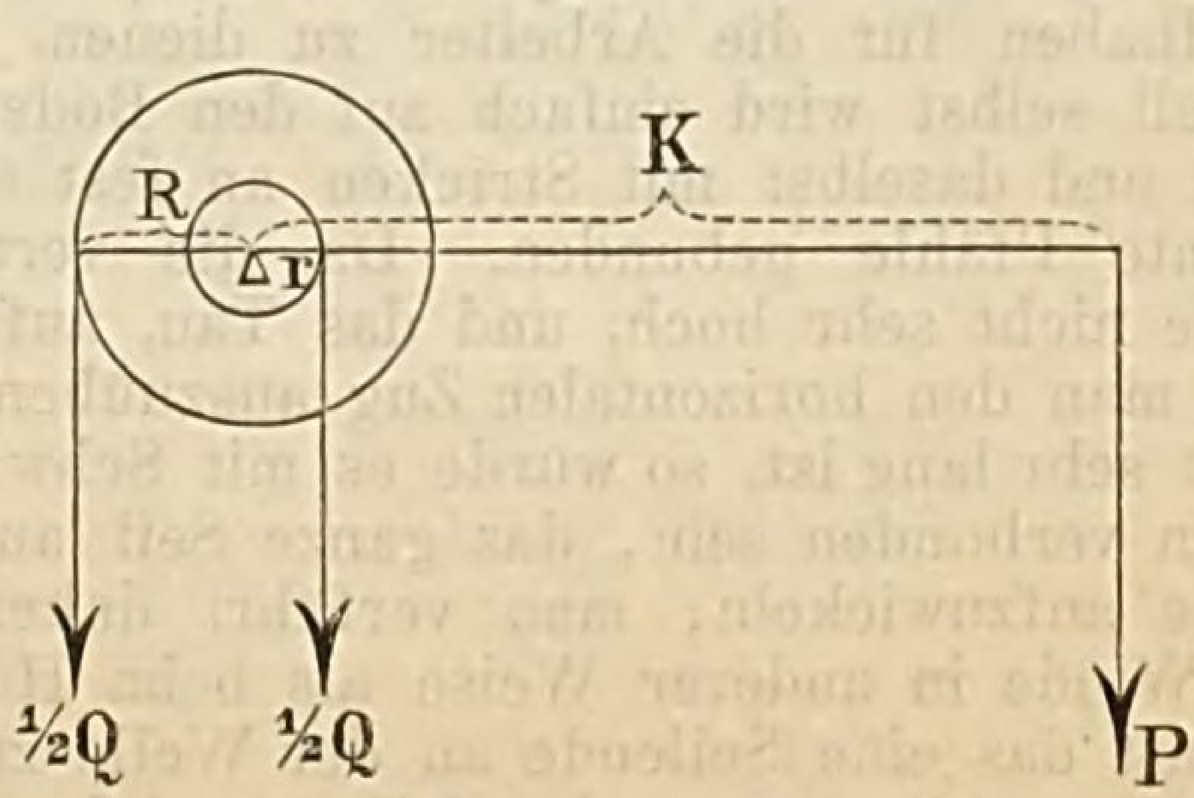
Bezeichnet man nun den Radius des stärkeren Cylinders B mit R, den des dünneren C mit *r* und die Kurbellänge mit K, und zieht man in Erwägung, dass die am kleineren Cylinder sich abwickelnde Last $\frac{1}{2}$Q in der Richtung der Kraft wirkt, dieselbe also unterstützt, so muss nach dem Hebelgesetz für den Fall des Gleichgewichts

$$\frac{1}{2}Qr + PK = \frac{1}{2}QR$$

sein (siehe Fig. 310). Hieraus ergibt sich für die Kraft:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{\frac{1}{2}Q(R - r)}{K}$$

Figur 310.



Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man die Wege vergleicht, welche bei einer Kurbelumdrehung von der Kraft und Last zurückgelegt werden. Ist wieder K die Kurbellänge, so ist der Weg der Kraft bei einer Umdrehung =

$2 K \pi$. Während dieser Umdrehung hebt sich aber die Last nur um eine Höhe, welche die Hälfte des Unterschieds der beiden Wellenumfänge beträgt, denn es wickelt sich bei einer Umdrehung die Seillänge $2 r \pi$ von der dünneren Welle ab, dagegen die Seillänge $2 R \pi$ auf die dickere Welle auf. Das Seil wickelt sich also um ein Stück

$$2 R \pi - 2 r \pi = 2 \pi (R - r)$$

auf. Bei Betrachtung der beweglichen Rolle wurde aber bemerkt, dass sich der Mittelpunkt einer solchen Rolle, also in diesem Fall auch die an der losen Rolle A hängende Last Q nur um die Hälfte der aufgewundenen Seillänge hebt und somit ist der Weg der Last bei einer Umdrehung $= \pi (R - r)$ und es muss folglich:

$$P \,.\, 2 K \pi = Q \,.\, \pi (R - r)$$

also

$$P = \frac{R - r}{2 K} \cdot Q$$

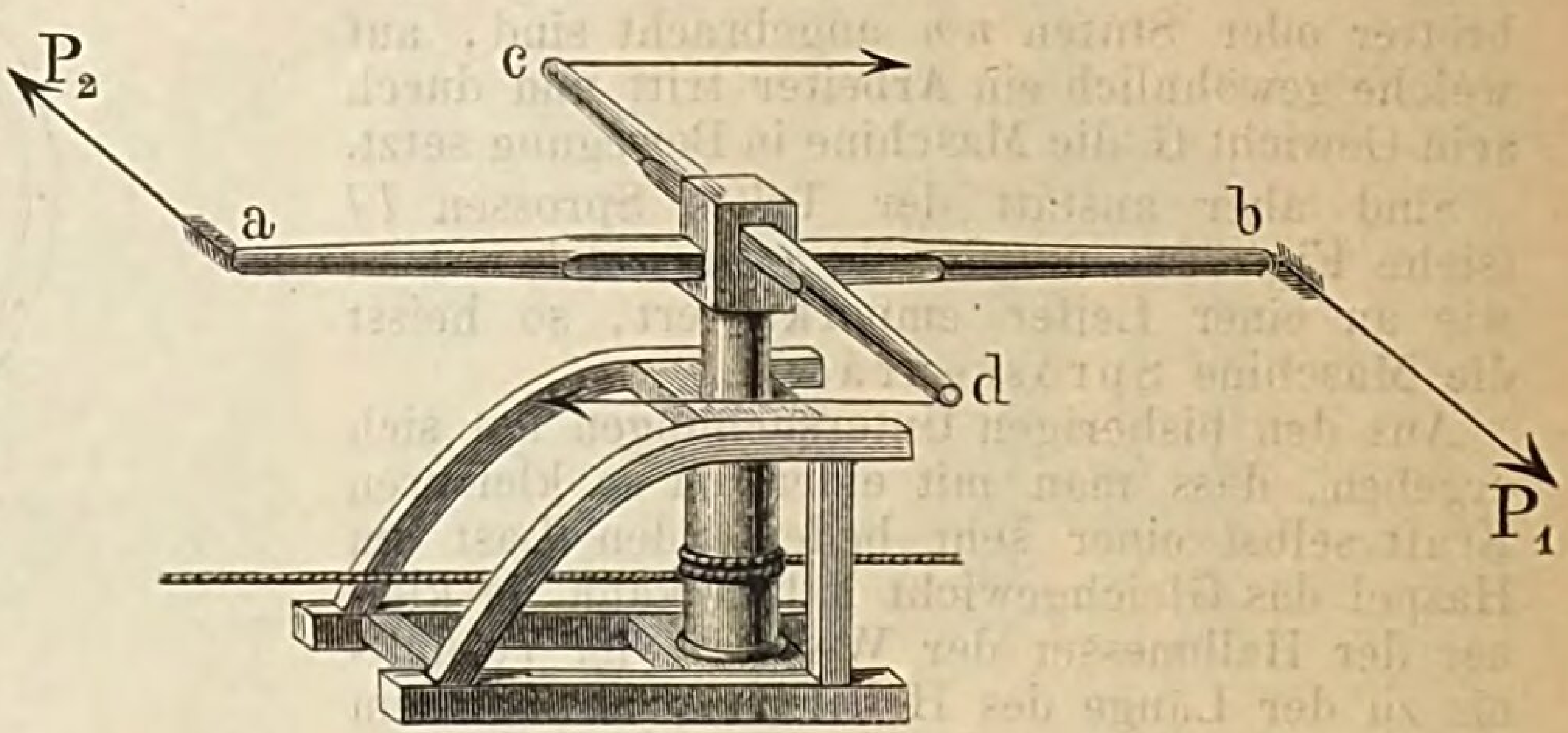
sein, was der mit Hilfe des Hebelgesetzes entwickelten Formel vollkommen entspricht.

Je kleiner also der Unterschied $(R - r)$ der beiden Wellenhalbmesser ist, desto kleiner ist die Kraft P, welche der Last Q das Gleichgewicht halten kann, wobei es ganz gleichgiltig ist, wie gross diese Halbmesser selbst sind. Man kann daher die Welle so stark machen, als es die Grösse der Last erfordert, und doch reicht eine kleine Kraft aus, um damit diese Last zu heben. Freilich ist hierbei, wie immer und überall, zu berücksichtigen, dass jeder Gewinn an Kraft mit einer Einbusse an Geschwindigkeit und Zeit verbunden ist.

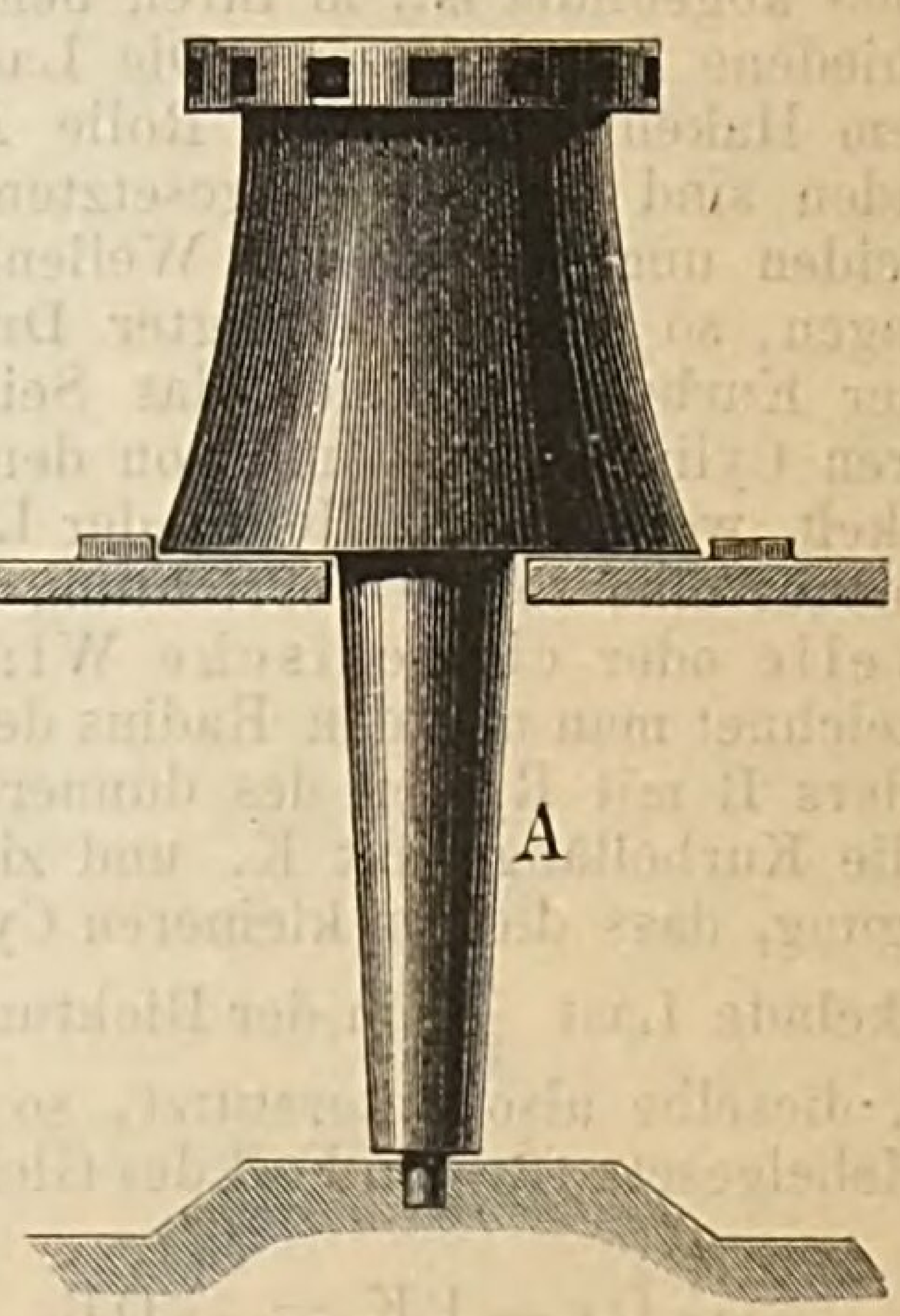
Von den Wellrädern mit vertikal stehender Welle sind besonders erwähnenswert:

1). Die Erdwinde, Gang- oder Laufspille, welche Fig. 311 zeigt. Die Welle ist über das Gestell hinaus verlängert und hat an ihrem Ende einen viereckigen Kopf, durch welchen vier oder mehr Arme gesteckt sind, um als Handhaben für die Arbeiter zu dienen. Das Gestell selbst wird einfach auf den Boden gestellt und daselbst mit Stricken an fest eingerammte Pfähle gebunden. Da die vertikale Welle nicht sehr hoch, und das Tau, auf welches man den horizontalen Zug auszuüben hat, meist sehr lang ist, so würde es mit Schwierigkeiten verbunden sein, das ganze Seil auf die Welle aufzuwickeln; man verfährt daher bei der Winde in anderer Weise als beim Haspel. Anstatt das eine Seilende an der Welle zu befestigen, schlingt man das Seil nur einige Male um diese herum und lässt an seinem freien Ende durch einen Arbeiter einen so starken Zug auf dasselbe ausüben, dass es auf der Welle nicht gleiten oder rutschen kann. Beim Drehen der Winde befindet sich stets eine gleiche Seilmenge auf der Welle, weil sich bei

Figur 311.



Figur 312.



der vorhandenen Spannung der beiden Seilenden immer so viel auf der einen Seite neu aufwindet, als auf der anderen abgewickelt wird. Um das Seil mit geringer Kraft am Gleiten zu verhindern, versieht man häufig die Welle mit Längsrippen.

Die Bedingungen des Gleichgewichts lassen sich in ähnlicher Art, wie bei dem Haspel, leicht aufstellen. Der Zug, welchen der eine Arbeiter am freien Ende des Seiles ausübt, hält einem gleich grossen Zuge der Last am andern Seile das Gleichgewicht, da für beide die Hebelarme, nämlich der Halbmesser der Welle, gleich sind; der übrige Teil der Last muss durch die Kraft, welche an den Hebeln wirkt, im Gleichgewicht gehalten werden.

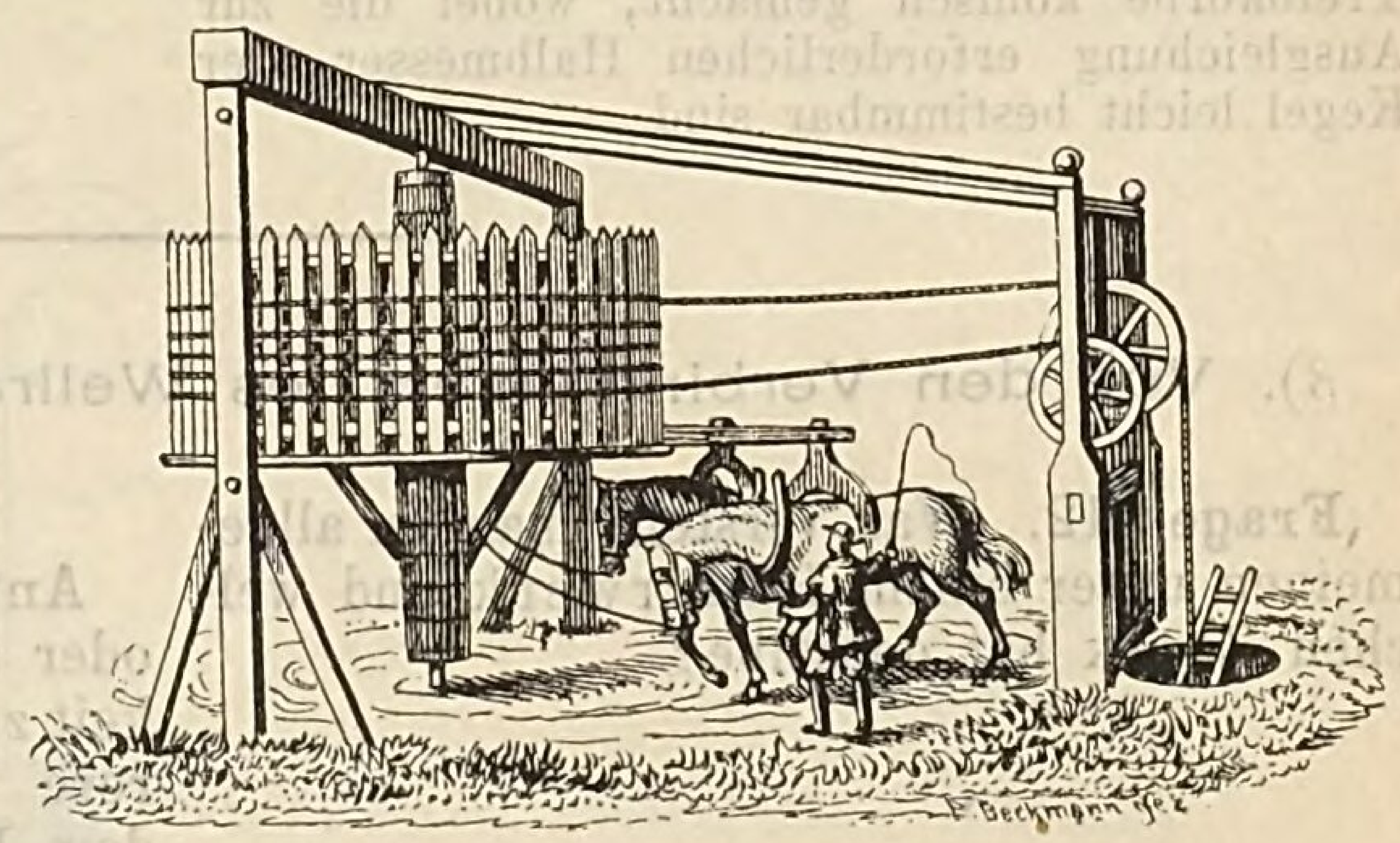
Bezeichnet man daher die Last mit Q, die Kraft, mit welcher der Arbeiter das freie Seilende zieht, mit q, die Kraft, mit welcher ein Arbeiter an einem Hebel arbeitet, mit P, den Halbmesser der Welle mit r, die Länge eines Hebels mit R, so hat die Kraft P nur noch einer Last $(Q - q)$ das Gleichgewicht zu halten. Letztere Kraft wirkt an dem Hebelarm r, wogegen die Kraft P an dem Hebelarm R arbeitet; es ist daher an der Erdwinde Gleichgewicht vorhanden, wenn

$$P \cdot R = (Q - q) \cdot r$$

woraus folgt:

$$P = (Q - q) \cdot \frac{r}{R}$$

Figur 313.



2). Die am meisten gebräuchliche Winde ist die **Schiffswinde**, deren man sich hauptsächlich auf den Schiffen zum Heben der schwersten Lasten, namentlich der Anker bedient, weshalb sie sehr stark und meistens von Eisen zu sein pflegt. Sie besteht aus einem starken unten auf einem eisernen Zapfen ruhenden Kegel A, welcher bis an das Verdeck reicht, dort einen ziemlich breiten, die Oeffnung ganz bedeckenden Ring hat, über welchem ein Cylinder oder meistens ein nach oben etwas verjüngter abgekürzter Kegel befindlich ist, dessen oberer Teil abermals einen mit vielen Löchern versehenen Kranz trägt, um die zur Ersparung des Raumes bloss eingesteckten Stangen aufzunehmen, vermittelst deren die Winde umgedreht wird.

3). Der **Göpel**, meistens **Pferdegöpel** genannt, siehe Fig. 313, wird vielfach zum Aufwinden grosser Lasten aus der Tiefe, namentlich der Erze aus den Bergwerken angewandt und meistens durch Pferde, zuweilen aber auch durch Wasser betrieben. Derselbe besteht gewöhnlich aus einer um ihre Achse drehbaren Säule, dem **Spindelbaum**, oben mit einer Trommel, dem **Treibkorbe**, unten mit einem oder mehreren Hebelarmen, den **Kreuzbäumen**, versehen, vermittelst deren die Maschine zuerst nach der einen und dann nach der entgegengesetzten Seite abwechselnd umgedreht wird. Um den Treibkorb sind Seile oder Ketten nach entgegengesetzten Seiten gewunden, so dass das

eine auf und das andre gleichzeitig abgewickelt wird und die Tonne des einen heraufsteigt, wenn die des andern herabsinkt. Indem hierdurch dem Zeitverlust des nutzlosen Herablassens vorgebeugt, auch die erforderliche Kraft durch das Gewicht der leer herabgehenden Tonne vermindert wird, beide Seile aber vom Treibkorbe aus in nahe horizontaler Richtung bis zur Oeffnung fortlaufen und dort über Rollen oder Walzen herabhängen, deren Höhe bis zur Mitte des ihrem Seil zugehörigen Teils des Treibkorbs reicht, so ist hiermit alles zweckmässig genug eingerichtet; allein bei sehr bedeutenden Tiefen kommt durch das Gewicht des einen Seils, woran die beladene Tonne vom tiefsten Punkt an aufgewunden werden soll, während die leere Tonne herabzugehen anfängt, ein bedeutendes Uebergewicht auf die eine Seite, nimmt allmählich mit der Verlängerung des Seils an der leeren Tonne und Verkürzung des an der beladenen ab, bis beide sich ausgleichen und die erforderliche bewegende Kraft $K = 0$ wird; von hier an wird das Seil der leeren Tonne schwerer und wächst als negatives K. Um diesem Uebelstand abzuhelfen, hat man die Treibkörbe konisch gemacht, wobei die zur Ausgleichung erforderlichen Halbmesser der Kegel leicht bestimmbar sind.

β). Von den Verbindungen des Wellrads oder den Räderwerken.

Frage 212. Was versteht man im allgemeinen unter einem **Räderwerk** und welchen Zweck hat dasselbe?

Antwort. Um grosse Lasten zu heben oder auch um eine bedeutende Geschwindigkeit zu erzeugen, verbindet man häufig mehrere Wellräder so miteinander, dass von dem Radumfang des einen auf den Wellenumfang des andern oder auch umgekehrt eine Kraftübertragung stattfindet. Eine solche Verbindung von Wellrädern wird gemeinhin ein **Räderwerk** genannt.

Frage 213. Auf welche Art und Weise geschieht die Kraftübertragung bei einem solchen Räderwerk?

Antwort. Die Kraftübertragung bei einem solchen Räderwerk geschieht entweder:

1). mittels **Riemenscheiben**, oder

2). mittels der **Friktions-** oder **Reibungsräder**, oder

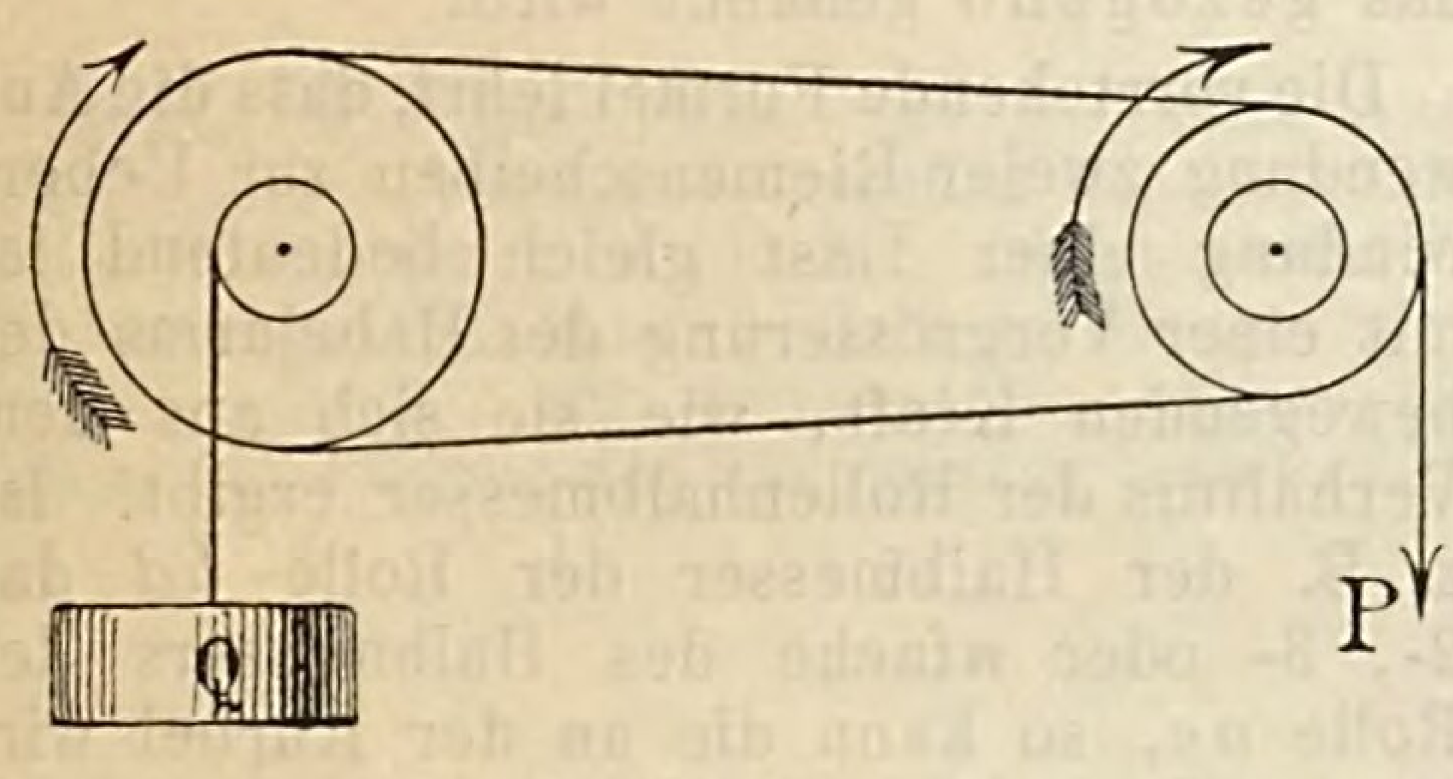
3). mittels der **Zahnräder**.

Frage 214. Unter welchen Umständen wendet man zur Kraft- oder Bewegungsübertragung von einem Wellrad zum andern **Riemenscheiben** an und wie geht bei denselben die Bewegungsübertragung vor sich?

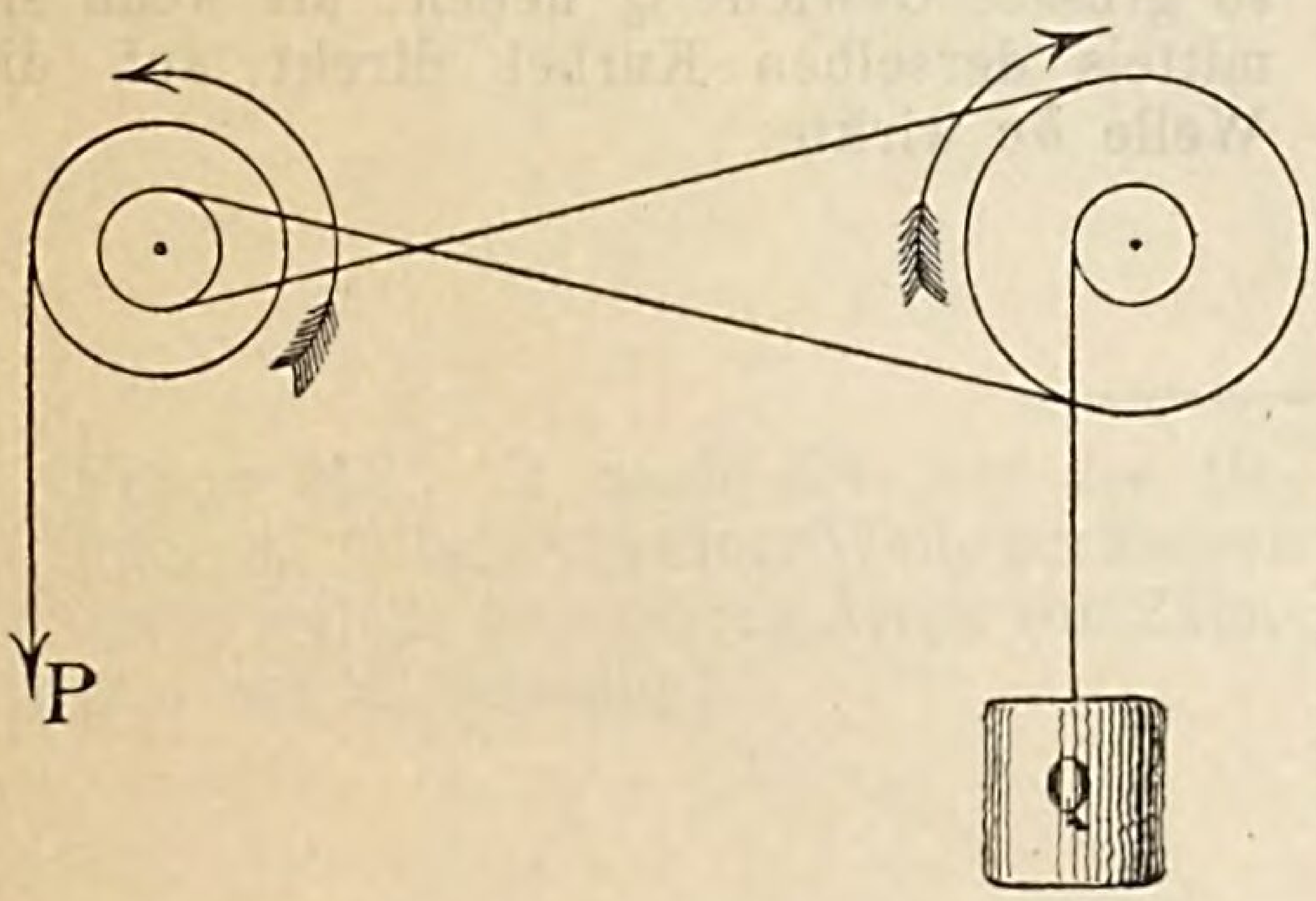
Antwort. Wenn man die Drehung eines Wellrads auf ein anderes nahezu in derselben Ebene liegendes übertragen will, wobei die Entfernung der Wellen gross,

Erkl. 242. In Amerika wird der Riemenbetrieb viel mehr als bei uns und auch für grosse Kraftübertragungen bis über 500 Pferdestärken angewandt. Die hierbei verwendeten Riemen müssen aber eine bedeutende Breite (bis 1,5 m) haben. Selbst Uebertragungen bis zu 1000 Pferdekräften kommen mit Anwendung von mehreren Riemen vor. Solche bedeutende Uebertragungen sind dadurch erklärlich, dass infolge der auf der Innenseite des Riemens eintretenden Luftverdünnung aussen der Atmosphärendruck zur Wirkung gelangt.

Figur 314.



Figur 315.



die zu übertragende Kraft aber nicht zu gross ist[1]), so wendet man zwei Riemenscheiben oder Trommeln an, die auf den beiden Wellen befestigt sind und von einem Riemen, einem Seil oder einer Kette ohne Ende so fest umschlungen sind, dass bei eintretender Bewegung der einen Welle durch die in dem Riemen eintretende Spannung eine solche Reibung zwischen ihm und dem Rollenumfang entsteht, dass das Gleiten des Riemens dadurch verhindert und ein Drehen der zweiten Scheibe veranlasst wird.

Sollen sich hierbei beide Wellen in derselben Richtung umdrehen, so wendet man sog. offene Riemen an (siehe Fig. 314), soll dagegen die Drehrichtung beider Wellen eine entgegengesetzte sein, so wendet man gekreuzte Riemen an (siehe Fig. 315), die zwischen den Riemenscheiben verschränkt sind.

[1]). Siehe Erkl. 242.

Frage 215. Unter welchen Bedingungen findet zwischen den Kräften, die auf zwei durch einen Riemen verbundene Rollen wirken, Gleichgewicht statt?

Erkl. 243. Man findet diese Art der Bewegungsübertragung sehr häufig in Werkstätten, in welchen eine Reihe von verschiedenen Arbeitsmaschinen durch eine einzige Kraftmaschine, z. B. ein Wasserrad oder eine Dampfmaschine, in Bewegung gesetzt werden sollen. Die Arbeitsmaschine setzt dann zunächst eine oder mehrere sehr lange Wellen in Bewegung, welche durch die ganze Länge des Maschinenraumes laufen und meistens an der Decke desselben befestigt sind. Auf diesen sogenannten Transmissionswellen sind von Strecke zu Strecke Rollen befestigt, von denen die Bewegung mittels Riemen auf die Arbeitsmaschinen, z. B. Webstühle, Drehbänke, Hobel- oder Bohrmaschinen übertragen wird.

Antwort. Um die Bedingungen zu erfahren, unter welchen zwischen den auf zwei Riemenscheiben wirkenden Kräften Gleichgewicht stattfindet, nehmen wir an, dass die Rolle a (Fig. 316) durch eine Kurbel $af = R_1$ umgedreht, und die Bewegung derselben durch einen Treibriemen auf das Rad bd übertragen wird, um hier eine an der Welle b wirkende Last Q zu heben. Hält nun die am Ende f der Kurbel wirkende Kraft P der Last Q das Gleichgewicht, so ist zunächst zu beachten, dass dbc einen Winkelhebel bildet, dessen Arme $db = R$ und $bc = r$ sind und der in b seinen Drehpunkt hat. Es würde somit zur Herstellung des Gleichgewichts eine im Punkt d oder c wirkende Kraft von der

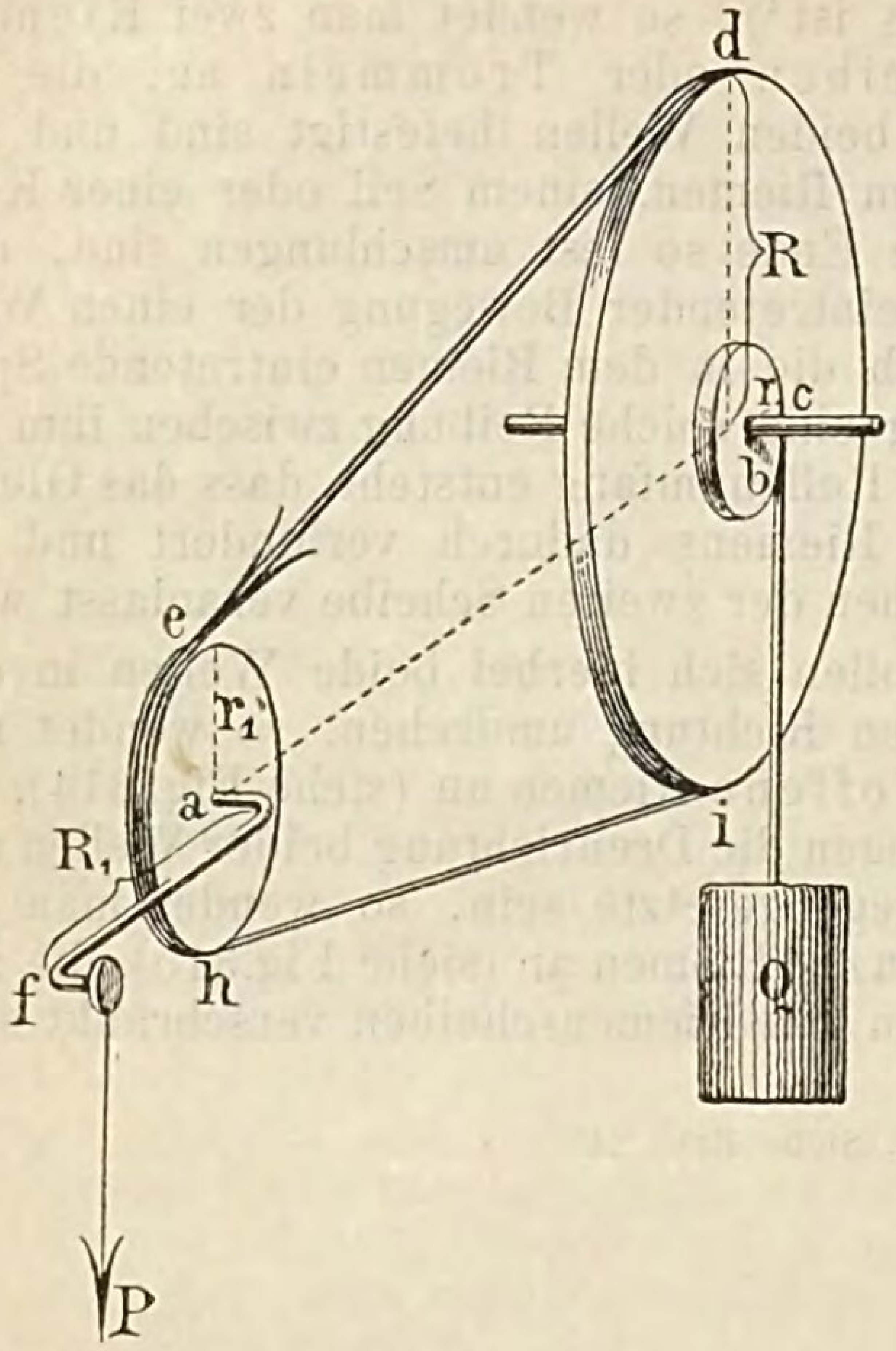
Grösse $Q \cdot \frac{r}{R}$ genügen. Reduziert man diese in Punkt *e* erforderliche Kraft auf den Punkt *f* (siehe Erkl. 240), so erhält man als Bedingung des Gleichgewichts:

$$P = Q \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1}$$

Wie schon bemerkt, muss an dem Riemen *ed* eine Kraft $Q \cdot \frac{r}{R}$ wirken; man nennt daher dieses Riemenstück das ziehende oder treibende, wogegen das Stück *hi* das gezogene genannt wird.

Die vorstehende Formel lehrt, dass die Anwendung zweier Riemenscheiben zur Ueberwindung einer Last gleich bedeutend ist mit einer Vergrösserung des Hebelarms der bewegenden Kraft, wie sie sich aus dem Verhältnis der Rollenhalbmesser ergibt. Ist z. B. der Halbmesser der Rolle *bd* das 2-, 3- oder *n*fache des Halbmessers der Rolle *ae*, so kann die an der Kurbel wirkende Kraft P auch ein 2-, 3- oder *n*mal so grosses Gewicht Q heben, als wenn sie mittels derselben Kurbel direkt auf die Welle *bc* wirkte.

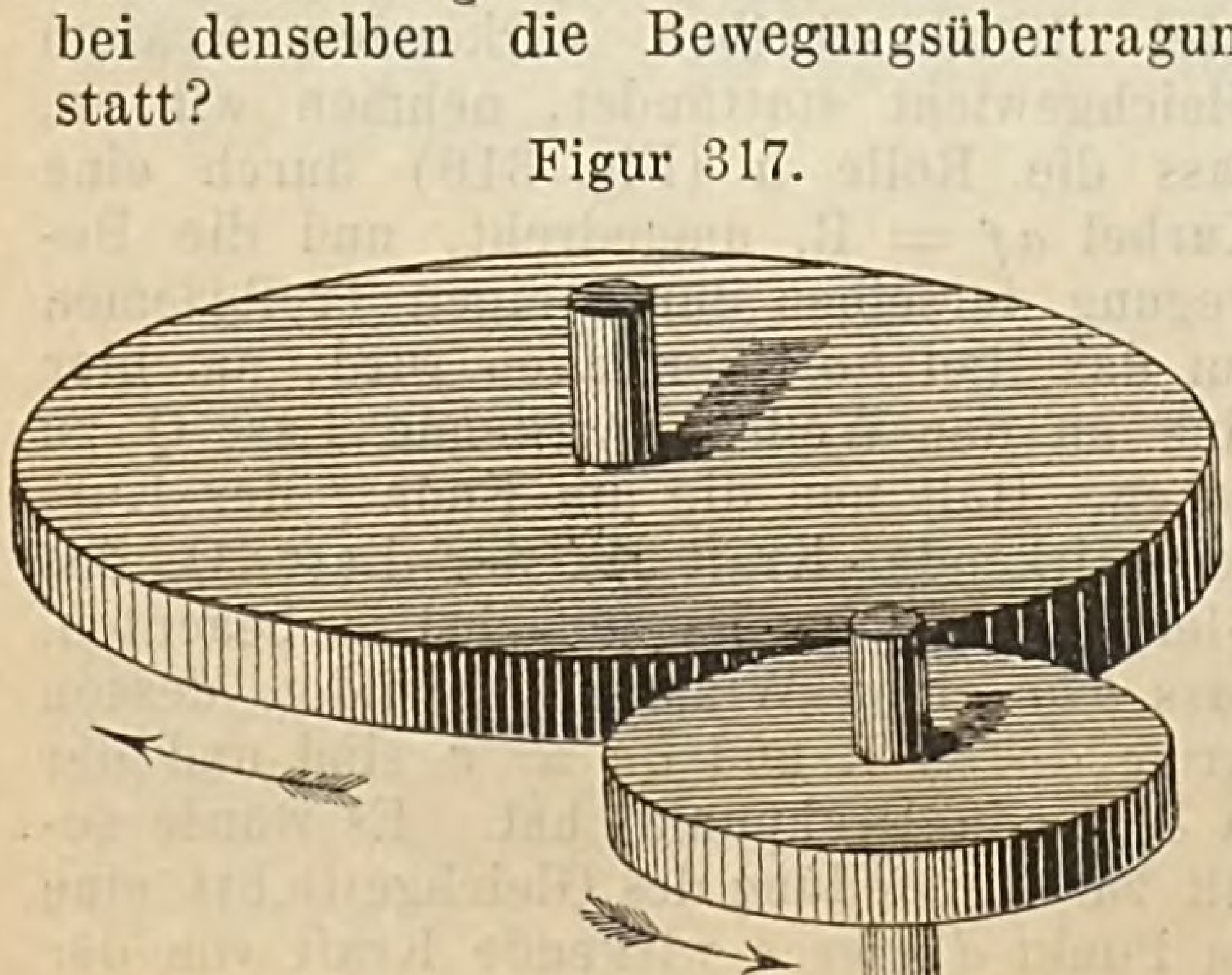
Figur 316.



Erkl. 244. Ist die zu übertragende Kraft gering, so wendet man statt der Riemen Seile, Schnüre oder Saiten an, wie bei den kleineren Drehbänken; die Rolle bekommt dann als Schnurlauf eine Rinne, wogegen die Riemenscheiben gegen das Abgleiten des Riemens an ihrem Umfang etwas gewölbt sein müssen, wie es an jedem Spinnrad oder jeder Nähmaschine deutlich zu sehen ist. Wenn die zu übertragende Kraft sehr gross ist, wendet man statt der Riemen Ketten an, die sich mit ihren besonders geformten Gliedern über Zähne oder Stege legen, mit denen die Rollen (Kettenräder) besetzt sind.

Frage 216. Unter welchen Umständen wendet man zur Bewegungsübertragung von einem Wellrad zum andern Friktions- oder Reibungsräder an und wie findet bei denselben die Bewegungsübertragung statt?

Figur 317.



Antwort. Wenn die Achsen zweier Wellräder einander parallel sind und sehr nahe zusammenliegen, so werden bei nicht bedeutenden Kraftübertragungen Friktions- oder Reibungsräder angewandt (siehe Fig. 317), d. h. die beiden Achsen werden mit zwei Scheiben versehen, welche sich an ihren Umfängen berühren und durch einen hinlänglich starken Druck so aneinander gepresst werden, dass an der Berührungsstelle eine Reibung entsteht, vermöge welcher das Rad sich nicht bewegen kann, ohne die Welle mitzunehmen (z. B. der Spuler an der Nähmaschine, dessen Umfang zur Vergrösserung der Reibung von einem Gummiring umgeben ist[1]). Die Richtungen

[1]) Siehe Erkl. 245.

Erkl. 245. Der grösseren Reibung wegen erhalten diese Friktionsscheiben am Umfang der Kränze oft keil- oder sägeschnittartige Einschnitte, welche mit dem Umfang parallel laufen und ineinandergreifen. — Die Friktionsräder zeichnen sich besonders durch einen ruhigen sanften Gang aus.

der Bewegung sind hierbei einander entgegengesetzt.

Frage 217. Unter welchen Umständen wendet man zur Kraft- oder Bewegungsübertragung von einem Wellrad zum andern sog. Zahnräder an?

Erkl. 246. Die Räder sind fast ohne Ausnahme kreisförmig und bestehen aus einer auf ihrer Welle sitzenden Scheibe, oder sind durchbrochen und mit einer beliebigen Menge Speichen versehen, auf welchen der Kranz, ein Ring, zur Bildung des Radumfangs befestigt ist.

Antwort. Wenn bedeutende Kräfte von einem Rad auf das andere, dessen Abstand nur gering ist, übertragen werden sollen, so wendet man Zahnräder an. Wollte man in diesem Fall Friktionsräder in Anwendung bringen, so würde infolge des zu grossen Widerstandes die Reibung nicht mehr stark genug sein, um eine Drehung der zweiten Scheibe hervorzubringen, vielmehr würde sich die eine Scheibe allein drehen und auf dem Umfang der andern bloss schleifen. Um solches zu verhindern und ein stärkeres Aneinanderhaften der Scheibenumfänge zu bewirken, versieht man letztere mit Erhöhungen und Vertiefungen, die ineinander greifen. Die Erhöhungen nennt man Zähne, die Vertiefungen Lücken, und die mit solchen Zähnen und Lücken versehenen Scheiben heissen Zahnräder. Das kleinere der im Eingriff stehenden Räder heisst gewöhnlich Getriebe oder Trieb.

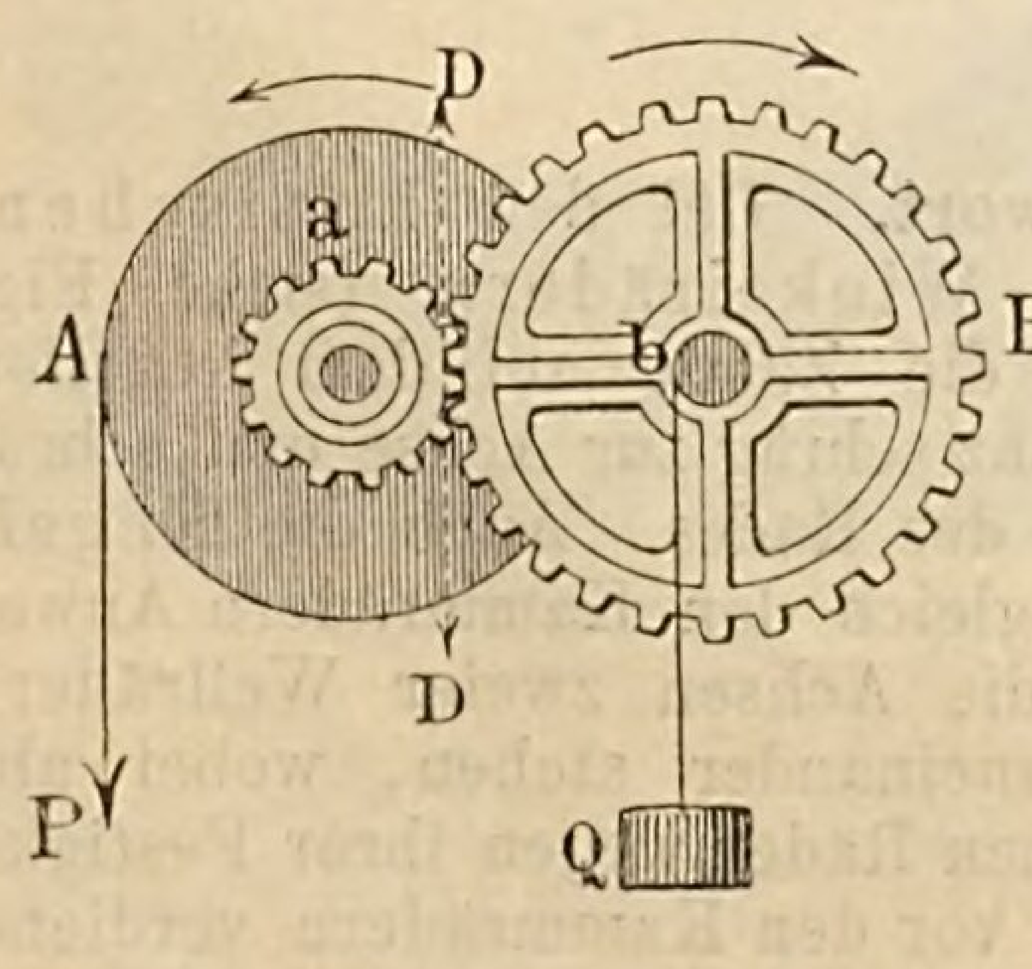
Frage 218. Je nach der Art der Bewegungsmitteilung von einer Welle zur andern kommen welche besonderen Arten von Zahnrädern zur Anwendung?

Antwort. Je nach der Art der Bewegungsmitteilung von einer Welle zur andern wendet man entweder

1). Stirn-, Stern- oder Sporenräder, oder
2). Kron- oder Kammräder, oder
3). konische oder Winkelräder an.

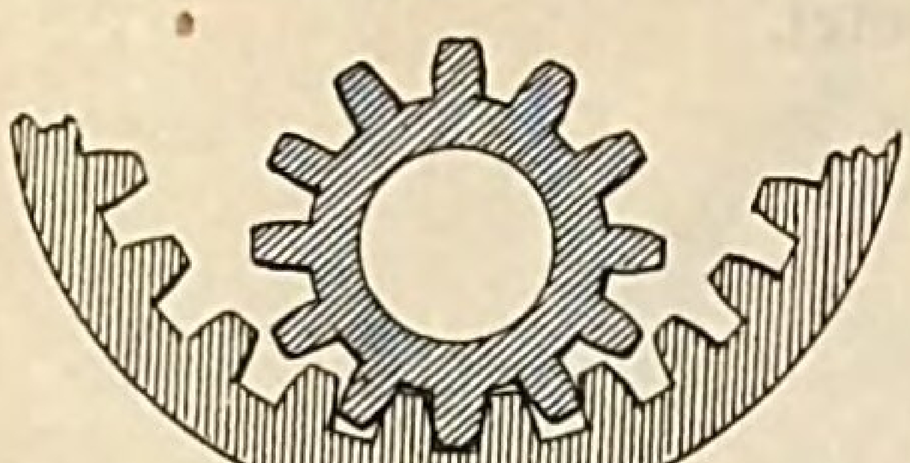
Frage 219. Wie sind die Stirn-, Stern- oder Sporenräder eingerichtet und unter welchen Umständen finden dieselben Anwendung?

Figur 318.



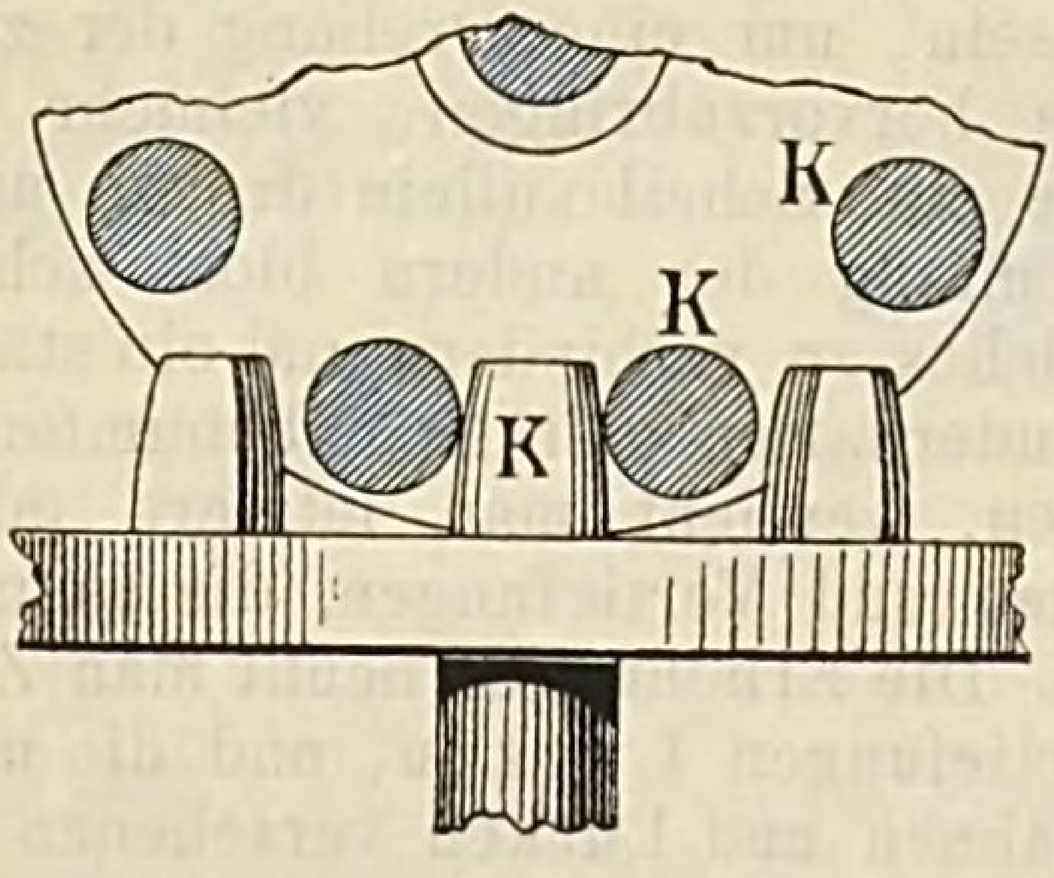
Antwort. Bei den Stirn-, Stern- oder Sporenrädern stehen die Zähne immer in der Richtung der verlängerten Radhalbmesser, also senkrecht zur Radachse und zwar können die Zähne sowohl auf dem äusseren Radumfang, wie in Fig. 318, als auch auf der Innenseite des cylindrischen Radkranzes, wie in Fig. 319, angebracht sein. Solche Räder werden angewandt, wenn irgend eine Bewegung einer Welle oder eines sog. Wellbaums auf einen andern Wellbaum, welcher dem ersteren parallel ist, übertragen werden soll.

Figur 319.

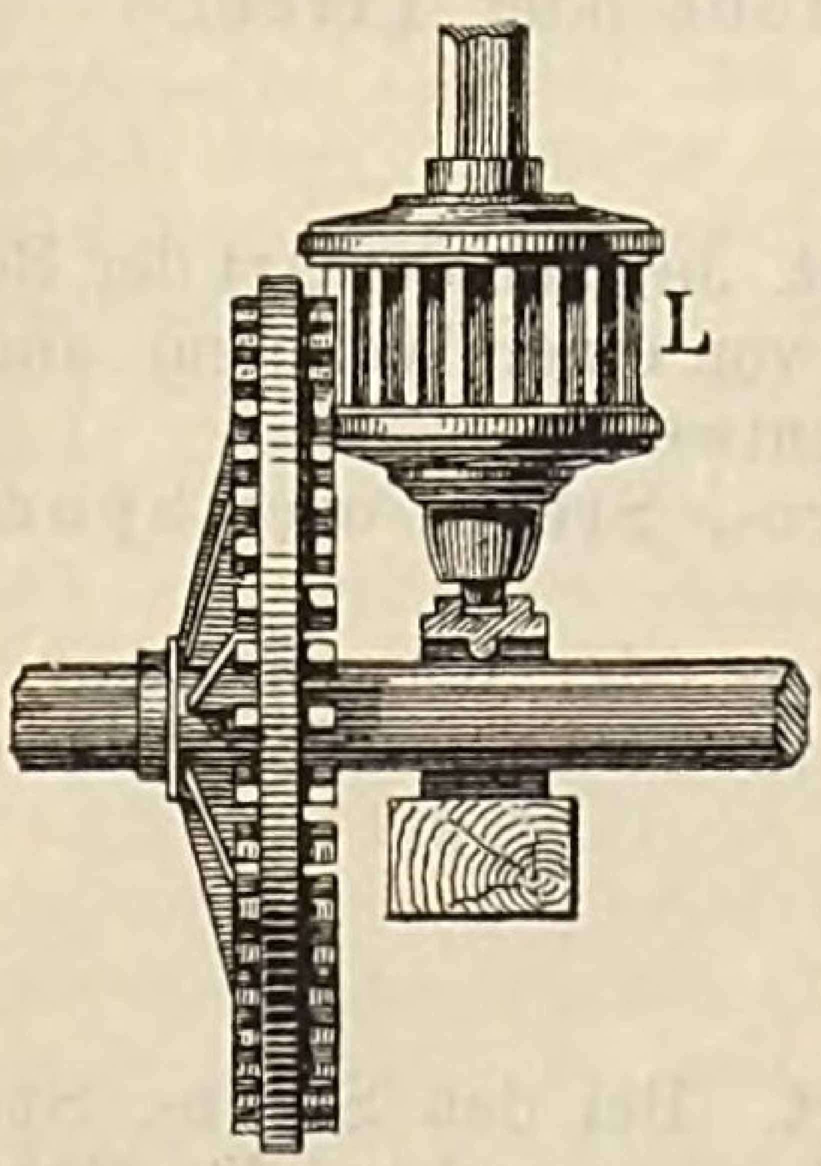


Frage 220. Wie sind die Kron- oder Kammräder eingerichtet und wenn finden dieselben Anwendung?

Figur 320.



Figur 321.



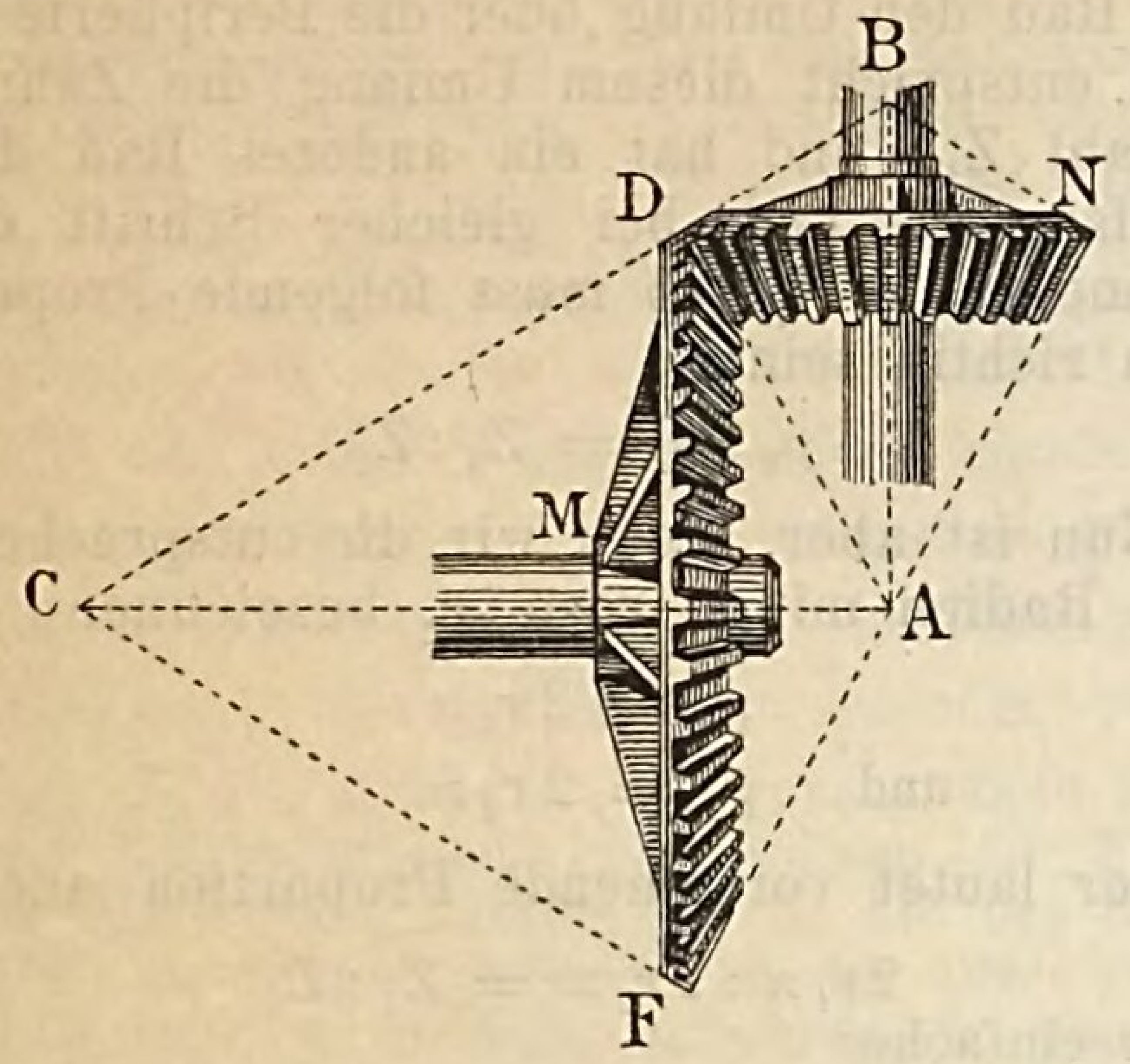
Antwort. Bei den Kron- oder Kammrädern stehen die Zähne oder Kämme K (Fig. 320) rings um den Kranz des Rades herum senkrecht auf der Radfläche, also parallel zur Radachse. Man wendet diese Art Zahnräder an, wenn die Bewegung von einer Welle auf eine andere, welche zu jener eine senkrechte Lage hat, übertragen werden soll und lässt zu diesem Zweck das Kammrad in ein Stirnrad eingreifen, wie es Fig. 320 zeigt, oder man wendet auch oft ein Kammrad mit einem sog. Trilling oder einer Laterne an, d. i. eine Vorrichtung, welche aus zwei parallelen, in einem gewissen Abstand voneinander befestigten Scheiben mit lotrecht zwischen beiden stehenden Spillen oder Triebstöcken besteht, wie es Fig. 221 zeigt.

Frage 221. Wie sind die konischen oder Kegel-Winkelräder eingerichtet, und wenn finden dieselben Anwendung?

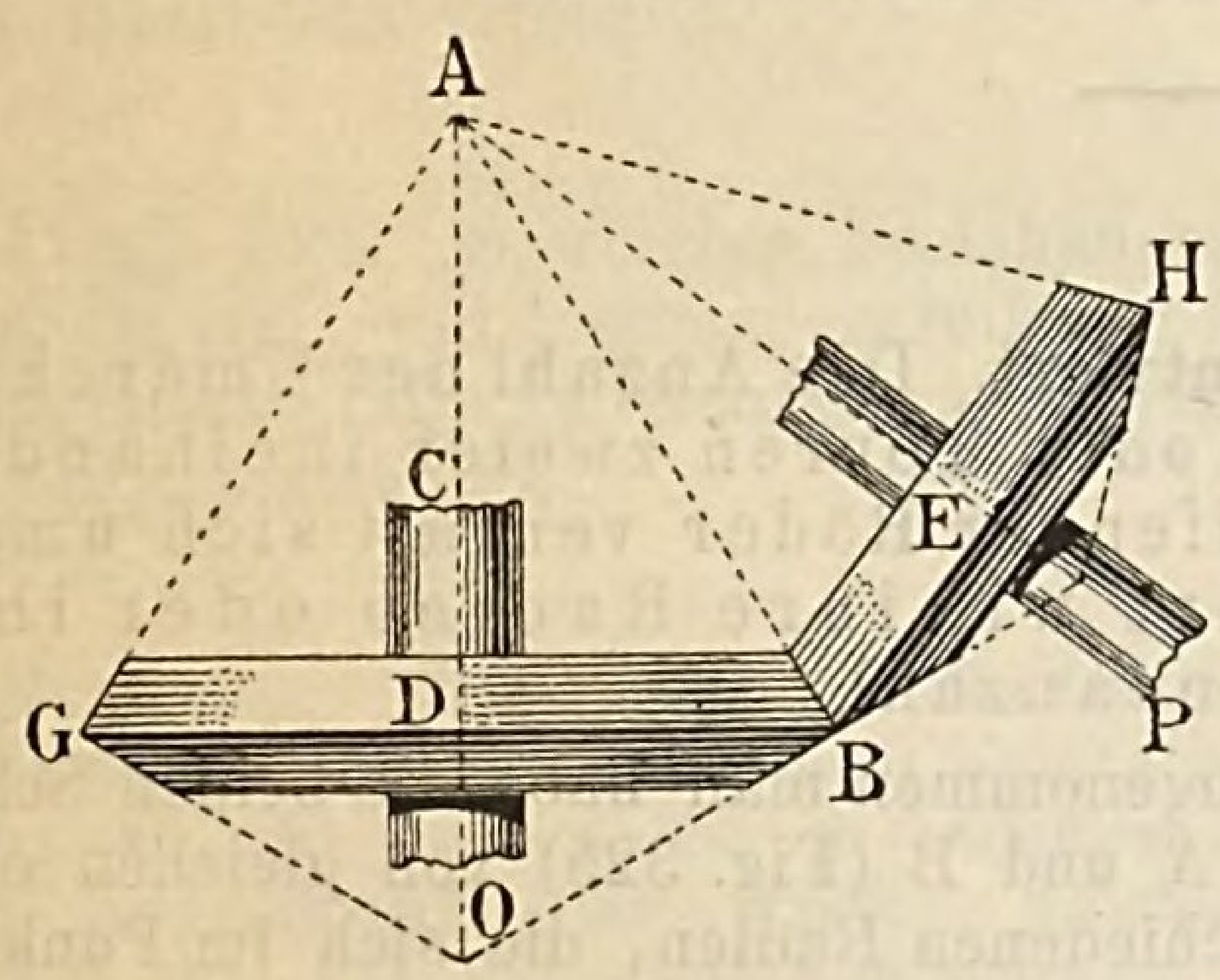
Antwort. Bei den konischen oder Kegel-Winkelrädern (siehe Fig. 322) stehen die Zähne auf dem kegelförmigen Radkranz schräg zur Achse und schräg zum Radius des Rades. Auch die Kegelräder finden gleich den Kammrädern Anwendung, wenn die Achsen zweier Wellräder senkrecht zueinander stehen, wobei aber die konischen Räder wegen ihrer Festigkeit den Vorzug vor den Kammrädern verdienen und

sich auch gut verwenden lassen, wenn zwei Radachsen eine schiefe Stellung zueinander einnehmen, wie es Fig. 323 zeigt. Man verlängert alsdann die gegebenen geometrischen Achsen der beiden Räder bis zu ihrem Durchschnitt in A, zieht dann senkrecht zu den Achsen die Geraden $\overline{DB}$ und $\overline{EB}$, welche die Ebenen der Räder angeben, macht $\overline{DG} = \overline{DB}$ und $\overline{EH} = \overline{EB}$ und zieht die Linien $\overline{AG}$, $\overline{AB}$ und $\overline{AH}$, wodurch die beiden Kegel bestimmt sind, auf deren Mantelabschnitten die Zähne in gleichen Abständen so anzubringen sind, dass die Verlängerungen derselben sich in A treffen. Soll das kleinere Rad n mal so viel Umgänge machen als das grosse, so müssen sich die Abstände von den Achsen $\overline{DB} : \overline{EB} = n : 1$ verhalten.

Figur 322.

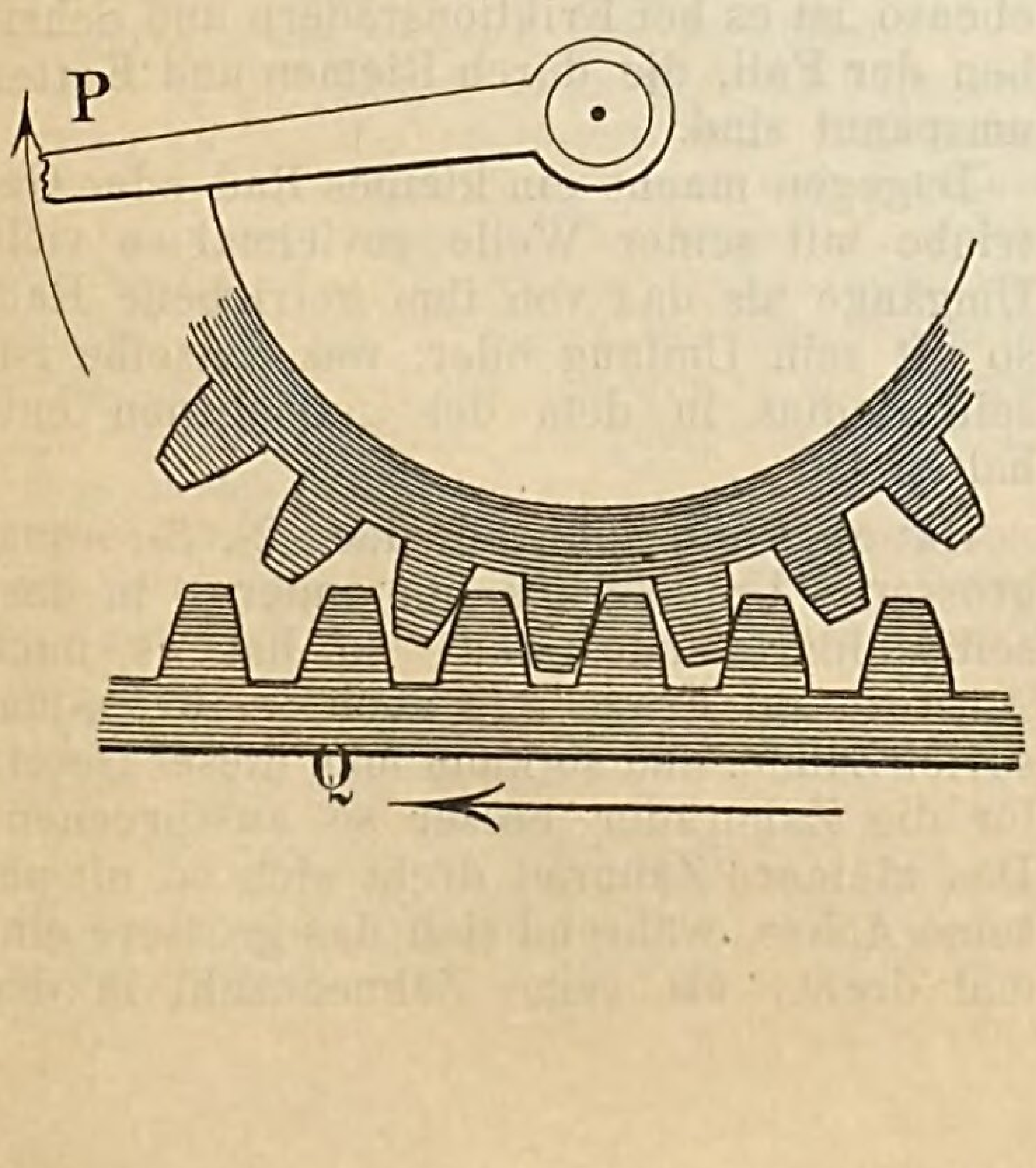


Figur 323.



Frage 222. In welchem Verhältnis steht die Anzahl der Zähne auf zwei ineinandergreifenden Rädern und warum ist dieses Verhältnis notwendig?

Figur 324.



Antwort. Die Anzahl der Zähne auf zwei ineinandergreifenden Rädern steht in demselben Verhältnis wie die Umfänge oder die Halbmesser der Räder.

Der Beweis und die Begründung dieses Satzes ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Wenn die Zähne eines Rades A in die Zahnlücken eines andern Rades B eingreifen, so folgt umgekehrt, dass die Zähne des Rades B in die Zahnlücken des Rades A eingreifen müssen. Diese Wechselwirkung ist aber nur dann möglich, wenn die Zähne eines jeden Rades unter sich alle einander gleich und auf dem ganzen Radumfang in gleichen Abständen regelmässig verteilt sind und wenn die Zähne und Lücken des einen Rades genau so gross sind als die des andern. Man sagt: Die in einander eingreifenden Zahnräder müssen gleiche Schrift oder Teilung haben. Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Zähneanzahl von der

Erkl. 247. Oft greift auch, wie in Fig. 324, ein gezahntes Rad in eine mit Zähnen versehene gerade Stange, Zahnstange genannt, ein, wodurch die drehende Bewegung des Rades in eine geradlinige Bewegung der Stange umgewandelt wird. Der Widerstand, welcher sich der Bewegung der Stange entgegensetzt, wirkt unverändert am Umfang des Rades, so dass ganz wie bei der Radwelle der Gleichgewichtszustand eintritt, wenn sich die an der Kurbel wirkende Kraft P zu dem Widerstande Q der Stange verhält wie der Halbmesser des Rades zu der Länge der Kurbel. Ist z. B. der Halbmesser des Rades r, die Länge der Kurbel R, so ist beim Gleichgewicht

$$P \cdot R = Q \cdot r$$

oder:

$$P : Q = r : R$$

Grösse des Radumfangs abhängig ist. Hat ein Rad den Umfang oder die Peripherie p_1 und entspricht diesem Umfang die Zähneanzahl Z_1, und hat ein anderes Rad den Umfang p_2 und bei gleicher Schrift die Zähneanzahl Z_2, so muss folgende Proportion richtig sein:

$$p_1 : p_2 = Z_1 : Z_2$$

Nun ist aber, wenn wir die entsprechenden Radien mit r_1 resp. r_2 bezeichnen:

$$p_1 = 2 r_1 \pi$$

und

$$p_2 = 2 r_2 \pi$$

daher lautet vorstehende Proportion auch:

$$2 r_1 \pi : 2 r_2 \pi = Z_1 : Z_2$$

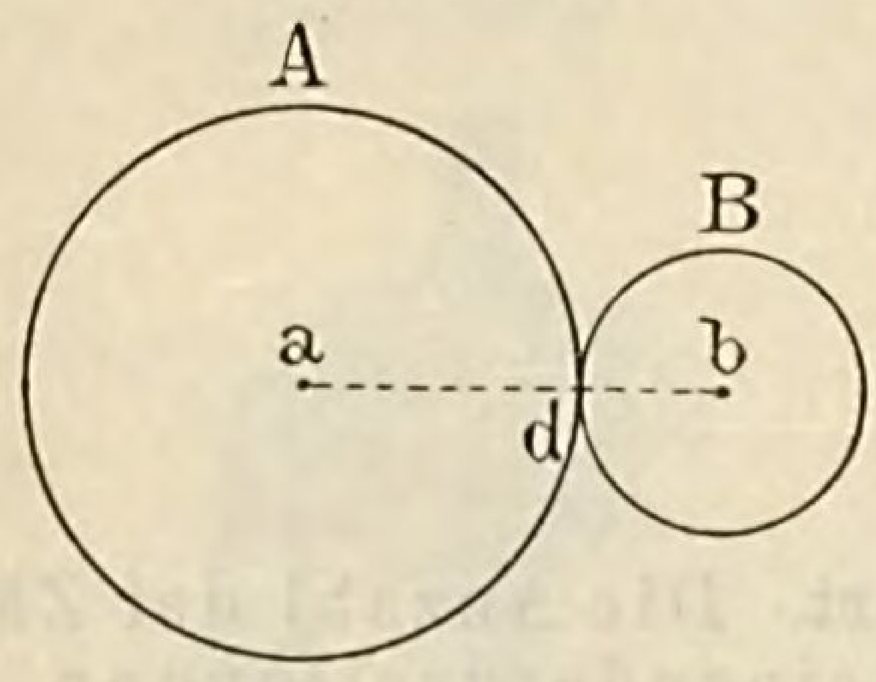
oder einfacher

$$r_1 : r_2 = Z_1 : Z_2$$

was zu beweisen war.

Frage 223. Wie verhält sich die Anzahl der Umdrehungen oder Touren zweier ineinandergreifender Räder?

Figur 325.



Erkl. 248. D. h. wenn ein Rad 48 Zähne und der in dasselbe eingreifende Trieb 8 Zähne hat, so dreht sich letzterer 6 mal so oft um, als ersteres. Daher finden solche Räderverbindungen nicht allein Anwendung um durch verhältnismässig geringen Kraftaufwand grosse Lasten zu heben oder um rotierende Bewegung zu übertragen oder ihr eine andere Richtung zu geben, sondern auch um grosse Umfangsgeschwindigkeiten auf Kosten der Kraft, als auch eine bedeutende Kraft mit Verlust von Geschwindigkeit zu erzeugen.

Im ersteren Fall greifen grosse, auf der Kraftwelle sitzende gezahnte Räder in kleine ein, im letzteren Fall kleine auf der Kraftwelle sitzende Räder in grosse. So müssen z. B. bei der Wassermühle die langsamen Drehungen des Wasserrades durch die eingeschalteten Wellenräder in schnelle Umdrehungen des Läufers umgewandelt werden, während umgekehrt

Antwort. Die Anzahl der Umdrehungen oder Touren zweier ineinandergreifender Räder verhält sich umgekehrt wie ihre Radien oder ihre Zähneanzahl.

Angenommen man habe die beiden Scheiben A und B (Fig. 325) von gleichen oder verschiedenen Radien, die sich im Punkt d berühren. Wird die eine derselben um ihre Achse gedreht, so läuft auch die andere um und beider Peripherien legen sich aneinander so an, dass gleiche Längen derselben fortwährend miteinander in Berührung kommen; folglich müssen die Peripherie- oder Umfangsgeschwindigkeiten zweier ineinandergreifender Zahnräder stets gleich sein; ebenso ist es bei Friktionsrädern und Scheiben der Fall, die durch Riemen und Ketten umspannt sind.

Dagegen macht ein kleines Rad oder Getriebe mit seiner Welle sovielmal so viele Umgänge als das von ihm getriebene Rad, so oft sein Umfang oder, was dasselbe ist, sein Radius in dem des getriebenen enthalten ist.

Hat aber ein Zahnrad einen 2-, 3-, n-mal grösseren Umfang als ein anderes in dasselbe eingreifendes Rad, so hat es nach Antwort auf Frage 222 auch 2-, 3-, n-mal soviel Zähne, und so kann man dieses Gesetz für die Zahnräder besser so aussprechen: Das kleinere Zahnrad dreht sich so oft um seine Achse, während sich das grössere einmal dreht, als seine Zähneanzahl in der

bei der Gewichts- oder Pendeluhr die Bewegung des abwärts fallenden Gewichts so umgewandelt werden muss, dass sich das Stundenrad nebst Stundenzeiger in 12 Stunden erst einmal umdreht. Soll im allgemeinen bei Anwendung eines Räderwerks die Kraft oder im Gegenteil die Geschwindigkeit um das n-fache vermehrt werden, so muss das eine Rad einmal, das andere $\frac{1}{n}$ mal umlaufen, mithin der Radius des einen $= 1$, des Getriebes $= \frac{1}{n}$ sein. Wäre z. B. $n = 10$, so wäre der Radius des Rades $= 1$, des Getriebes $= \frac{1}{10}$ oder besser jener $= 10$, dieser $= 1$, woraus dann folgt, dass bei so grossen Verhältnissen die Zähne des Getriebes mindestens $= 6$, die des Rades $= 60$ zu nehmen wären. Ist der Wert von n zu gross, z. B. $= 100$, so würde das Rad im Verhältnis zum Getriebe zu gross, und es lassen sich dann mehrere Räder miteinander zu einem sog. Räderwerk verbinden.

Anzahl der Zähne des grösseren enthalten ist.[1]).

Räder, die auf einer und derselben Welle sitzen, machen gleich viel Umdrehungen, ihre Umfangsgeschwindigkeiten verhalten sich aber wie ihre Radien oder auch wie ihre Zähneanzahlen.

[1]). Siehe Erkl. 248.

Frage 224. In welchen Beziehungen stehen die auf zwei ineinandergreifende Räder wirkenden Kräfte zu einander, sobald Gleichgewicht stattfindet?

Antwort. Die Kräfte, welche auf zwei ineinandergreifende Räder wirken, haben dieselben Beziehungen zu einander, wie bei den Riemenscheiben (siehe Antw. auf Frage 215). Nehmen wir an, dass die Kraft P, Fig. 326, an einer Kurbel p wirkt, um mittels der beiden Zahnräder c und a die Welle b zu drehen und dadurch die Last Q zu heben, so bewirkt die Kraft P zunächst, dass die Zähne des Rades c einen Druck x auf die Zähne des Rades a ausüben, welcher der Last Q das Gleichgewicht hält; umgekehrt bringt aber die Last Q auf die Zähne des Rades c einen entgegengesetzt gerichteten Druck y hervor. Diese beiden Kräfte x und y müssen für den Fall des Gleichgewichts einander gleich sein, und man hat daher, wenn die Kurbellänge mit p, der Halbmesser des Rades c mit r_1, der Halbmesser des Rades a mit r_2 und der Radius der Welle mit q bezeichnet wird:

1). . . $x \cdot r_1 = P \cdot p$ oder $x = \frac{P \cdot p}{r_1}$

2). . . $y \cdot r_2 = Q \cdot q$ oder $y = \frac{Q \cdot q}{r_2}$

folglich, da $x = y$ ist:

$$\frac{P \cdot p}{r_1} = \frac{Q \cdot q}{r_2}$$

oder:

$$P : Q = r_1 \cdot q : r_2 \cdot p$$

Zu derselben Formel kommt man durch Reduktion der Kräfte (siehe Erkl. 240). Die Kraft P am Ende der Kurbel p redu-

Erkl. 249. Wenn man das Verhältnis der an einem Räderwerk wirkenden Kräfte bestimmen will, so ist zunächst zu bedenken, dass der Angriffspunkt der Kraft, welche von einem Rad auf das andere übertragen wird, nicht unmittelbar auf dem Radkranz, auch nicht an der Spitze der Zähne, sondern ungefähr nahe am Mittel der Zahnlänge sein muss. Der eigentliche Ort dieses Angriffspunktes wird durch den sog. Teilkreis angegeben, d. i. derjenige Kreis, auf welchem die Radzähne eingeteilt werden. Derselbe liegt immer zwischen dem äusseren Umfang des Rades und dem Radkranz, aber nicht gerade in der Mitte der Zahnlänge, sondern meistens etwas über derselben.

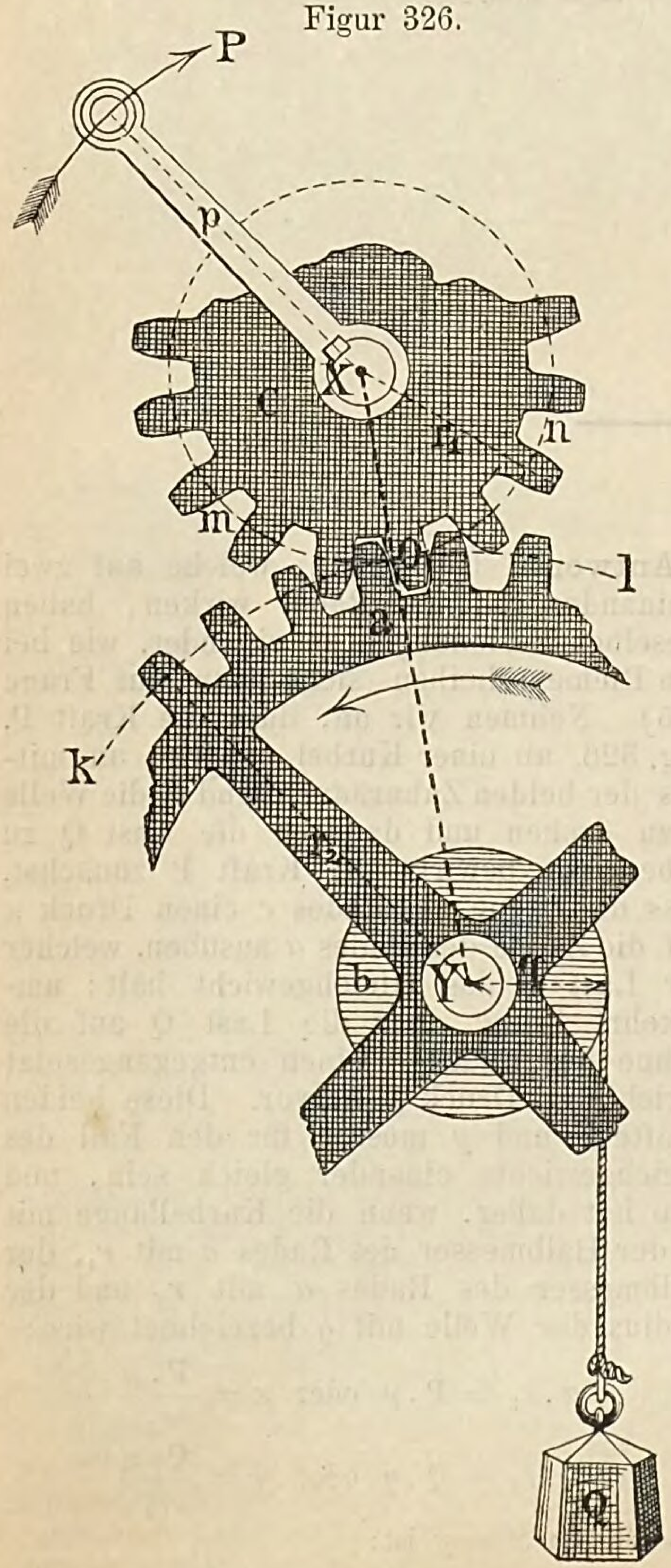
In Fig. 326 stellen mOn und kOl die Teilkreise zweier ineinandergreifender Räder vor, und wie man dort sieht, berühren sich dieselben immer in derjenigen geraden Linie XY, welche die beiden Radmittelpunkte miteinander verbindet. Der Ort O dieses Berührungspunktes ergibt sich sowohl aus den zum voraus berechneten Zähneanzahlen, als auch aus den Halbmessern der eingreifenden Räder.

Vermittelst der Zähneanzahl bestimmt man den Berührungspunkt und damit auch die Grösse der einzelnen Räder so, dass man den Abstand der beiden Wellbäume, d. i. die sog. Zentrallinie XY, in so viele Teile teilt, als die beiden Räder zusammen Zähne erhalten sollen. Soll z. B. das Rad X 24 und das Rad Y 36 Zähne erhalten, so teile man XY in 24 + 36 = 60 Teile; es muss alsdann XO 24 und YO 36 Teile erhalten.

Statt 24 und 36 Teilen macht man kürzer XO = 2 und XY = 3 Teile, also die Zentrallinie XY = 5 Teile lang.

Am einfachsten findet man die Halbmesser zweier ineinandergreifenden Räder aus der sog. Uebersetzungszahl, d. h. aus der Zahl, welche angibt, wieviel Umgänge das eine Rad in der Zeit macht, in welcher das andere einen Umgang vollendet.

Figur 326.



Soll z. B. ein Rad einen Umlauf machen, während das eingreifende Getriebe fünf Umgänge macht, soll also das erstere Rad fünfmal grösser sein, als das letztere, so teile man den Abstand der beiden Radmittel in 5 + 1 = 6 Teile; alsdann ist der Halbmesser des Rades 5 und der des Getriebes 1 solcher Teile lang.

ziert sich für die Zähne des Rades *c* auf $\frac{P \cdot p}{r_1}$ und dieser Druck, der auch im Umfang des Zahnrades *a* wirkt, reduziert sich für den Punkt im Umfang der Welle, an welcher die Last Q hängt, auf $P \cdot \frac{p}{r_1} \cdot \frac{r_2}{q}$ woraus folgt, wenn die Last Q diesem Druck das Gleichgewicht halten soll:

$$Q = P \cdot \frac{p}{r_1} \cdot \frac{r_2}{q}$$

oder wie oben:

$$P : Q = r_1 . q : r_2 . p$$

Da sich die Zähneanzahl beider Räder verhält wie die Radien derselben, so verhält sich, wenn die Anzahl der Zähne des Rades *c* mit *z*, die des Rades *a* mit Z bezeichnet wird,

$$r_1 : r_2 = z : Z$$

und man kann in vorstehender Formel für $\frac{r_1}{r_2}$ auch $\frac{z}{Z}$ setzen und erhält so anstatt

$$P = Q \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{q}{p}$$

$$P = Q \cdot \frac{z}{Z} \cdot \frac{q}{p}$$

so dass die Wirkung der Kraft P in demselben Verhältnis zunimmt, in welchem die Anzahl der Zähne des Rades *a* grösser ist als die des Rades *c*. Hätte das Rad *a* 2-, 3-, oder *n*-mal soviel Zähne als das Rad *c*, so würde die Kraft P vermittelst der Räder auch eine 2-, 3- oder *n*-mal so grosse Last Q heben können, als wenn dieselbe Kraft P mit ihrer Kurbel *p* direkt auf die Lastwelle einwirkte.

Hieraus ergibt sich für die Halbmesser zweier im Eingriff stehenden Räder und also für die Bestimmung des Berührungspunktes O, Fig. 326, folgende allgemeine Lösung:

Ist a der Abstand der beiden Wellbäume, R der Halbmesser des grösseren Rades, und sollen n Umläufe des kleinen Rades auf einen Umgang des grösseren kommen, so hat man, da der Halbmesser des kleineren Rades $= a - \mathrm{R}$ ist:

$$\mathrm{R} : a - \mathrm{R} = n : 1$$

woraus sich ergibt:

$$\mathrm{R} = na - n\mathrm{R}$$

und hieraus: $\mathrm{R}(n + 1) = na$

also: $$\mathrm{R} = \frac{na}{n+1}$$

Ebenso findet man für den kleineren Halbmesser:

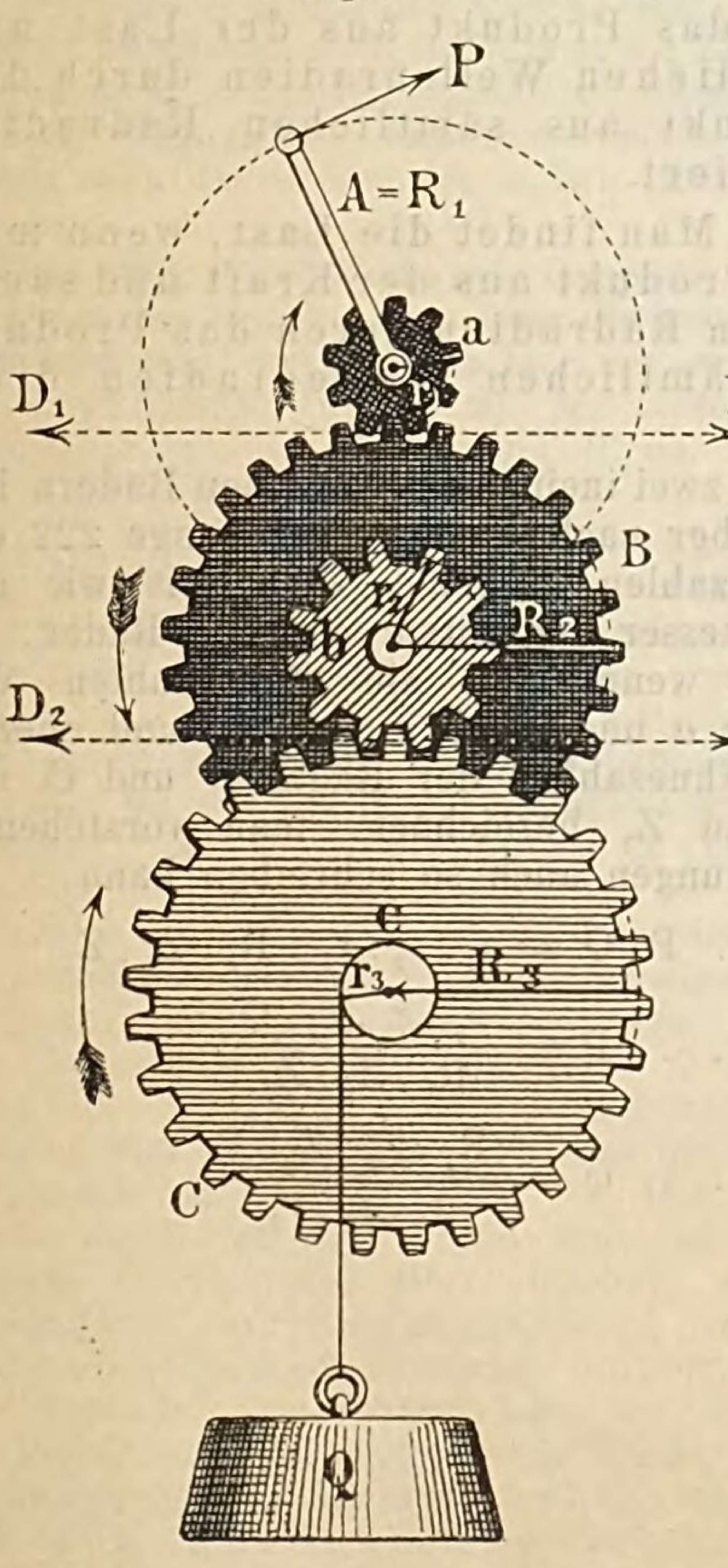
$$r : a - r = 1 : n$$

und hieraus: $$r = \frac{a}{n+1}$$

Die so bestimmten Radhalbmesser sind diejenigen, welche bei Zahnrädern in Rechnung zu bringen sind.

Frage 225. Wie lässt sich das Gleichgewichtsgesetz für das zusammengesetzte Räderwerk rein theoretisch entwickeln und wie lautet dasselbe?

Figur 327.



Antwort. Um das Gleichgewichtsgesetz für das zusammengesetzte Räderwerk zunächst rein theoretisch, also ohne Rücksicht auf die Bewegungswiderstände zu entwickeln, stellen wir uns in Fig. 327 eine Räderverbindung so vor, dass an dem Hebelarm A eine Kraft P wirkt, welche die Welle a und durch diese das Rad B, mit dem darauf sitzenden Trieb b dreht; letzterer steht wieder im Eingriff mit dem Rad C, so dass auch dieses mit der Trommel c, auf welche die Last wirkt, umgedreht und dadurch die Last Q gehoben wird.

Ist nun der Druck, welchen die Welle a auf das Rad B ausübt $= \mathrm{D}_1$, der Druck aber, welchen die Welle b auf das Rad C ausübt $= \mathrm{D}_2$, so gilt D_1 nicht bloss als Last für das Wellenrad Aa, sondern zugleich als Kraft für das Rad Bb. Der von der Welle b auf das Rad C ausgeübte Druck D_2 ist nicht nur Last für das Rad Bb, sondern zugleich Kraft für das Rad Cc, welches die Last Q heben soll. Sind nun die Radien der Räder A, B und C bezw. $= \mathrm{R}_1$, R_2 und R_3 und die Radien der Wellen a, b und c bezw. $= r_1$, r_2 und r_3, so ist nach dem Gleichgewichtsgesetz für das einfache Wellenrad (siehe Antwort auf Frage 210) Gleichgewicht vorhanden:

beim 1. Rade, wenn $\mathrm{P} \cdot \mathrm{R}_1 = \mathrm{D}_1 \cdot r_1$
„ 2. „ „ $\mathrm{D}_1 \cdot \mathrm{R}_2 = \mathrm{D}_2 \cdot r_2$
„ 3. „ „ $\mathrm{D}_2 \cdot \mathrm{R}_2 = \mathrm{Q} \cdot r_3$ ist.

Nun soll aber Gleichgewicht beim ganzen Räderwerk herrschen. Folglich muss das

Erkl. 250. Je kleiner die Radien r und je grösser die Radien R, desto kleiner ist die Kraft im Verhältnis zur Last.

Ist $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ und $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ so ist:

$$P = Q\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^4$$

Für n kombinierte Wellräder wäre:

$$P = Q\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^n$$

Wäre z. B.:

$$r_1 = \frac{1}{10} R_1$$

und würden 4 Wellräder kombiniert, so wäre:

$$P = \left(\frac{1}{10}\right)^4 Q = \frac{1}{10\,000} Q$$

Mit einer Kraft von 1 Zentner könnte man also ohne die Reibung 10 000 Zentner heben.

Erkl. 251. Bei zwei ineinandergreifenden Rädern nennt man dasjenige Rad, welches die Drehung des andern verursacht, das treibende, dieses das getriebene Rad. In der vorstehenden Fig. 327, wo die Drehung von der Kurbel A ausgeht, sind also a und b die treibenden, dagegen B und C die getriebenen Räder. Da nun in nebenstehender Gleichung 1). die im dritten Glied stehenden Zähnezahlen den treibenden, die im vierten Glied stehenden Zähnezahlen den getriebenen Rädern angehören, so kann man allgemein für die zusammengesetzten Räderwerke die Bedingungen des Gleichgewichts folgendermassen ausdrücken:

Wenn an dem einen Ende eines zusammengesetzten Räderwerkes eine Kraft P, an dem andern eine Last Q wirkt, so ist zwischen diesen Kräften Gleichgewicht vorhanden, wenn sich die Kraft P zur Last Q verhält, wie das Produkt aus dem Hebelarm (r_3) der Last in das Produkt aus den Zähnezahlen aller treibenden Räder, zu dem Produkt aus dem Hebelarm (R_1) der Kraft P in das Produkt aus den Zähnezahlen aller getriebenen Räder.

Erkl. 252. Ohne auf die Konstruktion der Räderwerke hier näher einzugehen, sei nur noch bemerkt, dass es nach den gemachten Erfahrungen beim Betrieb von regelmässig gehenden Maschinen nicht gut ist, wenn zwei ineinandergreifende Räder zu verschiedene Durchmesser haben. Es stehen nämlich sonst zu wenig Zähne in gegenseitigem Eingriff und die Wirkung verteilt sich nur auf wenige Zähne, so dass der Druck auf einen Zahn zu bedeutend wird. Höchstens soll ein Rad einen 6mal grösseren Durchmesser oder 6mal mehr Zähne erhalten, als das eingreifende kleinere Rad. Das gewöhnliche Verhältnis übersteigt aber das von 3 : 1 nicht. Man muss darum bei einem grossen Unterschied zwischen Kraft und Last, oder zwischen der Umdrehungszahl der Kraft-

Produkt aus allen vor den Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücken gleich sein dem Produkt aus allen nach den Gleichheitszeichen stehenden Werten. Und dies ist:

$$P . R_1 . D_1 . R_2 . D_2 . R_3 = D_1 . r_1 . D_2 . r_2 . Q . r_3$$

Hebt man in dieser Gleichung die gleichen Faktoren auf beiden Seiten fort, so hat man

$$P . R_1 . R_2 . R_3 = Q . r_1 . r_2 . r_3$$

und hieraus ergibt sich:

1). . . $P : Q = r_1 . r_2 . r_3 : R_1 . R_2 . R_3$

folglich:

2). . . . $P = \dfrac{r_1 . r_2 . r_3 . Q}{R_1 . R_2 . R_3}$

und

3). . . . $Q = \dfrac{R_1 . R_2 . R_3 . P}{r_1 . r_2 . r_3}$

Diese Gleichungen lauten in Worten:

1). Es verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt aus sämtlichen Wellenradien zu dem Produkt aus sämtlichen Radradien.

2). Man findet die Kraft, indem man das Produkt aus der Last und sämtlichen Wellenradien durch das Produkt aus sämtlichen Radradien dividiert.

3). Man findet die Last, wenn man das Produkt aus der Kraft und sämtlichen Radradien durch das Produkt aus sämtlichen Wellenradien dividiert.

Bei zwei ineinandergreifenden Rädern haben aber nach Antwort auf Frage 222 die Zähnezahlen dasselbe Verhältnis wie die Halbmesser der entsprechenden Räder, so dass, wenn man die Zähnezahlen der Triebe a und b mit z_1 und z_2, und ebenso die Zähnezahlen der Räder B und C mit Z_1 und Z_2 bezeichnet, man vorstehende Gleichungen auch so schreiben kann:

1). . . $P : Q = z_1 . z_2 . r_3 : R_1 . Z_1 . Z_2$

2). . . . $P = \dfrac{z_1 . z_2 . r_3 . Q}{R_1 . Z_1 . Z_2}$

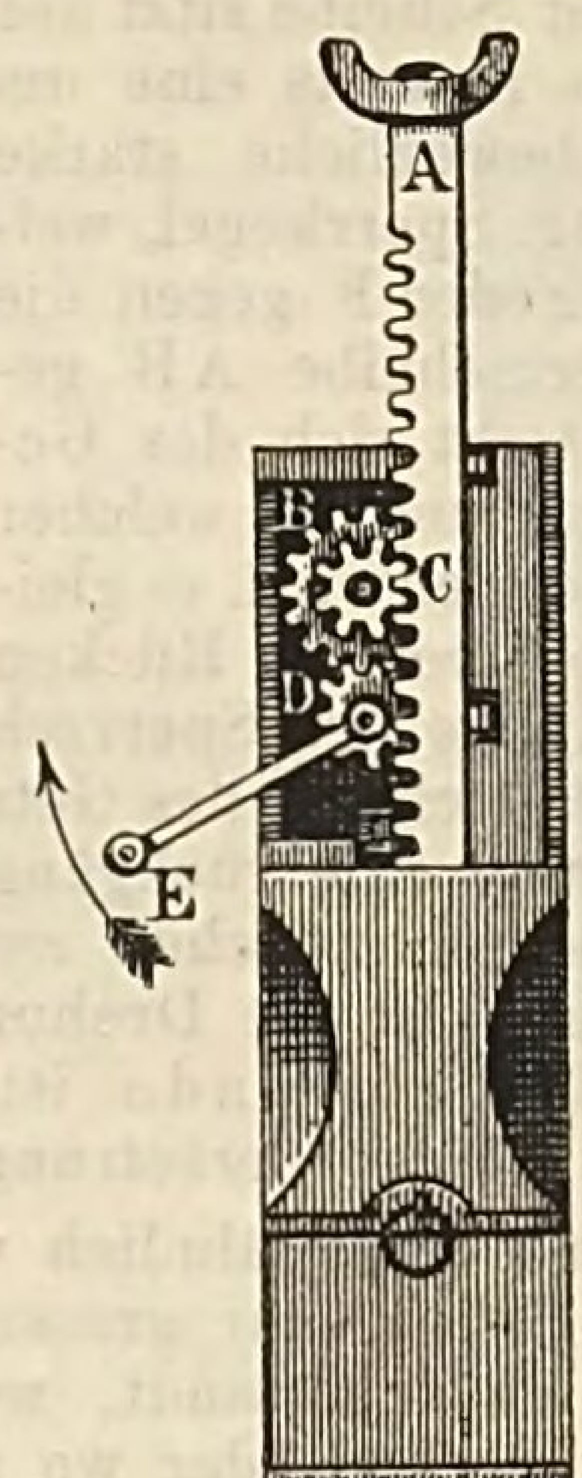
3). . . . $Q = \dfrac{R_1 . Z_1 . Z_2 . P}{z_1 . z_2 . r_3}$

und Lastwelle, eine mehrfache Uebersetzung, d. h. mehrfache Räderpaare anwenden.

Alsdann soll man die Einrichtung treffen, dass die Umdrehungsanzahl jedes folgenden Wellbaumes ungefähr um das Gleiche grösser oder kleiner wird.

Auch sollen die Zähnezahlen zweier ineinandergreifender Räder in einem solchen Verhältnis stehen, dass sie sich nicht durcheinander dividieren lassen, und überhaupt keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Dadurch wird bewirkt, dass sich die nämlichen Zähne nicht zu oft berühren und zu stark abarbeiten. Dies kann natürlich aber nur für solche Mechanismen gelten, bei welchen ein bestimmtes Verhältnis in den Umdrehungszahlen der Räder nicht ganz genau einzuhalten ist. Man erreicht dies so, dass wenn das kleinere Rad z. B. 12 Zähne hat und das grössere etwa 4 mal grösser werden soll, man demselben statt 48 Zähnen deren 49 gibt. Bei Uhren etc. aber, bei welchen immer auf eine gewisse Anzahl Umdrehungen eines Getriebes eine Umdrehung des eingreifenden Rades kommen soll, darf das genannte Verfahren natürlich nicht befolgt werden, sondern es müssen die Zähnezahlen genau im Verhältnis, und zwar im umgekehrten, zu den Umdrehungszahlen stehen. Bei Winkelrädern überhaupt auch kann man die Zahl der Zähne nicht willkürlich abändern, da sich die schiefe Stellung der Zähne des einen Rades genau nach der Grösse des andern richtet.

Figur 328.

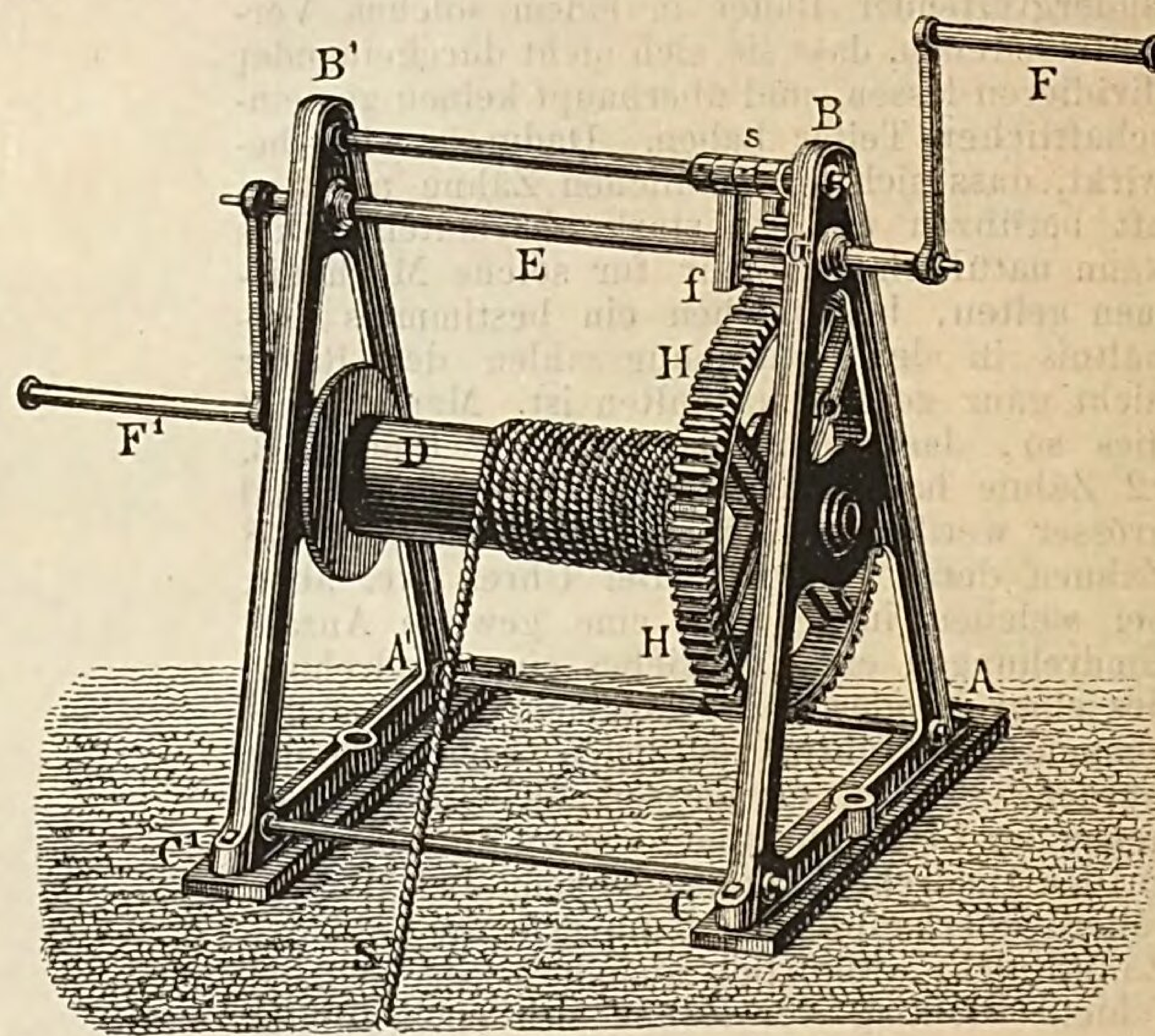


Erkl. 253. Als allbekannte Beispiele zu den vorstehenden Erörterungen über die zusammengesetzten Räderwerke seien hier nur erwähnt: 1). die Fuhrmannswinde, 2). der Haspel mit Vorgelege, 3). der Krahn und 4). das Räderwerk der Wassermühle.

1). Die Fuhrmanns- oder Wagenwinde (Fig. 328) findet ihre Anwendung, wenn man sehr grosse Lasten auf eine geringe Höhe heben will. Sie besteht aus einer gezahnten Stange A, in welche das Getriebe C eingreift. Auf der Achse dieses Getriebes befindet sich ein Rad B, welches in ein zweites Getriebe D eingreift; mit D ist die Kurbel E fest verbunden. Wird daher die Kurbel E in der Richtung des Pfeils gedreht, so dreht der Trieb D zunächst das Rad B in entgegengesetzter Richtung; der mit B fest verbundene und in die Zahnstange eingreifende Trieb C bewegt dann die Stange A aufwärts und hebt den Wagen oder dergl., unter den man die Winde gestemmt hat, in die Höhe. — Die Stange sowie die Räder der Winde sind von einem starken Gehäuse von Holz umgeben. Um zu verhindern, dass die Zahnstange A, wenn die Kraft an der Kurbel zu wirken aufhört, durch das Gewicht des darauf lastenden Körpers herabgedrückt und dadurch die Kurbel in der entgegengesetzten Richtung gedreht wird, ist mit der Kurbel eine Sperrvorrichtung verbunden, wie sie nachstehend beschrieben ist.

2). Die Seilwinde, Bockwinde oder der Aufzug oder Haspel mit Vorgelege (Fig. 329) dient hauptsächlich zum Aufwinden von Baumaterial u. dgl. m. und besteht aus einer Welle D, die mit einem Zahnrad H versehen ist, in welches das durch die Kurbel in Bewegung gesetzte Getriebe eingreift. Die Kurbel nebst Getriebe wird das Vorgelege genannt. Um eine rückwärtsgehende Bewegung der Last zu verhindern, wenn die an der Kurbel wirkende Kraft etwa aufhört zu wirken, hängt bei *s* an dem Querstab BB_1 eine federnde Zunge herab, welche die Bewegung des Getriebes nach der einen Richtung frei gestattet, bei einer Rückbewegung aber sich sofort gegen den gerade vor ihr liegenden Zahn anstemmt, oder aber es ist auf der Achse C des Vorgeleges eine gezahnte Scheibe AB (Fig. 330) befestigt, welche sich mit der Achse C dreht. Getrennt von dieser Scheibe sitzt auf dem Gerüst des Haspels eine um die Achse D bewegliche starke Zunge G, der sog. Sperrkegel, welche durch eine Feder F gegen die Zähne der Sperrscheibe AB gedrückt wird. Dreht sich das Getriebe in der Richtung, in welcher die Last aufgewunden wird, so gleitet die Zunge G über die Rücken der schrägen Zähne der Sperrscheibe, und gestattet die freie Drehung des Getriebes; sobald aber die Bewegung eine rückgängige wird, legt sich der Sperrkegel zwischen zwei Zähne der Sperrscheibe und hält die Drehung des Getriebes auf. — Die Seilwinde ist auch häufig mit zweifacher Räderübersetzung konstruiert.

Figur 329.



3). Der Krahn dient, ähnlich wie der vorige Apparat, zum Heben sehr grosser Lasten und wird allgemein da angewandt, wo Schiffe ein- und ausgeladen werden oder wo in Maschinen-Werkstätten und Giessereien schwere Maschinenteile von einem Ort zum andern zu bringen sind. Ein notwendiges Erfordernis des Krahns ist ein etwas gegen den Horizont geneigter Balken mit einer Rolle, über welche das Tragseil geht, und eine Einrichtung zur Umdrehung der ganzen Maschine, um die gehobenen Lasten auf kurze Strecken in horizontaler Ebene zu bewegen.

Figur 330.

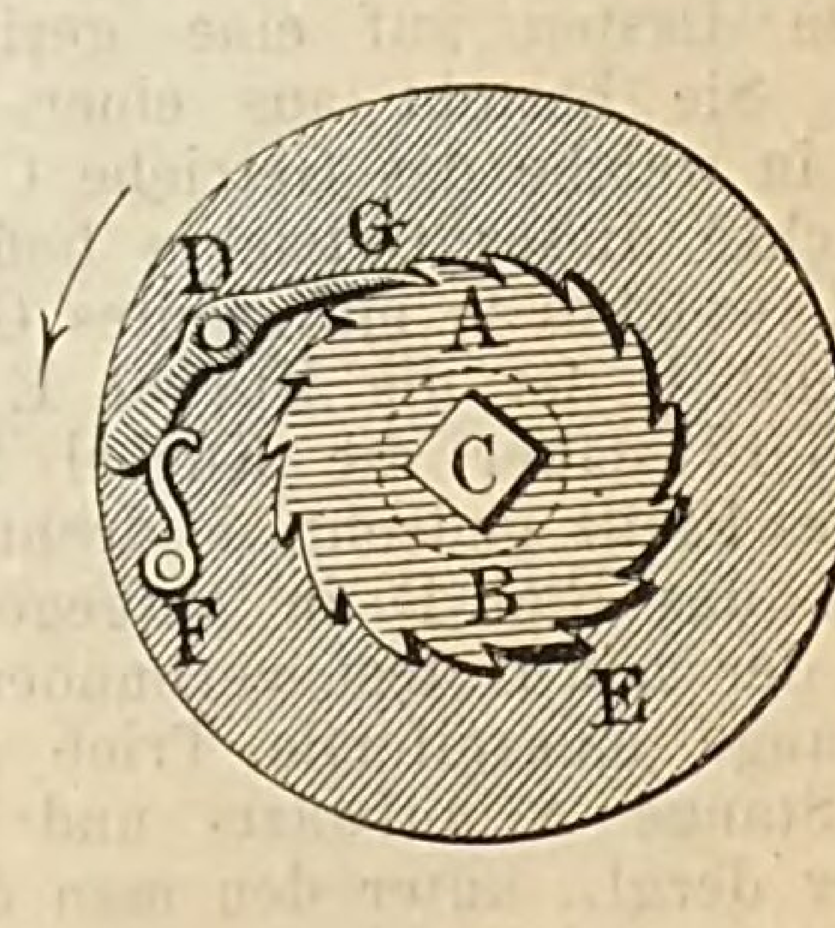


Fig. 331 zeigt einen grösseren Krahn mit Rad und Getriebe, wie er hauptsächlich auf Schiffswerften gebraucht wird, und Fig. 332 veranschaulicht das Räderwerk eines solchen Krahns von der Rückseite gesehen. A ist die Seiltrommel, mit welcher auf der nämlichen Achse das Rad B fest verbunden ist, in welches ein Getriebe C eingreift; auf der Achse des letzteren sitzt ausserdem ein Rad D, in welches das Getriebe E eingreift; in der Figur ist das Rad D nur teilweise sichtbar; es liegt hinter dem Trieb E. Auf der Achse des Getriebes E sitzt ein Rad F.

Da die beiden Wellen der Räder genau in gleicher Höhe liegen, so ist in der Fig. 332 nur eine derselben sichtbar, indem die Welle des Rades D durch die des Rades F verdeckt wird. Unter diesen beiden Rädern F und D befindet sich eine Achse HG, die vor dem unteren Teil des Rades D und hinter dem unteren Teil des Rades F vorbeigeht; dieselbe trägt die beiden Getriebe K und L, jedes von 9 Zähnen, und ist an beiden Enden mit Kurbeln von 40 cm Länge versehen.

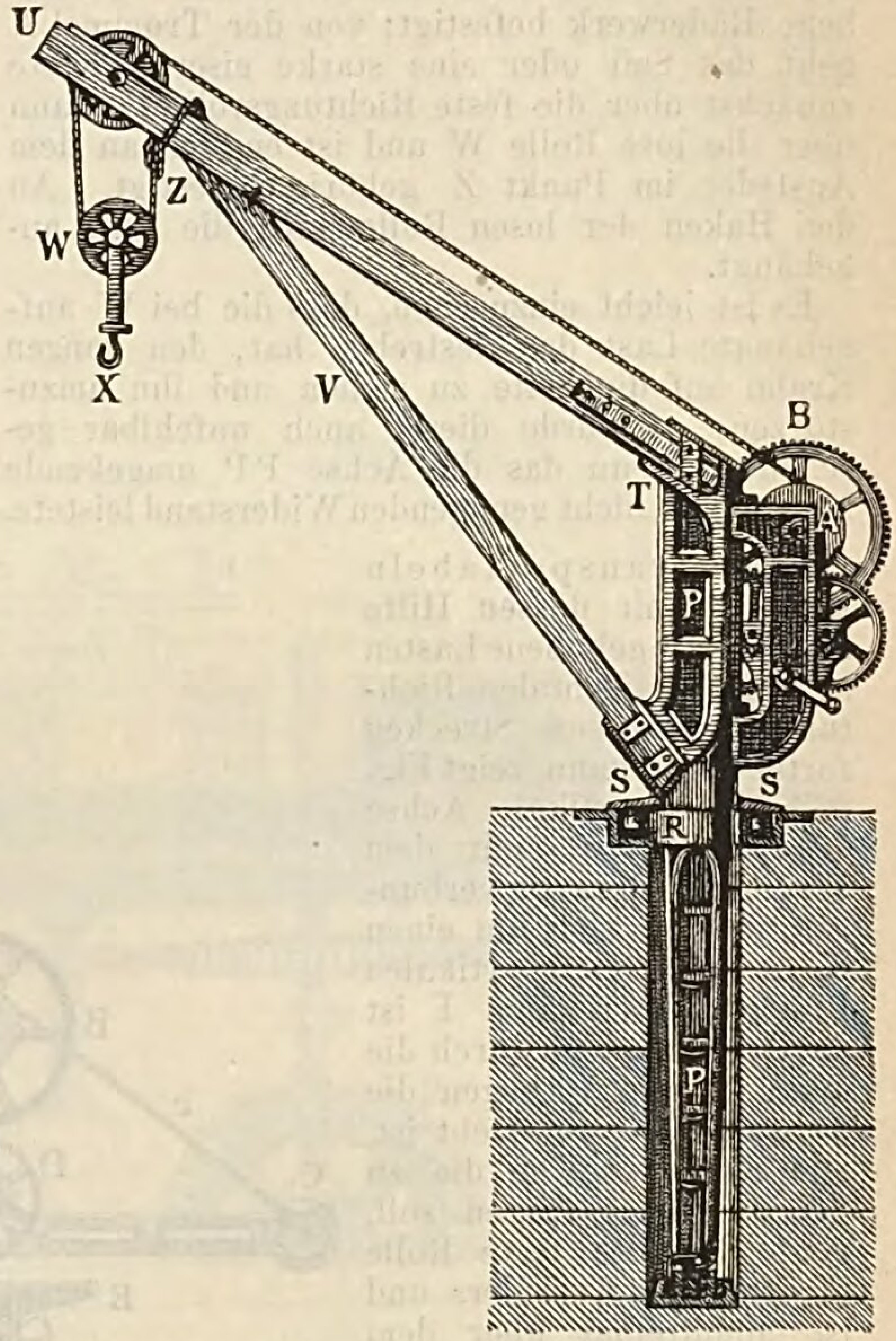
In der Stellung, in welcher die Fig. 332 diese letzteren Getriebe K und L zeigt, stehen diese weder mit dem Rad D noch mit F im Eingriff; verschiebt man aber die Achse HG in ihrer Längenrichtung, z. B. nach rechts, so werden die Zähne des Getriebes K in die des Rades D eingreifen; verschiebt man dagegen die Achse HG nach links, so kommt das Getriebe L mit dem Rad F in Eingriff. Vermittelst eines mit einem Gegengewicht M versehenen Hebels, der sich um die Achse N drehen lässt, kann man die Achse HG nach Belieben in einer der drei bezeichneten Lagen erhalten, indem das eine Ende desselben hakenförmig gekrümmt ist, und sich zwischen Vorsprünge legen lässt, die zu diesem Zweck auf der Achse HG angebracht sind.

Wenn die Achse HG die Stellung hat, wie in der Fig. 332, so kann man die Kurbel drehen, ohne eines der Räder zu bewegen; die Seiltrommel A steht dann ebenfalls still. Steht das Getriebe K mit dem Rad D im Eingriff, so hat eine Drehung der Kurbeln die Drehung des Getriebes K, damit auch des Rades D und des Getriebes C, und infolge hiervon eine Drehung des Rades B und der Seiltrommel A zur Folge; es dreht sich zwar auch das Getriebe E und das Rad F, allein ohne auf die Bewegungsübertragung, also ohne auf das Verhältnis zwischen der Kraft und der Last einen Einfluss auszuüben; sie laufen leer und wirken nicht zur Bewegung der Trommel A mit. Greift dagegen das Getriebe L in das Rad F ein, so wird die Bewegung der Kurbeln durch die sämtlichen Räder B, D, F und die Getriebe C, E, L auf die Trommel A übertragen; es wirkt nämlich L auf F und damit auf E, E auf D und damit auf C, C auf B und damit auf A.

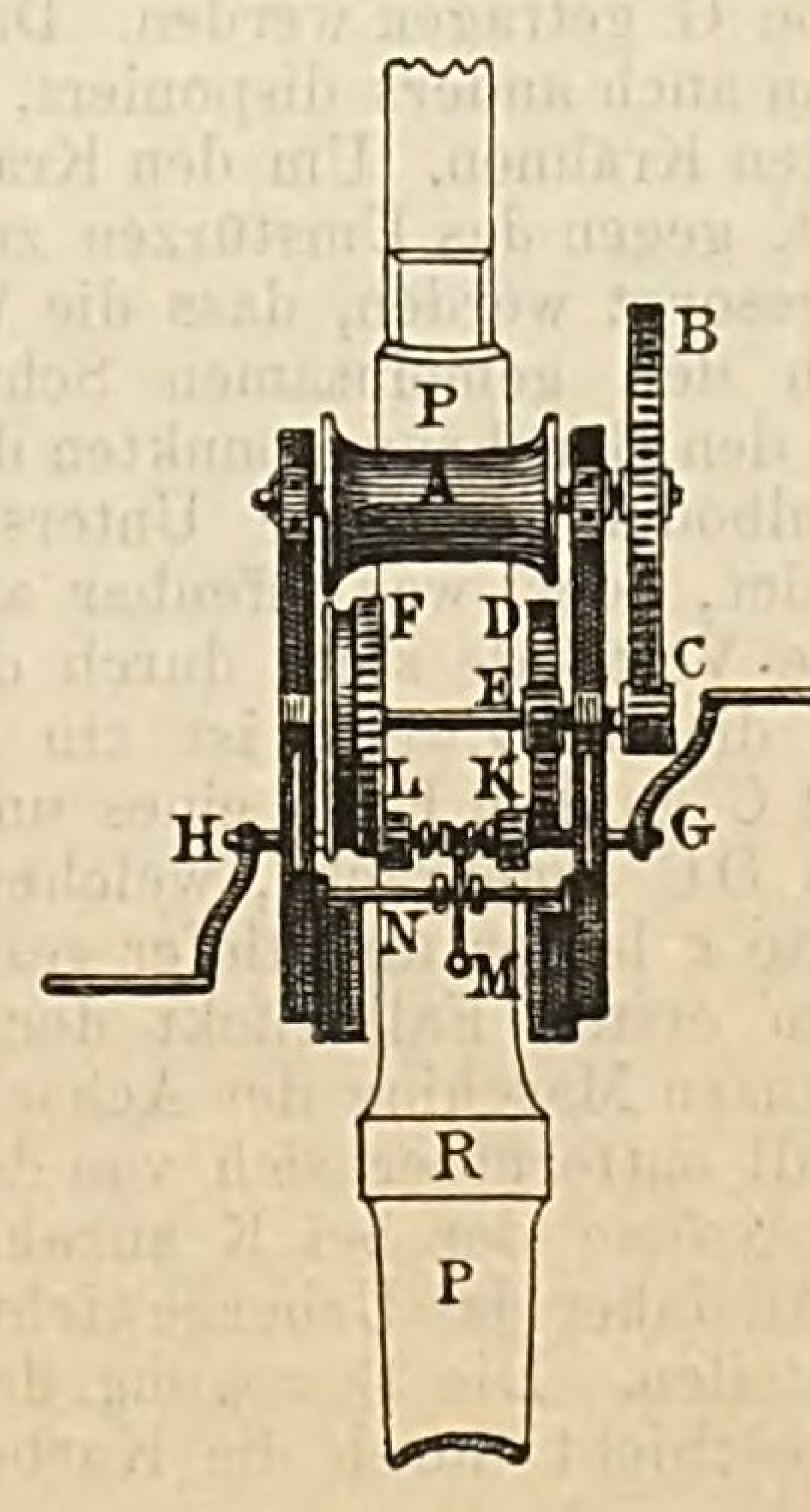
Das Gussstück PP der Maschine bildet die vertikale Achse, um welche der ganze Krahn sich drehen lässt; dieselbe hat an ihrem unteren Teil einen Zapfen, mit welchem sie in einer Pfanne ruht, während sie am oberen Teil bei R, wo sie aus dem Mauerwerk hervortritt, von allen Seiten rings umfasst und auf diese Weise in einer unverrückbaren, vertikalen Stellung gehalten wird.

Um die Reibung des oberen Teiles R des vertikalen Ständers PP möglichst zu vermindern, versieht man den Zwischenraum, der sich zwischen dem cylindrisch abgedrehten Teil R und dem umgebenden Mauerwerk befindet, mit einigen sogenannten Friktionsrollen, deren Achsen vertikal stehen und die den Zweck ha-

Figur 331.



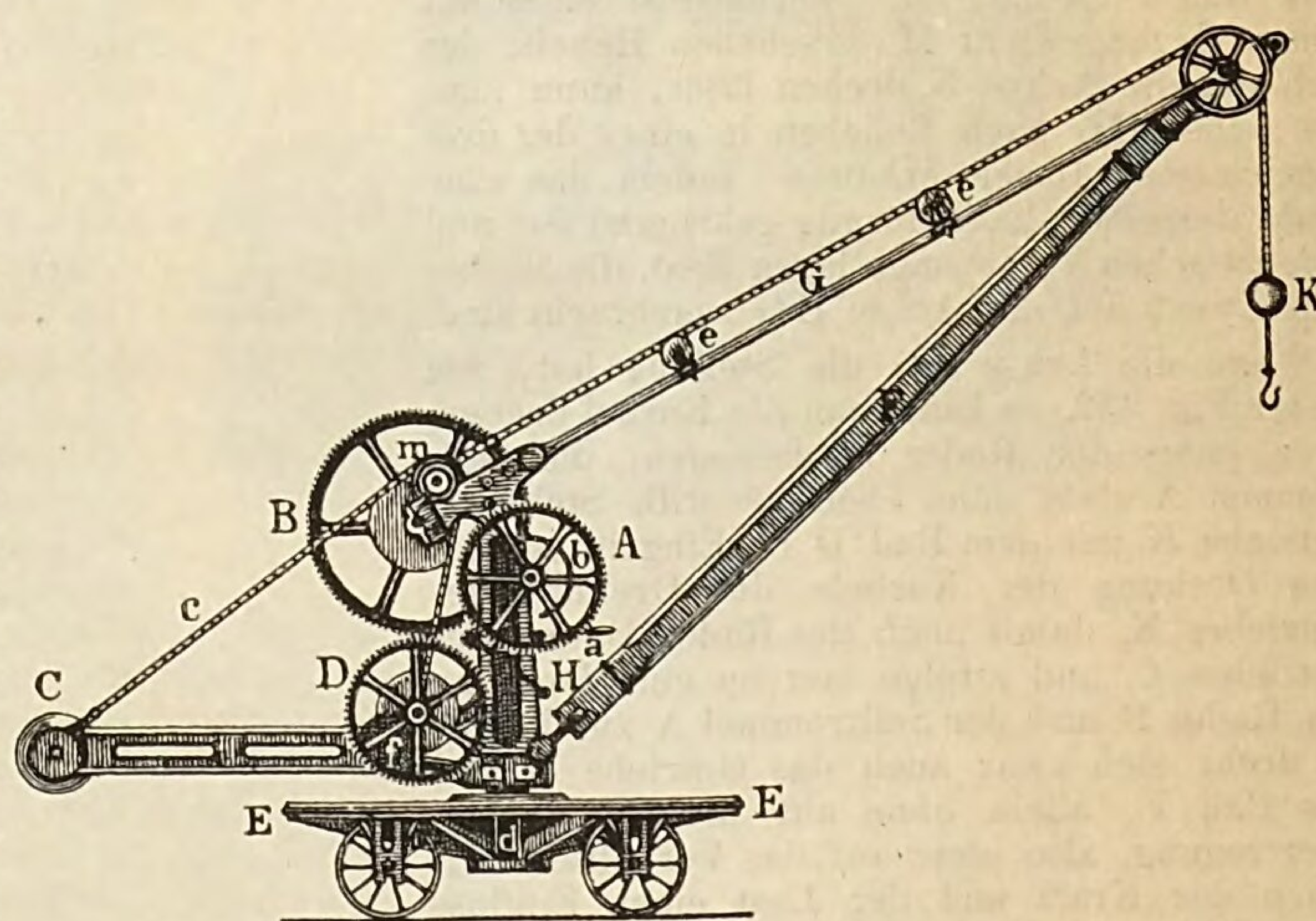
Figur 332.



ben, das Schleifen des Teiles R auf dem Mauerwerk zu verhindern. Mit der Achse PP ist am oberen Ende der Auslader UT stark verbunden, der gegen das Abbrechen durch eine starke Seitenstütze V mit dem Ständer verstrebt ist. Auf der Achse PP ist das vorhin beschriebene Räderwerk befestigt; von der Trommel A geht das Seil oder eine starke eiserne Kette zunächst über die feste Richtungsrolle U, dann über die lose Rolle W und ist endlich an dem Auslader im Punkt Z gehörig befestigt. An den Haken der losen Rolle wird die Last angehängt.

Es ist leicht einzusehen, dass die bei W aufgehängte Last das Bestreben hat, den ganzen Krahn auf die Seite zu ziehen und ihn umzustürzen; es würde dieses auch unfehlbar geschehen, wenn das die Achse PP umgebende Mauerwerk nicht genügenden Widerstand leistete.

Figur 333.

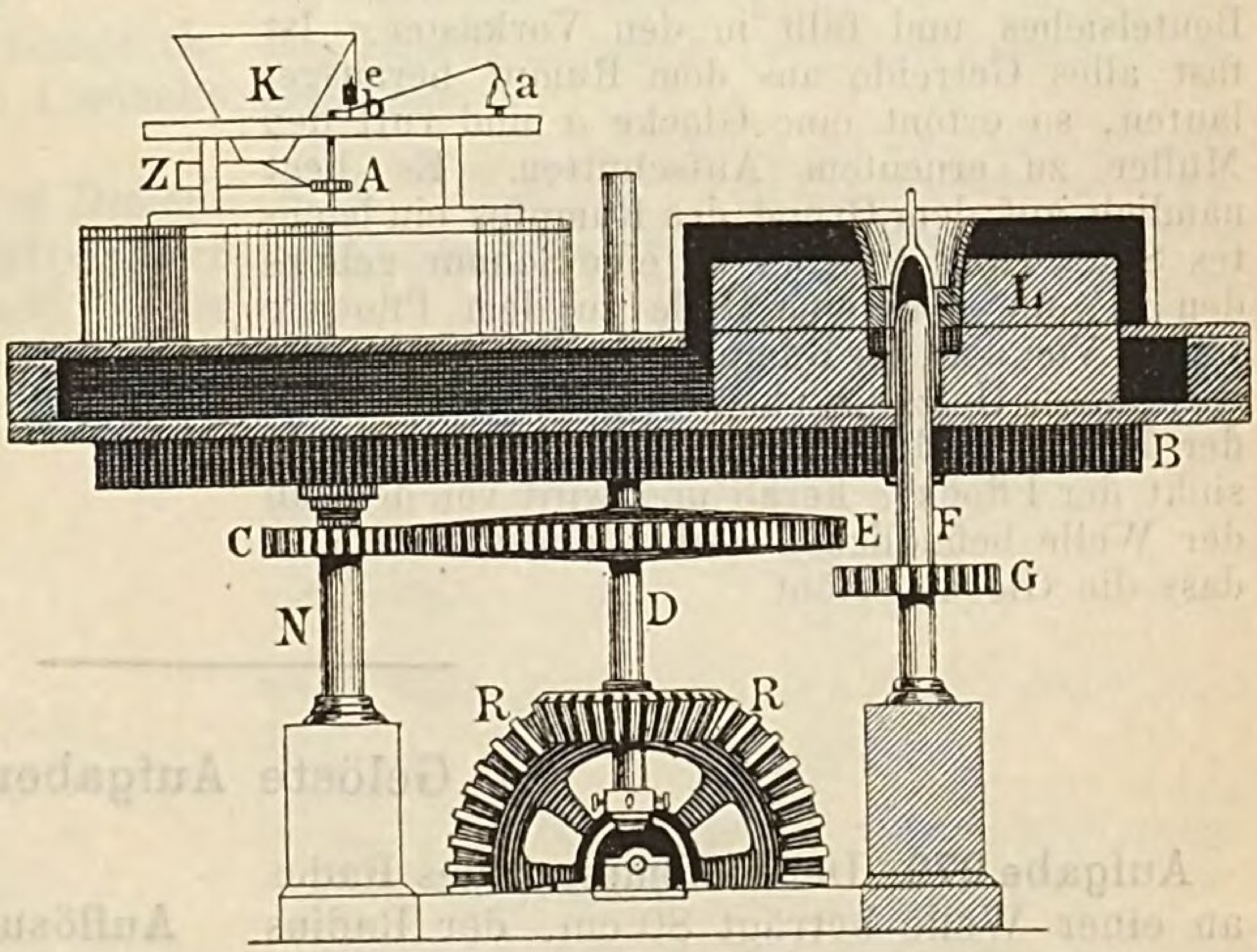


Einen transportabeln Krahn, mit dessen Hilfe man bereits gehobene Lasten in einer horizontalen Richtung auf grössere Strecken fortbewegen kann, zeigt Fig. 333. Die vertikale Achse des Krahns ist mit dem Wagen EE derartig verbunden, dass er sich um einen bei *d* befestigten vertikalen Pfosten drehen kann. F ist der Auslader, der durch die obere Stange G gegen die Achse gehörig verstrebt ist. Die Kette, welche die zu hebende Last tragen soll, geht über die feste Rolle am Ende des Ausladers und ist unmittelbar über dem Haken mit einer eisernen Kugel K versehen, damit sie nicht ganz über die Rolle weggezogen werden kann. Die Kette läuft über zwei Leitrollen *e*, die von der Strebe G getragen werden. Das Räderwerk ist, wenn auch anders disponiert, ganz wie bei den übrigen Krahnen. Um den Krahn, wenn er belastet ist, gegen das Umstürzen zu sichern, muss dafür gesorgt werden, dass die Vertikale, welche durch den gemeinsamen Schwerpunkt geht, die von den Berührungspunkten der Räder auf dem Erdboden gebildete Unterstützungsfläche schneidet, oder, was offenbar am besten ist, dass diese Vertikale stets durch die Achse *d* geht. Zu diesem Zweck ist ein schweres Gegengewicht C an dem Ende eines um *f* drehbaren Hebels DC angebracht, welches vermittelst der Kette *c* höher und tiefer gestellt werden kann; im ersten Fall rückt der Schwerpunkt der ganzen Maschine der Achse *d* näher, im andern Fall entfernt er sich von der Achse. Je nach der Grösse der bei K anzuhängenden Last wird man daher das Uebergewicht C tiefer oder höher stellen. Die Bewegung des Uebergewichts C geschieht durch die Kurbel H und

deren Getriebe, wenn dieses vorher durch Verschieben seiner Achse mit dem Rad D in Eingriff gebracht worden ist; die Kette *c* schlingt sich zuerst über eine feste Leitrolle *m* und ist dann auf der Welle des Rades D befestigt. Wenn die Last auf die erforderliche Höhe gebracht ist, lässt sich der ganze Krahn vermittelst des Wagens EE an die Stelle bringen, wo die Last niedergelegt werden soll.

4). Auch die allbekannten Wind- und Wassermühlen sind dem Wesen nach zusammengesetzte Räderwerke. Auf den Mühlenflügel oder das Wasserrad wirkt die treibende Kraft des Windes oder Wassers und der rotierende Mühlstein leistet die Arbeit. Wasserrad oder Mühlenflügel bewegen eine wagerechte Welle, welche in das Innere der Mühle tritt und vermittelst der konischen Räder RR ihre Kraft an eine stehende Welle D abgibt, die ein grösseres horizontales Stirnrad trägt, welches in die beiden seitwärts stehenden Getriebe C und G eingreift und hierdurch die Mühlspindeln F und N in raschen Umtrieb setzt (siehe Fig. 334). Damit ein oder beide Mahlgänge beliebig in Stillstand und wieder in Gang gesetzt werden können, sind die Getriebe C und G auf ihren Spindeln verschiebbar, und in Fig. 334 erscheint der rechte Mahlgang ausgerückt, d. h. das Getriebe G ist durch Herunterrücken ausser Eingriff mit der Triebscheibe E gesetzt. Das Mahlen geschieht zwischen den beiden horizontal liegenden runden Mühlsteinen, von welchen der untere festliegt und Bodenstein genannt wird, während sich der obere L über dem unteren um seine senkrechte Achse umdreht und Läufer heisst. In der Mitte hat der Läufer in der Richtung seiner Achse ein Loch, das Läuferauge, durch welches das Getreide zwischen die Mühlsteine eingeführt wird; auch der Bodenstein hat in seiner Mitte ein rundes Loch, welches so mit Holz ausgefüttert ist, dass sich die Spindel oder das Mühleisen F, durch welches der Läufer herumgedreht wird, eben noch leicht darin umdrehen kann. Um das Getreide zwischen die Mühlsteine zu bringen, dient der Rumpf K, welcher über denselben befestigt ist und in den das Getreide geschüttet wird. Der Rumpf hat die Gestalt eines viereckigen Trichters, dessen untere Oeffnung der Schuh Z umschliesst; das ist ein Kasten mit niedrigem Rande, welcher unter dem Rumpf hängt und gehoben werden kann. Vorn hat der Schuh eine durch einen Schieber mehr oder weniger verschliessbare Oeffnung, aus welcher das Getreide durch das Läuferauge auf den Bodenstein fällt. Damit das Getreide gleichmässiger aus dem Schuh falle, erteilt man demselben eine regelmässig rüttelnde Bewegung durch den, vorn an ihm angebrachten Rührstock A, welcher bis in das

Figur 334.



Läuferauge reicht und hier an einen hölzernen, mit drei Zacken versehenen Ring durch eine Feder angedrückt und so hin und her bewegt wird. Der Läufer treibt nach und nach das gemahlene Getreide an den Rand der Steine und aus denselben heraus; damit das Mehl aber nicht nach allen Seiten herausgeworfen werde, sind die Steine mit einer hölzernen Umhüllung umgeben. Durch eine Oeffnung derselben kommt das gemahlene Getreide in das Beutelwerk, wo das Mehl von der Kleie durch ein besonderes Sieb gesichtet wird. Da das Beutelwerk beständig durch den an einer senkrechten Welle befindlichen Beutelarm erschüttert wird, so fällt das feine Mehl durch denselben in den Mehlkasten, welcher mit dem Windetuch verhängt ist, damit das Mehl nicht herausfliegt. Die Kleie geht durch eine andere Oeffnung des Beutelsiebes und fällt in den Vorkasten. Ist fast alles Getreide aus dem Rumpf herausgelaufen, so ertönt eine Glocke *a* und ruft den Müller zu erneutem Aufschütten. Es liegt nämlich auf dem Grund des Rumpfes ein leichtes Stück Holz, welches an eine Schnur gebunden ist, die über eine Rolle zu dem Pflock *e* führt. Von dem im Rumpf befindlichen Getreide wird dieses Holzstückchen festgehalten, so lange der Rumpf noch nicht ganz leer ist, dann aber sinkt der Pflock *e* herab und wird von dem an der Welle befindlichen Stab *b* angestossen, so dass die Glocke ertönt.

γ). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 279. Der Halbmesser des Rades an einer Welle beträgt 80 cm, der Radius der Welle 12 cm. In welchem Verhältnis steht für den Fall des Gleichgewichts die Kraft zur Last und welche Kraft vermag einer Last von 580 kg das Gleichgewicht zu halten?

Hilfsrechnung.

$$\frac{580}{6\frac{2}{3}} = \frac{580 \,.\, 3}{20} = 29 \,.\, 3 = 87$$

Auflösung. Nach Gleichung 1). in Antwort auf Frage 210 ist:

$$P : Q = r : R$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$P : Q = 12 : 80$$

oder:

$$P : Q = 3 : 20$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie 3 : 20 oder wie 1 : $6\frac{2}{3}$. Beträgt nun die Last 580 kg, so beträgt die Kraft

$$P = \frac{580}{6\frac{2}{3}}$$

oder:

$$P = 87$$

d. h. eine Kraft von 87 kg hält einer Last von 580 kg das Gleichgewicht.

Aufgabe 280. Der Halbmesser eines Wellrades beträgt 1,2 m, der Radius der Welle 16 cm, die Dicke des Lastseils beträgt 4 cm, die Dicke des Seils, an welchem die Kraft wirkt, $1\frac{1}{2}$ cm. Welcher Last kann man mit einer Kraft von 24 kg das Gleichgewicht halten?

Auflösung. Nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 210 ist:

$$Q = \frac{P\,(D + d)}{(\varDelta + \delta)}$$

oder da $P = 24$, $D = 2 \,.\, 1{,}2 = 2{,}4$, $d = 0{,}015$,

Hilfsrechnung.

$$2{,}4 + 0{,}015 = 2{,}415$$
$$0{,}32 + 0{,}04 = 0{,}36$$

$$Q = \frac{24 \,.\, 2{,}415}{0{,}36}; \quad Q = \frac{2 \,.\, 0{,}805}{0{,}01}$$

oder: $Q = 1{,}610 : 0{,}01$

oder: $Q = 161$

$\varDelta = 2 \,.\, 0{,}16 = 0{,}32$ und $\delta = 0{,}04$ ist, so erhält man für:

$$Q = \frac{24\,(2{,}4 + 0{,}015)}{(0{,}32 + 0{,}04)}$$

oder:

$$Q = 161 \quad \text{(siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. mit einer Kraft von 24 kg kann man einer Last von 161 kg das Gleichgewicht halten. Ohne Rücksicht auf die Dicke der Seile würde $Q = \frac{24 \,.\, 120}{16} = 180$ sein.

Aufgabe 281. Mittels eines Spillenrades (siehe Fig. 302) von 3 m Durchmesser soll eine Last von 750 kg durch 48 kg Kraft im Gleichgewicht erhalten werden.

a). Wie gross muss der Wellendurchmesser sein, wenn die Dicke des Lastseils 3,5 cm beträgt?

b). Wie gross muss bei denselben Dimensionen die Kraft sein, wenn bei eintretender Bewegung die Bewegungshindernisse $^1/_3$ der Last betragen?

Auflösung. a). Die Kraft $P = 48$ kg wirkt an einem Hebelarm von $\frac{1}{2} \,.\, 3 = 1\frac{1}{2}$ m Länge. Die Last $Q = 750$ kg wirkt an einem Hebelarm von

$$\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 0{,}035\right) = \left(\frac{1}{2} x + 0{,}0175 \text{ m}\right)$$

Länge, folglich ist bei Gleichgewicht:

$$48 \,.\, 1\frac{1}{2} = 750\left(\frac{1}{2} x + 0{,}0175\right)$$

oder:

$$72 = 375 x + 13{,}125 \quad \text{(s. Hilfsr. 1)}$$

oder:

$$375\, x = 72 - 13{,}125$$

und somit:

$$x = \frac{72 - 13{,}125}{375}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung 2). ist:

$$x = 0{,}157$$

d. h. der Durchmesser der Welle muss 15,7 cm betragen.

b). Ohne Bewegungshindernisse ist nach Antwort auf Frage 210:

$$P = \frac{Q r}{R}$$

Betragen aber die Bewegungshindernisse $= \frac{1}{3} Q$, so muss:

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q r}{R}$$

sein, oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, gibt:

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{750\left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}157 + 0{,}0175\right)}{1\frac{1}{2}}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$P = 64$$

Dasselbe Resultat würde sich auf einfache Weise ergeben haben, wenn man die gegebene Kraft $P = 48$ mit $^4/_3$ multipliziert hätte. Da beide Resultate genau miteinander übereinstimmen, so ist damit der Beweis geliefert, dass die für den Wellendurchmesser berechnete Grösse richtig ist.

Hilfsrechnungen:

1). . . . $750 \,.\, 0{,}0175 = 0{,}175 \,.\, 75$

```
 875
1225
13,125
```

2). . . 72 − 13,125

```
  72
− 13,125
  58,875 : 375 = 0,157
  375
  2137
  1875
   2625
   2625
```

3). . . $\frac{1}{2} \cdot 0{,}157 = 0{,}0785$

```
  0,0785
+ 0,0175
  0,0960
```

also ist:

$$P = \frac{4 \,.\, 750 \,.\, 2 \,.\, 0{,}096}{3 \,.\, 3}$$

oder:

$$P = 4 \,.\, 250 \,.\, 2 \,.\, 0{,}032 = 1000 \,.\, 0{,}064 = 64$$

Aufgabe 282. Welche Last können zwei Männer vermittelst eines Kreuzhaspels (siehe Fig. 303) aufwinden, wenn jeder mit einer Kraft von 25 kg arbeitet und wenn die Länge eines Hebelarms bis zum Angriffspunkt der Kraft = 90 cm und der Halbmesser der Welle samt der halben Seildicke = $7\frac{1}{2}$ cm beträgt. Die Bewegungshindernisse sollen zu $\frac{1}{3}$ der Last berechnet werden.

Hilfsrechnung.

$$\frac{4 \,.\, 15x}{3 \,.\, 2} = 10x$$

also:

$$10x = 4500$$
$$x = 450$$

Auflösung. Die an einem 90 cm langen Hebelarm wirkende Kraft beträgt:

$$P = 2 \,.\, 25 \text{ oder } 50 \text{ kg}.$$

Die an einem Hebelarm von $7\frac{1}{2}$ cm wirkende Last ist x. Nach Antwort auf Frage 210 ist:

$$P \,.\, R = Q \,.\, r$$

oder mit Berücksichtigung der Reibung etc. ist:

$$P \,.\, R = \frac{4}{3} Q \,.\, r$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$50 \,.\, 90 = \frac{4}{3} x \,.\, 7\frac{1}{2}$$

oder:

$$4500 = \frac{4 \,.\, 15x}{3 \,.\, 2}$$

oder:

$$x = 450 \text{ (siehe Hilfsrechn.)}$$

d. h. die Last darf 450 kg betragen.

Aufgabe 283. An einem zweimännischen (d. h. mit zwei Kurbeln versehenen) Kurbelhaspel (siehe Fig. 304) arbeiten zwei Mann mit je 18 kg Kraft an 45 cm langen Kurbeln. Die Wellen- und Seildicke beträgt zusammen 12 cm.

a). Welche Last kann im Gleichgewicht erhalten werden?

b). Welche Last kann gehoben werden, wenn die Bewegungshindernisse = $\frac{1}{3}$ Q sind?

c). Wieviel Umdrehungen sind erforderlich, um die Last 6 m hoch zu heben?

Hilfsrechnungen:

1). . . . $\frac{3 \,.\, 270}{4} = \frac{3 \,.\, 135}{2}$

$\frac{3 \,.\, 135}{2} = \frac{405}{2} = 202\frac{1}{2}$

2). $3{,}14 \,.\, 12 = 37{,}68$

3) . . 600 : 37,68 = 60000 : 3768 = 16
3768
22320
22608

Auflösung. Es wirkt an einem 45 cm langen Hebelarm eine Kraft P = 2 . 18 oder 36 kg. Die Last x wirkt an einem 6 cm langen Arm, folglich wird für den Fall des Gleichgewichts:

$$36 \,.\, 45 = x \,.\, 6$$

oder:

$$x = \frac{36 \,.\, 45}{6}$$

oder:

$$x = 6 \,.\, 45 = 270$$

sein, d. h. die Last Q = 270 kg.

b). Betragen die Bewegungshindernisse = $\frac{1}{3}$Q, so darf die zu hebende Last bei demselben Kraftaufwand nur

$$\frac{3}{4} Q = \frac{3}{4} \cdot 270$$

oder: $Q = 202\frac{1}{2}$ kg betragen.

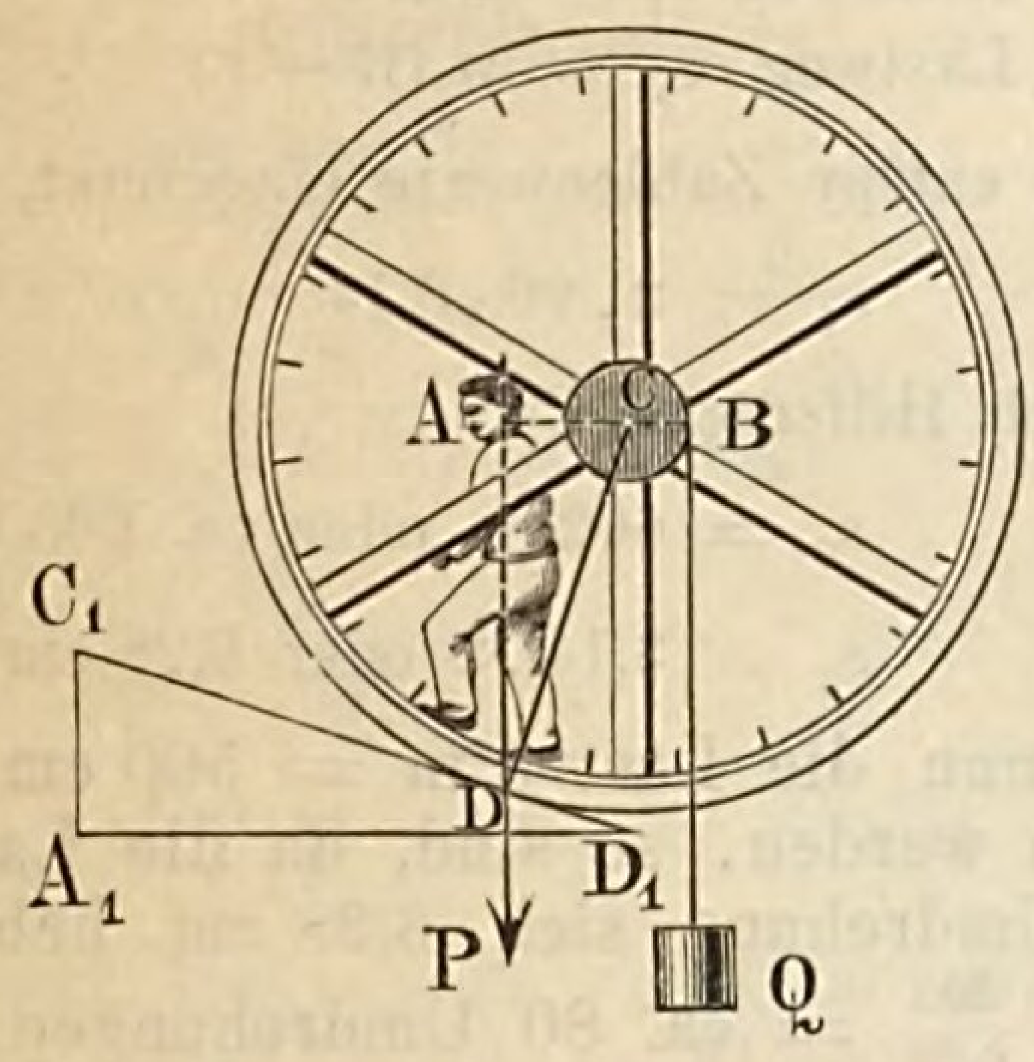
c). Bei einer Umdrehung wird die Last um

$$s = 12 \,.\, 3{,}14 \text{ oder } 37{,}68 \text{ cm}$$

gehoben. Soll nun die Last um 6 m gehoben werden, so sind $\frac{600}{37{,}68}$ Umdrehungen oder nach Hilfsrechnung 3). circa 16 Umdrehungen nötig.

Aufgabe 284. Welche Last kann ein Mann a). mittels eines Laufrads, b). mittels eines Sprossenrads aufwinden, wenn der Halbmesser des Rades oder der Kraftarm in beiden Fällen 1,5 m, der Wellenhalbmesser nebst halber Seildicke 12 cm, das Gewicht des Arbeiters 65 kg beträgt und die Bewegungshindernisse zunächst unberücksichtigt bleiben und wenn beim Laufrad der vom Angriffspunkt der Kraft ausgehende Radius mit der Kraftrichtung einen Winkel $\alpha = 35^0$ einschliesst (s. Fig. 335).

Figur 335.



Hilfsrechnung.

$$\frac{65 \cdot 150}{12} = \frac{65 \cdot 25}{2}$$

```
 65 . 25
 -------
    325
   130
 -------
   1625 : 2 = 812,5
```

$812{,}5 \cdot \sin 35^0 = \log 812{,}5 + \log \sin 35^0$

$$\begin{aligned} \log 812{,}5 &= 2{,}9098234 \\ + \log \sin 35^0 &= 9{,}7585913 - 10 \\ \hline \log x &= 2{,}7684147 \end{aligned}$$

mithin:
num-log x oder $x = 586{,}7$

Auflösung. a). Die unbekannte Last x wirkt an einem 12 cm langen Hebelarm, die Kraft P = 65 kg an einem Hebelarm $\overline{CA}$, welcher erst berechnet werden muss, und es ist somit für den Fall des Gleichgewichts:

$$12x = 65 \cdot \overline{CA}$$

Nun ist:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \sin \alpha$$

also:

$$\overline{CA} = \overline{CD} \cdot \sin \alpha$$

oder:

$$\overline{CA} = 150 \cdot \sin 35^0$$

und somit:

$$12x = 65 \cdot 150 \cdot \sin 35^0$$

oder:

$$x = \frac{65 \cdot 150}{12} \cdot \sin 35^0$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 586{,}7$$

d. h. die zu bewältigende Last beträgt ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse:

586,7 kg.

b). Wirkt dieselbe Kraft dagegen am Sprossenrad, so ist der Hebelarm der Kraft gleich dem Radius = 150 cm und somit für den Fall des Gleichgewichts:

$$x = \frac{65 \cdot 150}{12} = 812{,}5 \text{ kg (s. Hilfsrechn.}$$

Aufgabe 285. An dem 96 cm langen Hebelarm einer Differentialwelle wirkt eine Kraft von 64 kg. a). Welche Last wird mittels derselben gehoben werden können, wenn der Durchmesser des stärkeren Teils der Welle 32 cm, der des dünneren Teils 28 cm beträgt und die Reibungswiderstände zu $^1/_5$ der Last angenommen werden? b). Welchen Weg muss die Kraft zurücklegen, wenn die Last 5 m hoch gehoben werden soll?

Auflösung. Nach der auf Seite 357 gegebenen Gleichung ist die Last:

$$Q = \frac{2\,K\,P}{R - r}$$

da aber die Bewegungshindernisse $= {}^1/_5\,Q$ betragen, so ist für diesen Fall:

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{5 \cdot 2 \cdot 96 \cdot 64}{6 \cdot 2} = 2 \cdot 8 \cdot 64 \cdot 5$

$2 \cdot 64 = 128$
$8 \cdot 5 = 40$
5120

2). . . $2 \cdot 96 \cdot 3{,}14 = 192 \cdot 3{,}14$

768
192
576
602,88

3). . . $500 : 6{,}28 = 50000 : 628 = 79{,}6$

4396
6040
5652
3880
3768

4). . . $80 \cdot 6{,}03 = 482{,}4$

bei genauer Rechnung kommen rund 480 m heraus, denn:

$602{,}88 \cdot 79{,}6$
361728
542592
422016
479,89248

$$Q = \frac{5}{6} \cdot \frac{2\,K\,P}{(R - r)}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{5}{6} \cdot \frac{2 \cdot 96 \cdot 64}{\left(\frac{32}{2} - \frac{28}{2}\right)}$$

oder:

$$Q = \frac{5 \cdot 2 \cdot 96 \cdot 64}{6 \cdot 2}$$

oder:

$$Q = 5120 \text{ kg} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

b). Nach Erkl. 241 ist bei einer Umdrehung:

der Kraftweg $s_1 = 2\,K\,\pi$
der Lastweg $s_2 = \pi\,(R - r)$

oder die entspr. Zahlenwerte eingesetzt, ist:

$$s_1 = 2 \cdot 96 \cdot 3{,}14$$

oder nach Hilfsrechn. 2).:

$$s_1 = 602{,}88 \text{ oder ca. } 603 \text{ cm}$$

und

$$s_2 = 3{,}14 \cdot 2 \text{ oder } 6{,}28 \text{ cm}$$

Soll nun die Last 5 m = 500 cm hoch gehoben werden, so sind, da die Last bei einer Umdrehung sich 6,28 cm hebt, im ganzen $\frac{500}{6{,}28}$ = ca. 80 Umdrehungen nötig (siehe Hilfsrechnung 3). Mithin hat die Kraft einen Weg von 80 . 6,03 m oder rund 480 m zurückzulegen (siehe Hilfsrechn. 4).

Aufgabe 286. An einer Differentialwinde, deren dünnerer Wellenteil $12\frac{1}{2}$ cm und deren dickerer Wellenteil 20 cm Halbmesser hat, hängt eine Last von 200 kg und soll durch eine Kraft von 20 kg im Gleichgewicht erhalten werden. Welche Länge muss die Kurbel haben?

Hilfsrechnung.

$$\frac{200 \cdot 7\frac{1}{2}}{40} = 5 \cdot 7\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2} \text{ cm}$$

Auflösung. Da bei der Differentialwinde nach Erkl. 241:

$$Q\,(R - r) = 2\,P \cdot K$$

ist, so ergibt sich hieraus für:

$$K = \frac{Q\,(R - r)}{2\,P}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$K = \frac{200\left(20 - 12\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot 20}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$K = 37\frac{1}{2}$$

d. h. die Kurbellänge beträgt $37\frac{1}{2}$ cm.

Aufgabe 287. Mittels einer Erdwinde, deren Welle 22 cm Durchmesser hat, soll eine Last von 400 kg durch $22\frac{1}{2}$ kg Kraft gezogen werden.

a). Wie lang muss die Kurbel sein, wenn die Bewegungshindernisse unberücksichtigt bleiben?

b). Wie lang muss die Kurbel sein, wenn die Bewegungshindernisse $\frac{1}{4}$ der Last gleich gerechnet werden?

c). Wie gross ist in jedem der beiden Fälle der Weg, den die Kraft zurücklegen muss, um die Last 4 m weit zu rollen?

Hilfsrechnungen.

1). . . . $\frac{400 \,.\, 11 \,.\, 2}{45} = \frac{80 \,.\, 11 \,.\, 2}{9}$

$$\begin{array}{l} 80 \,.\, 22 \\ \hline = 1760 : 9 = 195\frac{5}{9} \\ \underline{9} \\ \underline{86} \\ 50 \end{array}$$

2). . . . $\frac{5}{4} \cdot 1{,}96 = 5 \,.\, 0{,}49 = 2{,}45$

3). . . $\underline{22 \,.\, 3{,}14}$

$$\begin{array}{r} 628 \\ \underline{628} \\ 69{,}08 \end{array}$$

4). . . $40000 : 6908 = 6$

$$\begin{array}{r} \underline{41448} \end{array}$$

5). $\frac{6 \,.\, 1{,}96}{11{,}76} \,.\, \frac{2 \,.\, 3{,}14}{6{,}28} =$

$$\begin{array}{r} 9408 \\ 2352 \\ \underline{7056} \\ 73{,}8528 \end{array}$$

6). $\frac{6 \,.\, 2{,}45}{14{,}70} \,.\, \frac{2 \,.\, 3{,}14}{6{,}28} =$

$$\begin{array}{r} 4396 \\ \underline{8792} \\ 92{,}316 \end{array}$$

Auflösung. a). Die Last von 400 kg wirkt an einem Arm von $\frac{1}{2} \cdot 22 = 11$ cm Länge, und die Kraft von $22\frac{1}{2}$ kg an einem Arm von x m Länge, somit ist für den Fall des Gleichgewichts:

$$22\frac{1}{2}x = 400 \,.\, 11$$

oder:

$$x = \frac{400 \,.\, 11 \,.\, 2}{45}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$x = 195\frac{5}{9} \text{ oder ca. } 196 \text{ cm}$$

b). Werden aber die Bewegungshindernisse berücksichtigt und zu $\frac{1}{4}$ der Last berechnet, so muss die Kurbel entsprechend länger und zwar:

$$\frac{5}{4} \cdot 1{,}96 \text{ m} = 2{,}45 \text{ m} \quad \text{(s. Hilfsrechn. 2)}$$

lang genommen werden.

c). Bei jeder Umdrehung wird die Last um

$$22 \,.\, 3{,}14 = 69{,}08 \text{ cm}$$

gefördert (siehe Hilfsrechn. 3), folglich sind, wenn der Lastweg 4 m beträgt:

$$\frac{400}{69{,}08} = \text{ca. } 6 \text{ Umdrehungen}$$

nötig und somit beträgt der Kraftweg bei einer Kurbellänge von 1,96 m:

$$6 \,.\, 1{,}96 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14 = 73{,}85 \text{ m}$$

(siehe Hilfsrechnung 5)

bei einer Kurbellänge von 2,45 m aber:

$$6 \,.\, 2{,}45 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14 = 92{,}32 \text{ m}$$

(siehe Hilfsrechnung 6).

Aufgabe 288. Wieviel Mann à 30 kg Kraft sind erforderlich, um an einer Schiffswinde, deren Halbmesser nebst der halben Taudicke $22\frac{1}{2}$ cm beträgt, mittels Handspaaken, deren Länge bis zur Mitte der Welle 1,5 m ist, eine Last von 1000 kg zu heben, wenn die Reibung $\frac{1}{3}$ der Kraft mehr nötig macht?

Auflösung. Die Last beträgt unter Berücksichtigung der Reibung

$$Q = \frac{4}{3} \cdot 1000$$

und wirkt an einem $22\frac{1}{2}$ cm langen Arm. Die Kraft beträgt $x \,.\, 30$ und greift an einem 1,5 m langen Arm an. Folglich ist:

$$\frac{4}{3} \cdot 1000 \,.\, 22{,}5 = 150 \,.\, 30\,x$$

oder:

$$x = \frac{4 \,.\, 1000 \,.\, 22{,}5}{3 \,.\, 150 \,.\, 30}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 6\frac{2}{3}$$

d. h. es sind zu der zu leistenden Arbeit 7 Mann erforderlich.

Hilfsrechnung.

$$\frac{4 \,.\, 1000 \,.\, 22{,}5}{3 \,.\, 150 \,.\, 30} = \frac{40 \,.\, 25}{150} = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$$

Aufgabe 289. An einer Erdwinde mit einer Welle von $22^1/_2$ cm Durchmesser arbeiten 6 Mann mit je 30 kg Kraft, aber 4 von ihnen in einer Entfernung von 1,5 m, die beiden übrigen von 1 m; welcher Last werden sie das Gleichgewicht halten?

Auflösung. Das Moment der 4 Mann à 30 kg bei 1,5 m Entfernung ist:

$$4 \,.\, 30 \,.\, 1{,}5 = 180 \text{ mkg}$$

das Moment der 2 Mann à 30 kg bei 1 m Entfernung ist:

$$2 \,.\, 30 \,.\, 1 = 60 \text{ mkg}$$

also das Gesamtmoment der Arbeiter = 240 mkg, der Halbmesser der Welle ist 0,1125 m, folglich das Moment der Last x = $0{,}1125x$ und somit für den Fall des Gleichgewichts:

$$0{,}1125\,x = 240$$

oder:

$$x = \frac{240}{0{,}1125}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 2133^1/_3 \text{ kg.}$$

Hilfsrechnung.

```
240 : 0,1125 = 2400000 : 1125 = 2133 1/3
               2250
               ----
                1500
                1125
                ----
                 3750
                 3375
                 ----
                  3750
                  3375
                  ----
                   375
```

Aufgabe 290. Ein Pferdegöpel wird durch zwei Pferde in Bewegung gesetzt, die diametral gegenüber an einem Arm von 5 m Länge ziehen und so eine Last von 1200 kg mit einem Kraftaufwand von je 60 kg heben, wobei die Bewegungshindernisse = $^1/_3$ der Last betragen. Welchen Durchmesser wird die Seiltrommel besitzen?

Auflösung. Das Moment der 2 Pferde à 60 kg bei 5 m Entfernung ist:

$$2 \,.\, 60 \,.\, 5 = 600 \text{ mkg}$$

die Last unter Berücksichtigung der Widerstände beträgt:

$$Q = \frac{4}{3} \cdot 1200 = 1600 \text{ kg}$$

und wirkt, wenn der unbekannte Durchmesser der Seiltrommel mit x bezeichnet wird, an dem Hebelarm $\frac{x}{2}$, folglich ist für den Fall des Gleichgewichts:

$$1600 \cdot \frac{x}{2} = 600$$

oder:

$$800\,x = 600$$

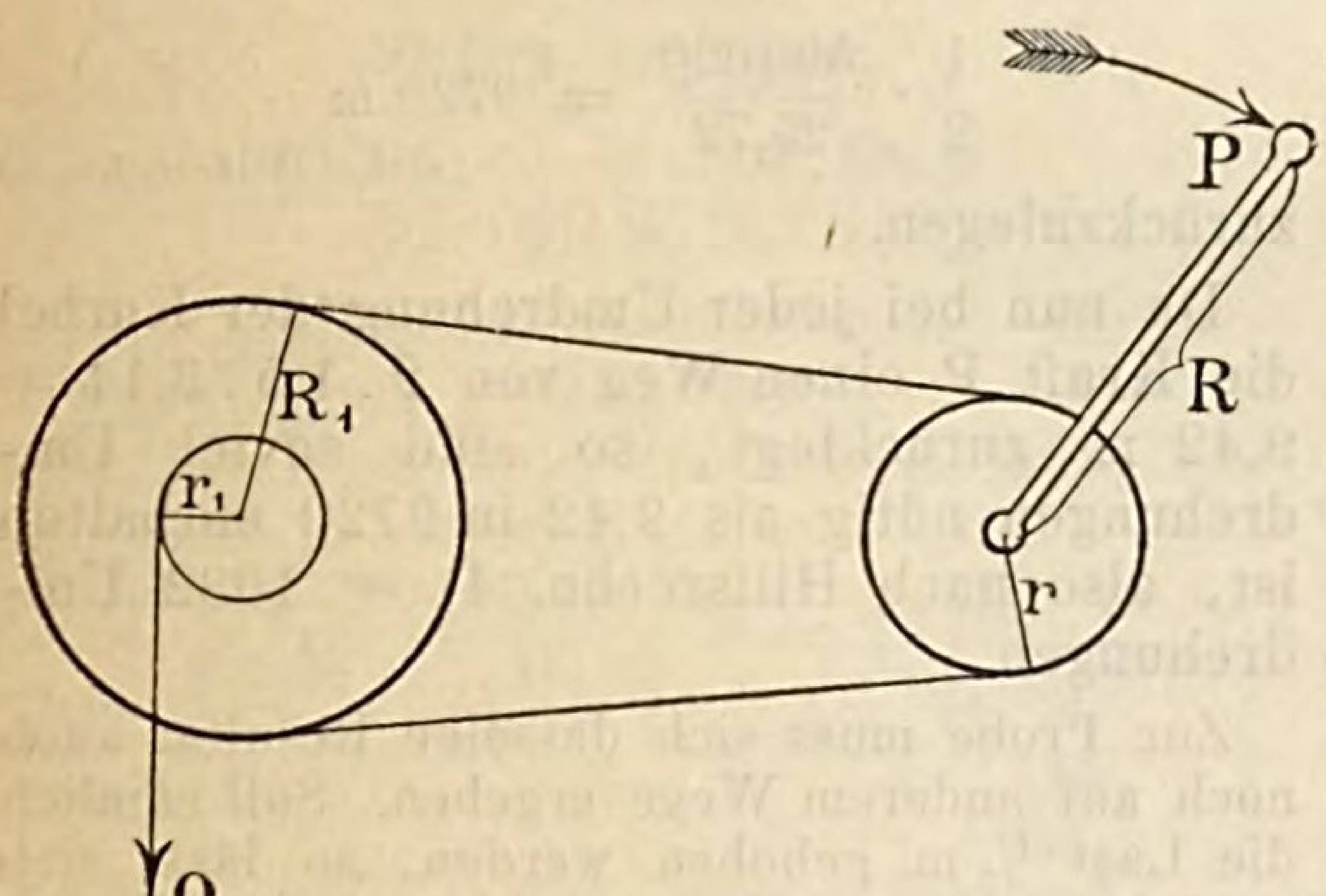
oder:

$$x = \frac{600}{800}$$

$$x = 0{,}75 \text{ m}$$

Aufgabe 291. Es sei bei einem Riemen ohne Ende (siehe Fig. 336) die aufzuwindende Last Q = 1000 kg, der Halbmesser der Lastwelle r_1 = 6 cm, der Halbmesser des dazu gehörigen Rades R_1 = 30 cm, die Kurbel, an welcher die Kraft P wirkt, = 60 cm und die an derselben Achse sitzende Welle im Halbmesser = 12 cm. a). Wie gross muss die an der Kurbel wirkende Kraft P sein, um der Last das Gleichgewicht zu halten; b). wie gross müsste die Kraft P_1 sein, wenn die Kurbel direkt an der Achse der Lastwelle wirkte?

Figur 336.



Auflösung. Nach der in Antwort auf Frage 215 gegebenen Gleichung ist:

$$P = Q \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1}$$

oder wenn wir die entsprechenden Zahlenwerte einsetzen:

$$P = 1000 \cdot \frac{12}{60} \cdot \frac{6}{30}$$

oder:

$$P = 1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

oder:

$$P = \frac{1000}{25}$$

oder:

$$P = 40 \text{ kg}$$

b). Würde die Kurbel direkt an der Lastwelle wirken, dann wäre:

$$P . 60 = 1000 . 6$$

oder:

$$P = \frac{1000 . 6}{60}$$

oder:

$$P = 100 \text{ kg}$$

Aufgabe 292. a). Welche Kraft P muss bei einem Räderwerk, so konstruiert wie es Fig. 337 zeigt, an der Kurbel R_1 wirken, wenn dieselbe 150 cm lang ist, die Halbmesser der drei Räder R_2 = 120, R_3 = 90, R_4 = 90 und die Halbmesser der vier Wellen r_1, r_2, r_3 je 10 und r_4 = $7^1/_2$ cm betragen, um einer Last von 500 000 kg das Gleichgewicht zu halten? b). Welche Kraft ist aber zum Heben der Last nötig, wenn die Gesamtreibungswiderstände zu $^1/_4$ der Last angenommen werden? c). Wie oft muss die Kurbel umgedreht werden, wenn die Last $^1/_2$ m gehoben werden soll?

Auflösung. a). Nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 225 ist:

$$P = \frac{r_1 . r_2 . r_3 . r_4 . Q}{R_1 . R_2 . R_3 . R_4}$$

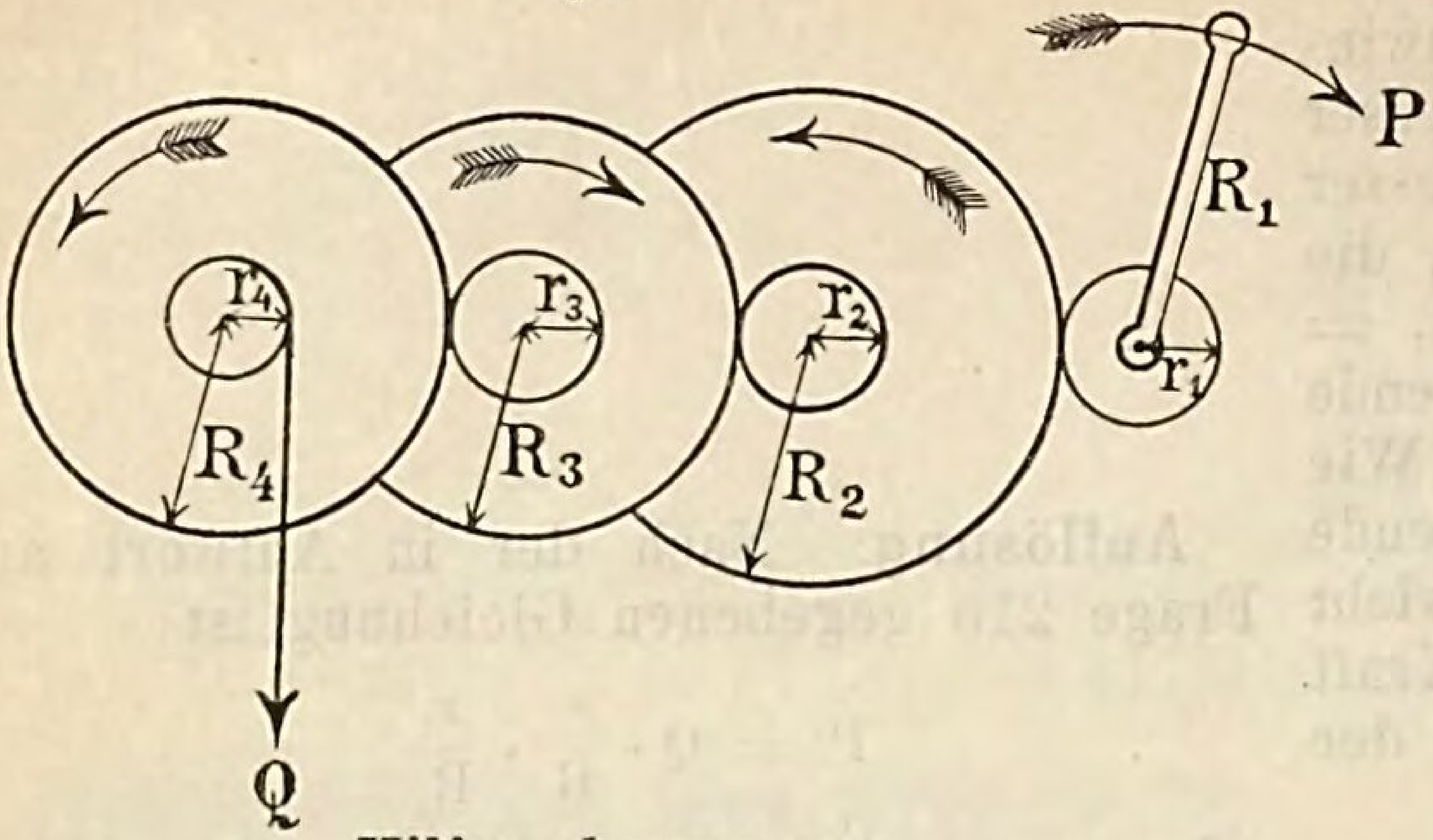
oder wenn wir die entsprechenden Zahlenwerte einsetzen, ist:

$$P = \frac{10 . 10 . 10 . 15 . 500000}{150 . 120 . 90 . 2 . 90}$$

oder:

$$P = 25{,}75 \text{ kg}$$ (siehe Hilfsrechn. 1).

Figur 337.



Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{500000 \,.\, 1000 \,.\, 15}{150 \,.\, 120 \,.\, 90 \,.\, 180} = \frac{6250}{243}$

243 | 6250 = 25,72
486
1390
1215
1750
1701
490
486

2). $\frac{5 \,.\, 25{,}72}{4} = 5 \,.\, 6{,}43 = 32{,}15$

3). $\frac{1}{2} \cdot \frac{500\,000}{25{,}72} = 25000000 : 2572 = 9720$
23148
18520
18004
5160
5144
16

4). . . $9720 : 9{,}42 = 972000 : 942 = 1032$
942
3000
2826
1760
1884

5). . . $3{,}14 \,.\, 2 \,.\, 0{,}075 = 3{,}14 \,.\, 0{,}15 = 0{,}4710$

6). $972 \,.\, 1\frac{29}{471} = \frac{972 \,.\, 500}{471}$

$\frac{972 \,.\, 500}{} = 486000 \,|\, 471 = 1032$
471
1500
1413
870
941

b). Wenn die Gesamtreibungswiderstände aber zu $^1/_4$ der Last angenommen werden, so muss die Kraft $1^1/_4$-mal so gross sein, also:

$$P_1 = \frac{5 \,.\, 25{,}72}{4}$$

oder:

$$P_1 = 32{,}15 \text{ kg}$$ (s. Hilfsr. 2)

c). Da sich ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse die Kraft zur Last verhält wie 25,72 : 500 000, so wird der Kraftweg soviel mal so gross sein müssen wie der Lastweg, als die Zahl 25,72 in 500 000 enthalten ist. Soll also die Last $^1/_2$ m gehoben werden, dann hat die Kraft P einen Weg von

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{500\,000}{25{,}72} = 9720 \text{ m}$$

(siehe Hilfsrechn. 3)

zurückzulegen.

Da nun bei jeder Umdrehung der Kurbel die Kraft P einen Weg von 2 . 1,5 . 3,14 = 9,42 m zurücklegt, so sind soviel Umdrehungen nötig als 9,42 in 9720 enthalten ist, also nach Hilfsrechn. 4). = 1032 Umdrehungen.

Zur Probe muss sich dasselbe Resultat auch noch auf anderem Wege ergeben. Soll nämlich die Last $^1/_2$ m gehoben werden, so lässt sich zunächst aus dem Halbmesser der Lastwelle berechnen, wie oft sich letztere umdrehen muss. Da der Halbmesser $7^1/_2$ cm = 0,075 m beträgt, so wird die Last bei einer Umdrehung ihrer Welle um 3,14 . 2 . 0,075 = 0,471 m gehoben. Die Last soll aber 0,500 m gehoben werden, folglich muss die Lastwelle $\frac{500}{471} = 1\frac{29}{471}$ Umdrehungen machen. Dreht sich aber die Lastwelle mit dem Rad R_4 einmal um, so muss das Rad R_3 schon $\frac{90}{10} = 9$, das Rad R_2 aber $9 \cdot \frac{90}{10} = 81$ und die Kurbel endlich $81 \cdot \frac{120}{10} = 972$ Umdrehungen zurücklegen. Da sich nun die Lastwelle $1\frac{29}{471}$ mal umdrehen muss, so muss die Kurbel $972 \,.\, 1\frac{29}{471}$ mal oder nach Hilfsrechnung 6). = 1032 umgedreht werden, was dem vorigen Resultat entspricht.

Aufgabe 293. Ein System von Rädern (siehe Fig. 337) ist so beschaffen, dass die Räder R_2, R_3 und R_4 beziehungsweise 120, 80, 96 Zähne und die Getriebe r_1, r_2 und r_3 beziehungsweise 40, 36 und 40 Zähne haben. a). Welche Kraft P muss an dem 72 cm langen Hebelarm R_1 wirken, um eine an der Welle r_4 hängende Last von 500 Zentner zu heben, wenn der Radius dieser Welle 18 cm misst und die Reibungswiderstände zu $^1/_5$ der Last angenommen werden? b). Welche Last kann an der Welle angebracht werden, wenn die Reibungswiderstände zu $^1/_4$ der Last angenommen werden und an dem 72 cm langen Hebelarm R_1 eine Kraft von 40 kg wirkt?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{40 . 36 . 40 . 18 . 500 . 50 . 6}{72 . 120 . 80 . 96 . 5} =$

$$\frac{3 . 125 . 5}{4} = 15 . 125 : 4$$
$$= 1875 : 4 = 468^3/_4$$

2). $\frac{40 . 72 . 120 . 80 . 96 . 4}{40 . 36 . 40 . 18 . 5} = 16 . 32 . 4$
$$= 64 . 32$$
$$128$$
$$252$$
$$2648$$

Auflösung. a). Analog der Gleichung 2). in Antwort auf Frage 225 ist:

$$P = \frac{z_1 . z_2 . z_3 . r_4 . Q}{R_1 . Z_2 . Z_3 . Z_4}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt und in Rücksicht auf die Reibung den Wert für die Kraft mit $^6/_5$ multipliziert, gibt:

$$P = \frac{40 . 36 . 40 . 18 . 500 . 50 . 6}{72 . 120 . 80 . 96 . 5}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P = 468\frac{3}{4} \text{ kg}$$

b). Nach Gleichung 3). in Antwort auf Frage 225 ist:

$$Q = \frac{P . R_1 . Z_2 . Z_3 . Z_4}{z_1 . z_2 . z_3 . r_4}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt, und den für Q gefundenen Wert infolge der Reibung mit $^4/_5$ multipliziert, gibt:

$$Q = \frac{40 . 72 . 120 . 80 . 96 . 4}{40 . 36 . 40 . 18 . 5}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$Q = 2648 \text{ kg}$$

Aufgabe 294. Mittels einer Seilwinde sollen vier Männer, deren jeder mit 15 kg Kraft an einer 1 m langen Kurbel drückt, eine Last von 1 t = 1000 kg heben. Die Windetrommel hat 30 cm Durchmesser. Wie kann man die Zahnräder wählen, welche die Kraft von der Kurbel auf die Seiltrommel übertragen, wenn man

a). nur eine,

b). zwei Uebersetzungen

anwenden will? (Eine Seilwinde mit zweifacher Räderübersetzung ist in Fig. 338 schematisch dargestellt.

Auflösung. a). Das Moment der Kraft ist:

$$4 . 15 . 1 = 60$$

das Moment der Last:

$$1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}30 = 150$$

aus $\frac{Q}{P} = \frac{150}{60}$ oder $= \frac{15}{6}$ folgt, dass bei einer Uebersetzung ein mit der Lastwelle fest verbundenes Rad benutzt werden muss, welches $^{15}/_6$ oder $2^1/_2$mal soviel Zähne hat, als das an der Kraftwelle sitzende Getriebe. Hat also das Getriebe oder der Trieb beispielsweise 12 Zähne, so muss derselbe in ein Rad von 30 Zähnen eingreifen.

b). Bei zwei Uebersetzungen dagegen verwandelt man Zähler und Nenner des Bruches $^{15}/_6$ in je 2 Faktoren, welche an Grösse möglichst wenig voneinander verschieden sind, wie z. B. $\frac{3^3/_4 . 4}{2 . 3}$

Wendet man also ein Getriebe von $8 = 2 . 4$ Zähnen an, so muss das zweite Getriebe $3 . 4 = 12$ Zähne, das erste Rad $3^3/_4 . 4 = 15$ und das zweite Rad $4 . 4 = 16$ Zähne erhalten.

Aufgabe 295. Eine Kraft P = 20 kg soll mit einer Last Q = 7200 kg durch ein System von 4 Wellrädern ins Gleichgewicht gebracht werden; welche Grösse der Räder und Wellen wird dieser Bedingung genügen?

Auflösung. Aus

$$\frac{Q}{P} = \frac{7200}{20} = \frac{8 . 9 . 10 . 10}{1 . 2 . 2 . 5}$$

oder auch:

$$\frac{360}{1} = \frac{3 . 4 . 5 . 6}{1 . 1 . 1 . 1} \text{ u. s. w.}$$

folgt, dass, wenn die Räder die Halbmesser 8, 9, 10, 10 erhalten, die Wellen die Halbmesser 1, 2, 2, 5 erhalten müssen. Hat also der kleinste Trieb 6 Zähne, so haben die folgenden drei resp. 12, 12 und 30 Zähne, während die 4 Räder resp. 48, 54, 60 und 60 Zähne erhalten müssen, oder aber, wenn 3, 4, 5, 6 die Halbmesser der Räder sind, dann ist der Halbmesser jeder Welle = 1; hat also jeder Trieb 6 Zähne, so haben die 4 Räder beziehungsweise 18, 24, 30 und 36 Zähne.

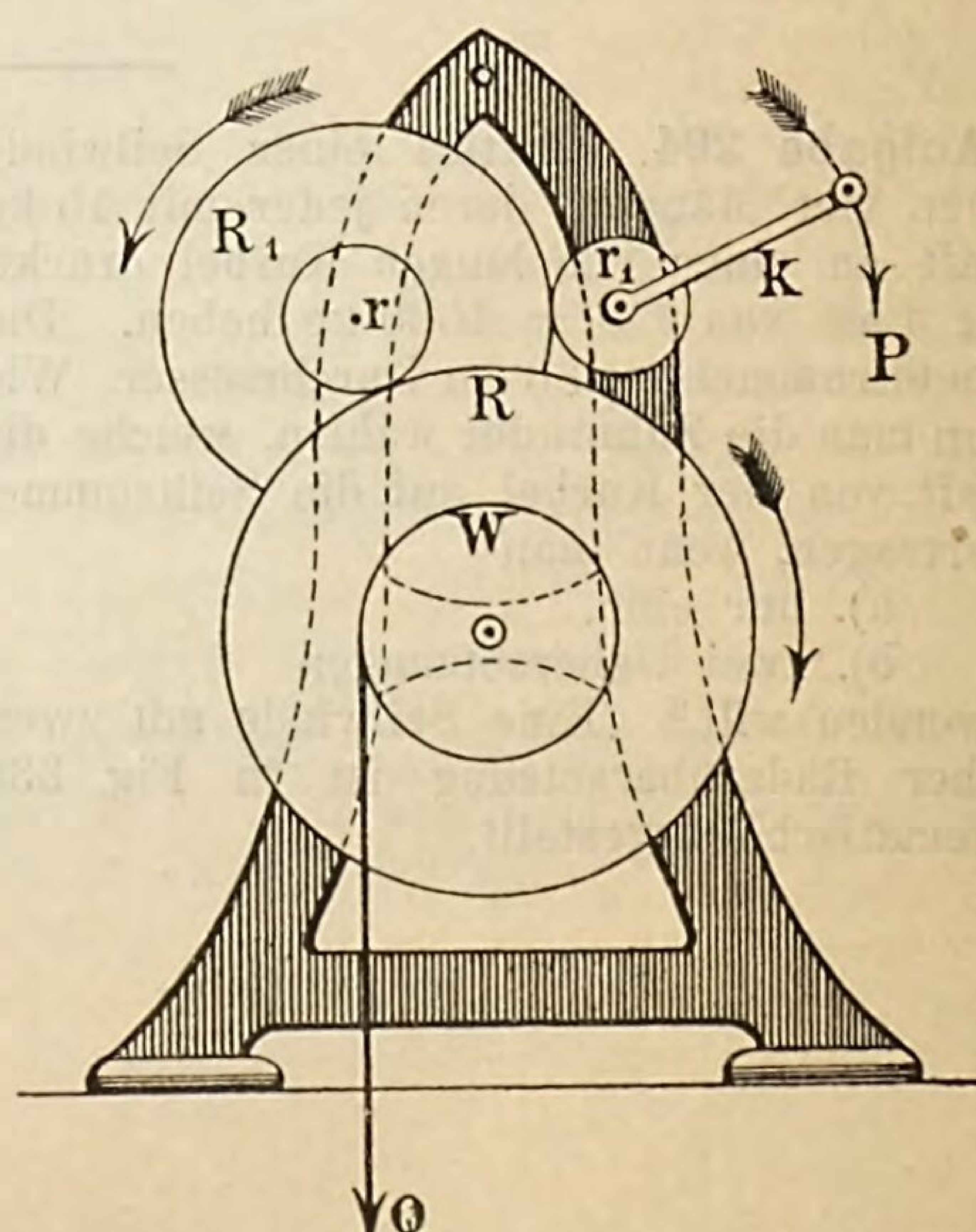
Aufgabe 296. Bei einer Seilwinde mit zweifacher Räderübersetzung (s. Fig. 338) wirkt die Kraft P an einer Kurbel von $37^1/_2$ cm Länge, an deren Achse zugleich ein Getriebe r_1 mit 11 Zähnen sitzt, welches in ein Rad R_1 von 74 Zähnen eingreift, an dessen Welle ein Getriebe von 12 Zähnen in ein Rad von 60 Zähnen eingreift, an dessen Welle W von $22^1/_2$ cm Radius eine Last aufgewunden werden soll.

a). In welchem Verhältnis stehen Kraft und Last zueinander, abgesehen von allen Hindernissen?

b). Wie gross müssen die Radien von r, R_1 und R sein, wenn der Halbmesser des an der Kurbel sitzenden Triebes 8,8 cm ist?

c). Wie oft muss die Kurbel gedreht werden, wenn die Last 3 m gehoben werden soll?

Figur 338.



Auflösung. a). Nach Antwort auf Frage 225 besteht folgende Proportion:

$$P : Q = r_1 . r_2 . r_3 : R_1 . R_2 . R_3$$

Hilfsrechnungen.

1). . . . $\frac{11 \cdot 12 \cdot 45}{2} = 11 \cdot 6 \cdot 45 = 66 \cdot 45$

330
264
2970

$\frac{75 \cdot 74 \cdot 60}{2} = 75 \cdot 74 \cdot 30 = 75 \cdot 2220$

150
150
150
166500

$2970 : 166500 = 297 : 16650 = 33 : 1850$

$1850 : 33 = 56\frac{2}{33}$
165
200
198
2

2). . . . $\frac{3 \cdot 1850}{33} = 1850 : 11 = 168{,}18$
75
90
20
90

3). . . . $\frac{2 \cdot 75 \cdot 3{,}14}{2} = 3{,}14 \cdot 0{,}75$
1570
2198
2,3550

4). . . $168{,}18 : 2{,}355 = 168180 : 2355 = 71{,}4$
16485
3330
2355
9650
9520

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P : Q = 11 \cdot 12 \cdot 22\frac{1}{2} : 37\frac{1}{2} \cdot 74 \cdot 60$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P : Q = 33 : 1850$$

oder:

$$P : Q = 1 : 56\frac{2}{33}$$

b). Da nach Antwort auf Frage 222 die Anzahl der Zähne bei ineinandergreifenden Rädern in demselben Verhältnis steht wie ihre Halbmesser, so wird der Trieb von 12 Zähnen:

$$\frac{12}{11} \cdot 8{,}8 = 9{,}6 \text{ cm}$$

Radius haben, während das Rad von 74 Zähnen:

$$\frac{74 \cdot 8{,}8}{11} = 59{,}2 \text{ cm}$$

und das Rad von 60 Zähnen:

$$\frac{60 \cdot 8{,}8}{11} = 48 \text{ cm}$$

Radius hat.

c). Soll die Last 3 m hoch gehoben werden, so muss die Kraft einen Weg von:

$$3 \cdot 56\frac{2}{33} = 168{,}18 \text{ m}$$

zurücklegen (s. Hilfsrechn. 2).

Nun beträgt der Kraftweg bei einer Kurbelumdrehung:

$$2 \cdot 37\frac{1}{2} \cdot 3{,}14 = 2{,}355 \text{ m}$$

(s. Hilfsrechn. 3)

folglich sind bei einem Wege von 168,18 m:

$$\frac{168{,}18}{2{,}355} = \text{ca. } 72$$

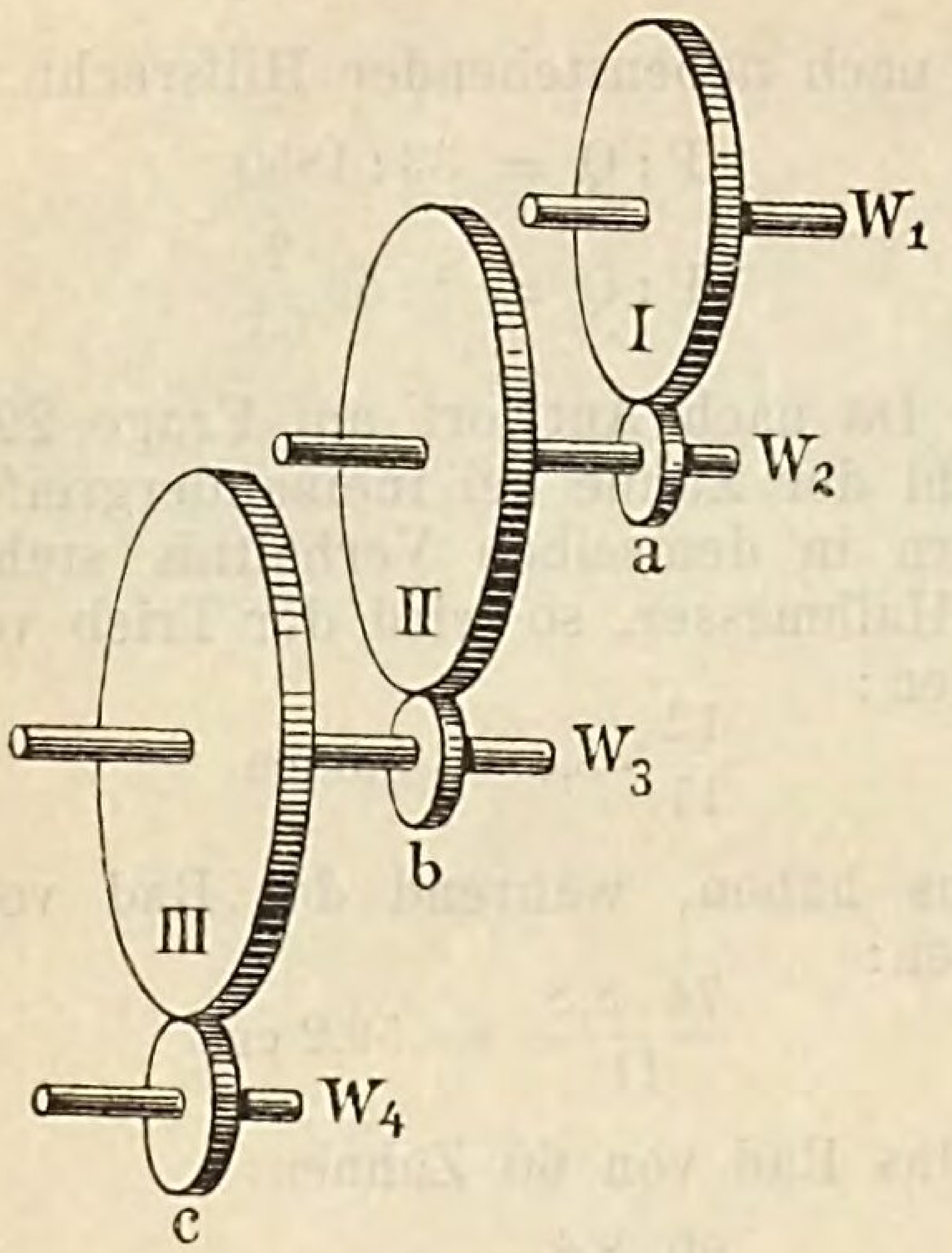
Umdrehungen nötig (siehe Hilfsrechn.).

Aufgabe 297. Es soll die Anzahl der Zähne (oder auch das Verhältnis der Radhalbmesser) ermittelt werden, wenn die Betriebswelle (z. B. die Welle des Wasserrads bei der Mühle) 12 und die letzte oder Arbeitswelle 720 Umdrehungen oder Touren per Minute macht.

Auflösung. Die Uebersetzungszahl zwischen der ersten und letzten Welle ist im gegebenen Fall $\frac{720}{12}$. Bezeichnet man nun mit n_1, n_2 etc. die Anzahl der Zähne der Getriebe, mit N_1, N_2 etc. die Anzahl der Zähne der Räder, so hat man, wenn nur eine zweifache Uebersetzung angewandt werden soll:

$$\frac{720}{12} = \frac{N_1 \cdot N_2}{n_1 \cdot n_2}$$

Figur 339.



man braucht also 720 und 12 nur in je zwei Faktoren zu zerlegen und hat dann z. B. wenn man für N_1 und N_2 die Zahlen 24 und 30 nimmt, für n_1 und n_2 die Zahlen 3 und 4 zu nehmen. Es müssten also die Getriebe mindestens 6 und 8, die beiden Räder aber 48 und 60 Zähne erhalten.

Will man aber, damit die einzelnen Räder nicht zu gross werden, eine dreifache Uebersetzung anwenden, so hat man den Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{720}{12}$ in je drei Faktoren zu zerlegen; diese können z. B. $\frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 3}$ sein, das Rad I (Fig. 339) kann dann 32, das Rad II 36 und das Rad III 40 Zähne haben, wenn der Trieb $a = 8$, $b = 8$ und $c = 12$ Zähne trägt, und es wird dann, wenn das Rad I eine Umdrehung macht,

Trieb a nebst Rad II = 4 Umdrehungen,
„ b „ „ III = $4 \cdot 4^1/_2 = 18$ Umdreh.
und „ $c = 4 \cdot 4^1/_2 \cdot 3^1/_3 = 60$ Umdrehungen,

also auch Trieb c 720 Umdrehungen zurücklegen, wenn sich Rad I 12mal umdreht.

Aufgabe 298. Bei dem in Fig. 339 dargestellten Räderwerk soll die Achse W_1 von der Achse W_2 20 cm Entfernung haben, wie gross sind demnach die Entfernungen der übrigen Achsen unter sich und wie gross sind die Radien sämtlicher Räder und Triebe, wenn die Räder, wie oben angegeben, beziehungsweise 32, 36 und 40 und die Triebe beziehungsweise 8, 8 und 12 Zähne haben?

Auflösung. Nennen wir den Abstand der beiden Achsen W_1 und $W_2 = a$, und ist die Uebersetzungszahl zwischen Rad I und Trieb $a = n$, dann ist nach Erkl. 249 der Radius des Rades I:

$$R = \frac{na}{n+1}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$R = \frac{4 \cdot 20}{4+1}$$

oder:

$$R = 16 \text{ cm}$$

und somit der Radius von dem Trieb $a = 20 - 16 = 4$ cm, da sich nun die Radien der Räder wie ihre Zähnezahlen verhalten, und Rad I : II : III = 8 : 9 : 10, so hat Rad II einen Radius von:

$$\frac{9 \cdot 16}{8} = 18 \text{ cm}$$

Rad III einen Radius von:

$$\frac{10 \cdot 16}{8} = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Trieb } b = a = 4 \text{ cm Radius}$$

$$\text{und Trieb } c = \frac{12 \cdot 4}{8} = 6 \text{ cm Radius}$$

und somit beträgt die Entfernung zwischen den Achsen W_2 und W_3:

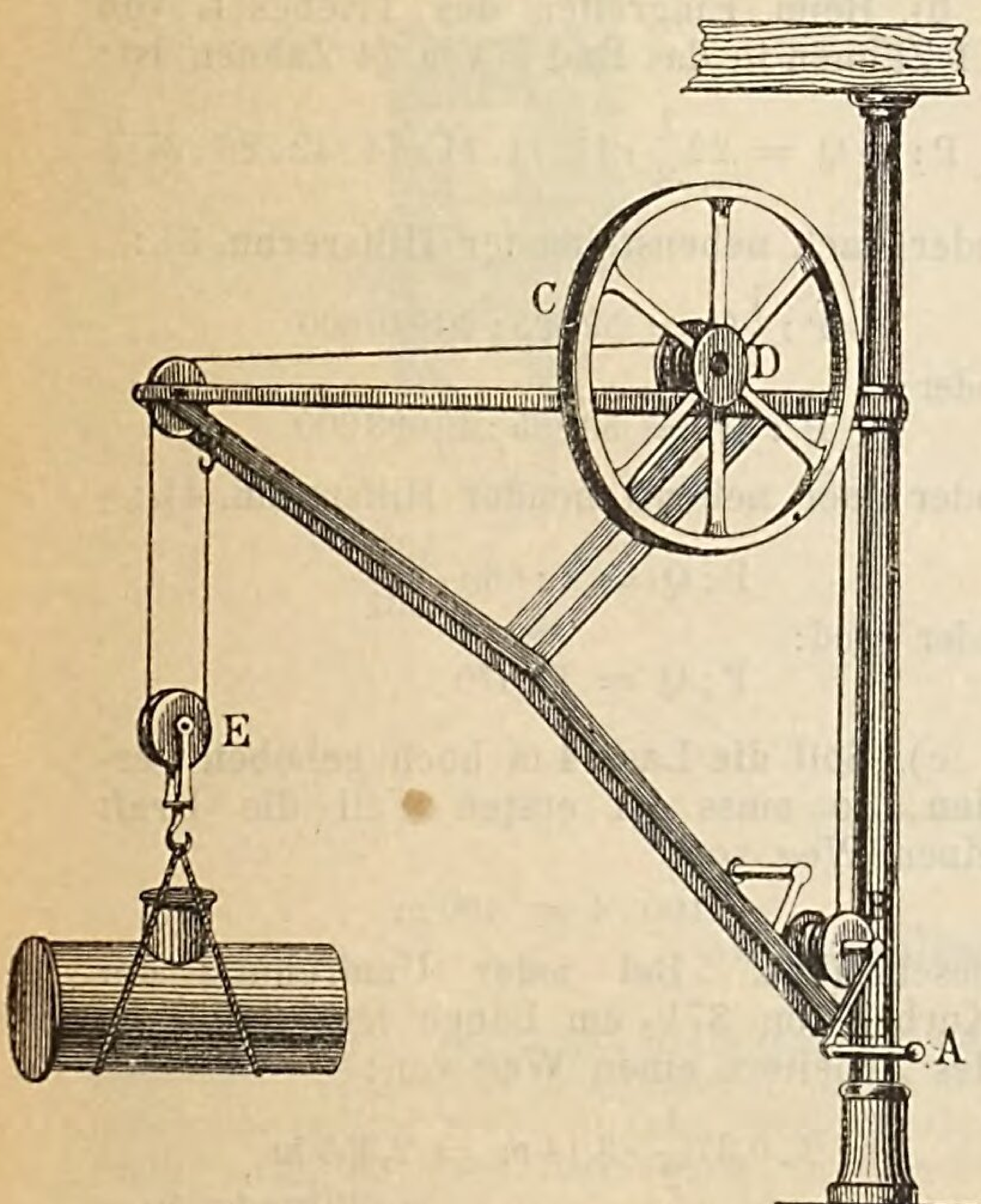
$$18 + 4 = 22 \text{ cm}$$

und zwischen den Achsen W_3 und W_4:

$$20 + 6 = 26 \text{ cm}$$

Aufgabe 299. Bei einem Seilkrahn, wie er in Fig. 340 angedeutet ist, sei die Uebersetzung (siehe Erkl. 249) an der Kurbel A und der Seiltrommel B = $2^1/_2$, am Wellrad C und der Seiltrommel D = 10. Mit welcher Kraft müssen 2 Arbeiter an den beiden Kurbeln drehen, wenn eine an der losen Rolle E hängende Last von 25 Zentner gehoben werden soll und wenn die Bewegungshindernisse zu $^1/_4$ der Last angenommen werden?

Figur 340.



Auflösung. Die Uebersetzung an Kurbel und Seiltrommel ist $2^1/_2$fach, an Wellrad und Seiltrommel 10fach und an der losen Rolle 2fach, folglich zusammen:

$$2\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 50 \text{fach}$$

folglich ist die Kraft ohne Rücksicht auf die Widerstände:

$$P = \frac{1}{50} Q$$

werden dagegen die Widerstände = $^1/_4$ Q in Rechnung gebracht, so ist:

$$P = \frac{1}{50} \cdot \frac{5}{4} Q$$

oder:

$$P = \frac{1}{40} Q$$

oder:

$$P = \frac{25 . 50}{40}$$

oder:

$$P = 31\frac{1}{4} \text{ kg}$$

folglich hat jeder der beiden Arbeiter eine Kraft von $15^7/_8$ kg in Anwendung zu bringen.

Aufgabe 300. Bei einem Krahn (siehe Fig. 341 und 342) hängt die aufzuwindende Last an einer beweglichen Rolle mit parallelen Seilen; das Seil (resp. die Kette) geht über eine Welle A von dem Halbmesser $r_1 = 22^1/_2$ cm, an welcher ein Rad B mit 86 Zähnen sich befindet; das Rad greift in ein Getriebe C von 11 Zähnen, welches mit

einem Rad D von 42 Zähnen auf derselben Welle befestigt ist. Das Rad D greift wieder in ein ein Getriebe K mit 11 Zähnen, an dessen Achse sich die Kurbeln G und H befinden, welche einem Halbmesser von $37^1/_2$ cm entsprechen. Zugleich ist aber auch ein Rad F mit 74 Zähnen vorhanden, welches mit dem Trieb E von 11 Zähnen auf derselben Achse sitzt und durch den Trieb L von ebenfalls 11 Zähnen in Bewegung gesetzt werden kann. Wie verhält sich, abgesehen von allen Hindernissen die Kraft zur Last

a). wenn K und C die treibenden, D und B die getriebenen Räder sind,

b). wenn L, E, C die treibenden, und F, D, B die getriebenen Räder sind?

c). Wieviel Umdrehungen der Kurbel sind in jedem der beiden vorigen Fälle nötig, um die Last 4 m hoch zu heben?

Hilfsrechnungen.

1). . . . 45 . 11 . 11 = 45 . 121
605
484
5445

86 . 42 . 75
210
294
86 . 3150
18900
25200
270900

2). . 541800 : 5445 = 99
49005
51750
49005
2745

3). . . . 45 . 11 . 11 . 11 = 5445 . 11
= 59895

74 . 42 . 86 . 75 = 270900 . 74
10836
18963
20046600

4). . . 40093200 : 59895 = $669\frac{521}{1331}$
359370
415620
359370
562500
539055
23445

$\frac{23445}{59885}\Big|_9 \; \frac{2605}{6655}\Big|_5 \; \frac{521}{1331}$

5). . . 2 . $0{,}37^1/_2$. 3,14 = 3,14 . 0,75
1570
2198
2,3550

Auflösung. a). Beim Eingreifen des Triebes K mit 11 Zähnen in das Rad D mit 42 Zähnen ist:

$$P : \frac{1}{2} Q = 22\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 11 : 86 . 42 . 37\frac{1}{2}$$

oder:

$$P : \frac{1}{2} Q = \frac{45 . 11 . 11}{2} : \frac{86 . 42 . 75}{2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P : \frac{1}{2} Q = 5445 : 270900$$

oder:

$$P : Q = 5445 : 541800$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$P : Q = 1 : 99\frac{61}{121}$$

oder rund:

$$P : Q = 1 : 100$$

b). Beim Eingreifen des Triebes L von 11 Zähnen in das Rad F von 74 Zähnen ist:

$$P : \frac{1}{2} Q = 22\frac{1}{2} \cdot 11 . 11 . 11 : 74 . 42 . 86 . 37\frac{1}{2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$P : \frac{1}{2} Q = 59895 : 20046600$$

oder:

$$P : Q = 59895 : 40093200$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$P : Q = 1 : 669\frac{521}{1331}$$

oder rund:

$$P : Q = 1 : 670$$

c). Soll die Last 4 m hoch gehoben werden, so muss im ersten Fall die Kraft einen Weg von:

$$100 . 4 = 400 \text{ m}$$

beschreiben. Bei jeder Umdrehung der Kurbel von $37^1/_2$ cm Länge legt die Hand des Arbeiters einen Weg von:

$$2 . 0{,}37\frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \text{ m} = 2{,}355 \text{ m}$$

(s. Hilfsrechn. 5)

folglich sind:

$$\frac{400}{2{,}355} = \text{ca. } 170$$ (s. Hilfsrechn. 6)

Umdrehungen nötig.

Im zweiten Fall beträgt der Kraftweg:

$$670 . 4 = 2680 \text{ m}$$

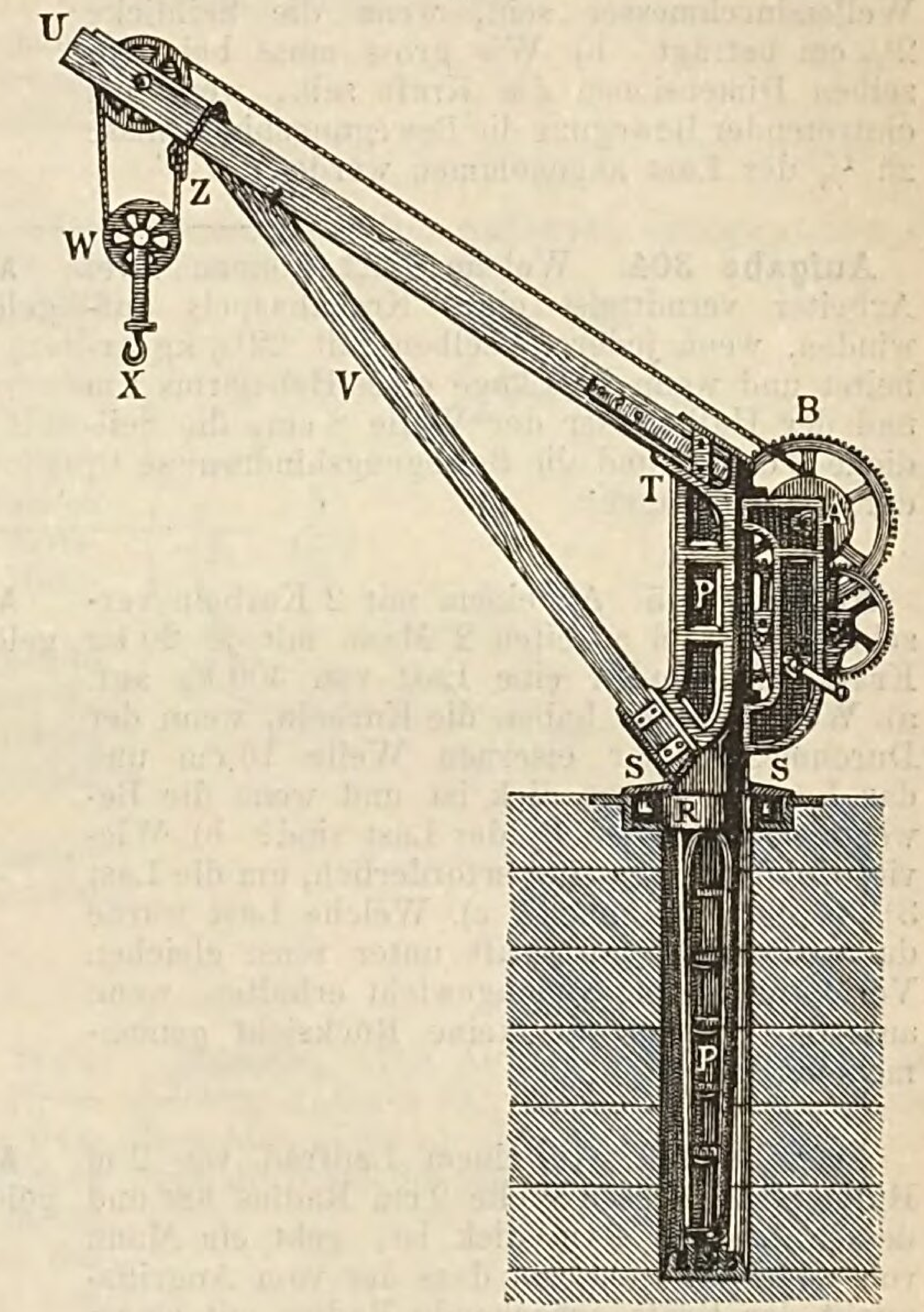
folglich die Zahl der Umdrehungen:

$$\frac{2680}{2{,}355} = 1138$$ (s. Hilfsrechn. 7)

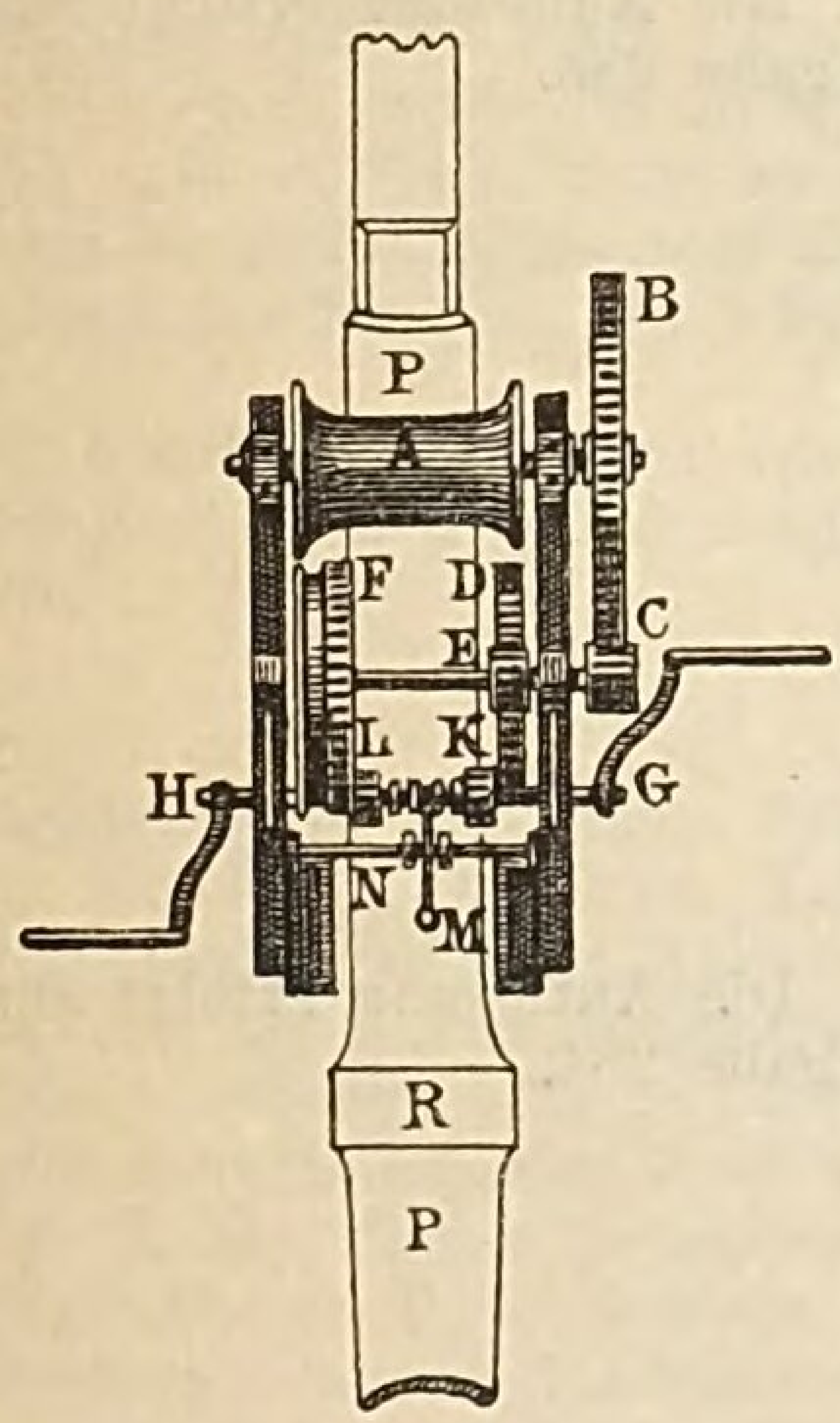
6). . . 400000 : 2355 = 170
2355
16450
16485

7) .. . 2680000 : 2355 = 1138
2355
3250
2355
8950
7065
18850
18840

Figur 341.



Figur 342.



δ). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 301. Bei einem Wellradmodell beträgt der Durchmesser des Rades $37\frac{1}{2}$ cm, der Durchmesser der Welle $5\frac{1}{2}$ cm. Welches Gewicht muss an dem Radumfang angebracht werden, wenn an der Welle 1 kg hängt?

Andeutung. Die Auflösung ergibt sich analog der gelösten Aufgabe 279.

Aufgabe 302. Der Halbmesser eines Wellrades beträgt 1 m, der Radius der Welle 10 cm. Last- und Kraftseil sind gleich dick und haben $2\frac{1}{2}$ cm Durchmesser. Welche Kraft ist nötig, um einer Last von 280 kg das Gleichgewicht zu halten, a). wenn die Dicke der Seile unberücksichtigt bleibt, b). wenn die Seildicke mit in Rechnung gebracht wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 280.

Aufgabe 303 Mittels eines Spillenrades von 80 cm Halbmesser soll einer Last von 200 kg durch eine Kraft von 28 kg das Gleichgewicht gehalten werden. a). Wie gross muss der Wellendurchmesser sein, wenn die Seildicke $2\frac{1}{2}$ cm beträgt. b). Wie gross muss bei denselben Dimensionen die Kraft sein, wenn bei eintretender Bewegung die Bewegungshindernisse zu $\frac{1}{5}$ der Last angenommen werden?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 281.

Aufgabe 304. Welche Last können zwei Arbeiter vermittelst eines Kreuzhaspels aufwinden, wenn jeder derselben mit $22\frac{1}{2}$ kg arbeitet und wenn die Länge eines Hebelarms 1 m und der Halbmesser der Welle 8 cm, die Seildicke 3 cm ist und die Bewegungshindernisse $\frac{1}{4}$ der Last betragen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 282.

Aufgabe 305. An einem mit 2 Kurbeln versehenen Haspel arbeiten 2 Mann mit je 20 kg Kraft und winden eine Last von 300 kg auf. a). Welche Länge haben die Kurbeln, wenn der Durchmesser der eisernen Welle 10 cm und das Lastseil 4,2 cm dick ist und wenn die Bewegungshindernisse $\frac{1}{4}$ der Last sind? b) Wieviel Umdrehungen sind erforderlich, um die Last $3\frac{1}{2}$ m hoch zu heben? c). Welche Last würde durch die nämliche Kraft unter sonst gleichen Verhältnissen im Gleichgewicht erhalten, wenn auf die Widerstände keine Rücksicht genommen wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 283.

Aufgabe 306. In einem Laufrad von 2 m Halbmesser, dessen Welle 9 cm Radius hat und dessen Lastseil 4 cm dick ist, geht ein Mann von 80 kg Gewicht, so, dass der vom Angriffspunkt der Kraft ausgehende Radius mit einem Lote einen Winkel von 40° bildet.

a). Welche Last kann der Arbeiter heben, wenn auf die Bewegungshindernisse keine Rücksicht genommen wird;

b). wenn die Widerstände zu $\frac{1}{3}Q$ in Rechnung gebracht werden?

c) Welche Last würde der Mann aber in beiden Fällen heben, wenn er statt in einem Laufrad an einem Sprossenrad von denselben Dimensionen arbeitete?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 284.

Aufgabe 307. An dem 80 cm langen Hebelarm einer Differentialwelle wirkt eine Kraft von 40 kg. a). Welche Last wird mittels derselben gehoben werden können, wenn sich die Wellenradien zueinander verhalten wie 11 : 12 und wenn die Widerstände $= \frac{1}{4}Q$ betragen? b). Wie hoch wird die Last gehoben werden, wenn die Welle 50 Umdrehungen macht?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 285. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass hier bei b). der Weg der Last gesucht wird.

Aufgabe 308. Mittels einer Erdwinde, deren Welle 30 cm Durchmesser hat, soll eine Last von 300 kg durch 35 kg Kraft fortgezogen werden. a). Wie lang ist die Kurbel ohne Rücksicht auf die Widerstände; b). mit Rücksicht auf die Widerstände, welche ein $\frac{1}{3}Q$ sind?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 287, nur dass unter c). der Lastweg und nicht der Kraftweg zu berechnen ist.

c). Wie weit wird die Last bei 10 Umdrehungen gefördert?

Aufgabe 309. Bei einem Pferdegöpel beträgt der Durchmesser der Seiltrommel 125 cm, ein Pferd zieht an einem $3^1/_2$ m langen Zugbaum mit 44 kg Kraft und die Widerstände betragen $= {}^1/_4 Q$. Welche Last wird dadurch gehoben?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 290.

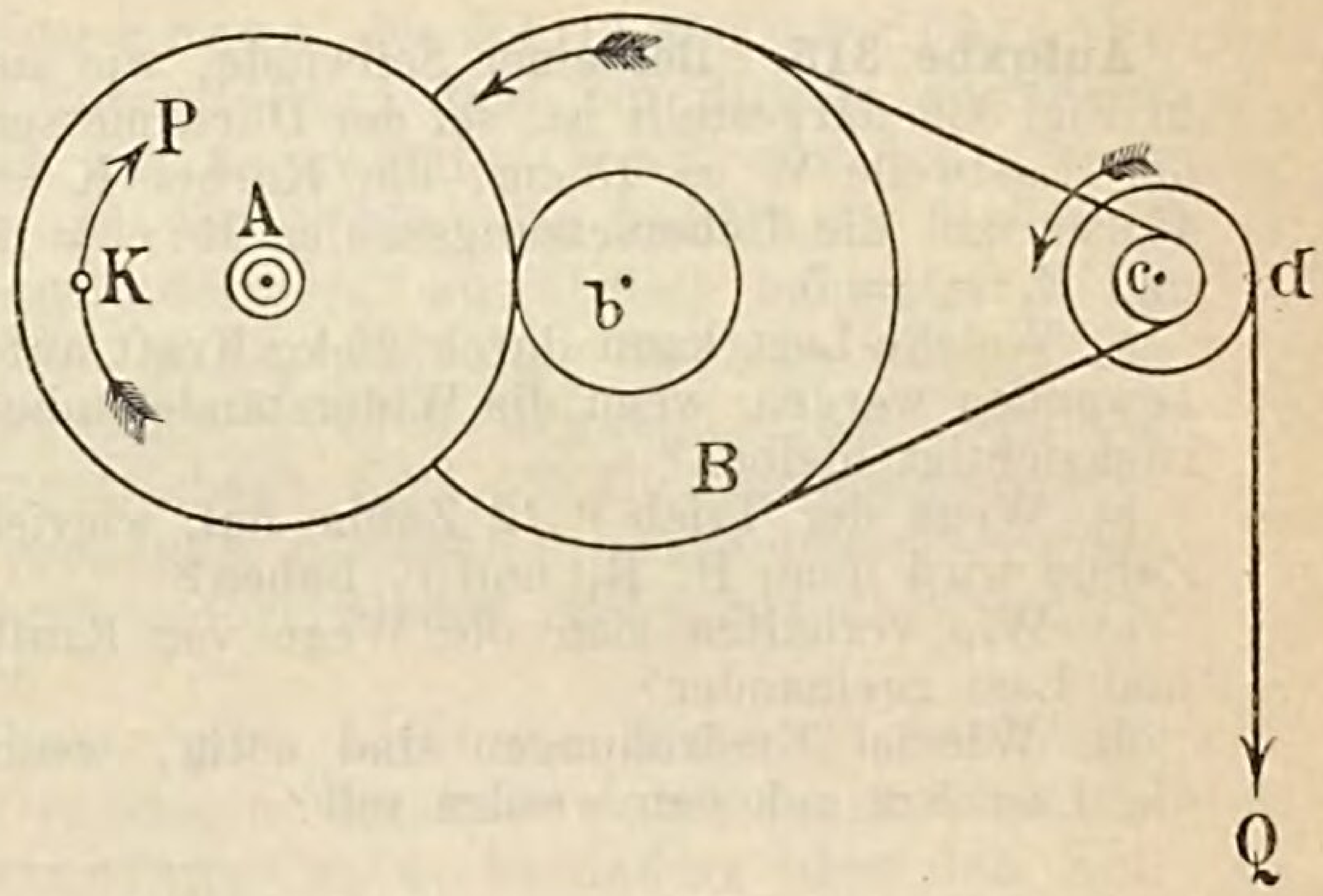
Aufgabe 310. Bei einer Zentrifugal- oder Schwungmaschine hat das mit der Kurbel an einer Achse sitzende Rad A (siehe Fig. 343) einen Halbmesser von 20 cm; dieses Rad greift in ein Getriebe *b* von $7^1/_2$ cm Halbmesser ein, an dessen Achse ein Rad B von $22^1/_2$ cm Halbmesser sitzt, und um dieses Rad ist eine Schnur geschlungen, durch welche ein kleines Rädchen *c* von $2^1/_2$ cm Halbmesser, das auf der Rotationsachse zugleich mit Rad *d* von 5 cm Halbmesser sitzt, gedreht wird.

a). Wie gross wird das in Q anzuhängende Gewicht sein dürfen, wenn an der Kurbel K, deren geometrische Achse vom Rande des Rades A um 3 cm entfernt ist, mit 8 kg Kraft gedreht wird?

b). Wieviel Umdrehungen wird das Wellrad *cd* während einer Umdrehung der Kurbel machen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 282.

Figur 343.



Aufgabe 311. Bei einem System von Wellrädern greift ein Rad vom Halbmesser $R_1 =$ 40 cm in ein Getriebe vom Halbmesser $r_1 = 6$ cm und das auf der Achse dieses Getriebes sitzende Rad vom Halbmesser $R_2 = 60$ cm greift in ein Getriebe vom Halbmesser $r_2 = 8$ cm, sowie das auf der Achse dieses Getriebes sitzende Rad vom Halbmesser $R_3 = 120$ cm Halbmesser in ein Getriebe von dem Halbmesser $r_3 = 18$ cm, an welchem sich zugleich die Lastwelle von demselben Halbmesser befindet.

a). Welche Last Q am Umfang dieser Welle wird durch eine am Umfang des ersten Rades wirkende Kraft von 60 kg im Gleichgewicht erhalten?

b). Welche Last wird durch dieselbe Kraft gehoben, wenn die Widerstände zu $^1/_3$ der Last angenommen werden?

c). Wie oft muss das erste Rad umgedreht werden wenn die Last 1 m hoch gehoben werden soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 292, nur mit dem Unterschied, dass hier unter a). und b). nicht die Kraft, sondern die Last die unbekannte Grösse ist.

Aufgabe 312. Ein System von Rädern (siehe Fig. 337) ist so beschaffen, dass die Räder R_2, R_3 und R_4 beziehungsweise 60, 54 und 45 Zähne, und die Getriebe r_1, r_2 und r_3 beziehungsweise 12, 15 und 9 Zähne haben.

a). Welche Last kann durch einen Mann gehoben werden, der an einer Kurbel von der Länge $R_1 = 50$ cm mit 15 kg Kraft dreht, wenn der Radius r_4 der Lastwelle 8 cm misst und die Reibungswiderstände $= {}^1/_4 Q$ betragen?

b). Wieviel Umdrehungen der Kurbel sind nötig, wenn die Last $1^1/_2$ m gehoben werden soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 293 und 294 c).

Aufgabe 313. Bei einem Haspel mit Vorgelege werden durch 40 kg Kraft, die an einer 40 cm langen Kurbel wirken, 600 kg Last, die an einer Welle von 12 cm Halbmesser hängen im Gleichgewicht erhalten. Welches Verhältnis werden die Zahnräder zueinander besitzen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 294.

Aufgabe 314. Wenn durch ein Räderwerk, wie es Fig. 337 zeigt, die Kraft P einer 300-fachen Last das Gleichgewicht halten soll, in welchem Verhältnis stehen dann Räder und Triebe zueinander?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 295.

Aufgabe 315. Bei einer Seilwinde, wie sie in Fig. 338 dargestellt ist, sei der Durchmesser der Lastwelle W = 15 cm, die Kurbel K = 45 cm und die Uebersetzungszahlen $R : r = 7$ und $R_1 : r_1 = 5$.

a). Welche Last kann durch 20 kg Kraft aufgewunden werden, wenn die Widerstände unberücksichtigt bleiben?

b). Wenn der Trieb r 12 Zähne hat, wieviel Zähne wird dann R, R_1 und r_1 haben?

c). Wie verhalten sich die Wege von Kraft und Last zueinander?

d). Wieviel Umdrehungen sind nötig, wenn die Last 5 m gehoben werden soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 296.

Aufgabe 316. Wie muss die in Fig. 343 angedeutete Schwungmaschine eingerichtet sein, wenn die Welle *c* sich 15 mal so schnell umdrehen soll wie das Rad A?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 297.

Aufgabe 317. Wenn an der in Fig. 343 angedeuteten Schwungmaschine das Rad A 70 Zähne und der Trieb *b* 12 Zähne hat, und die Achsen beider 20 cm voneinander entfernt sind, wie gross sind dann die Radien von A und *b*?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 298.

Aufgabe 318. Bei einem Seilkrahn (siehe Fig. 340) arbeiten an je einer Kurbel von 45 cm Länge zwei Mann, der eine mit 25, der andere mit 20 kg Kraft. Die an derselben Achse befindliche Seiltrommel hat 12 cm Halbmesser, das Rad C hat 75 cm und die mit diesem Rad verbundene Seiltrommel abermals 12 cm Radius. Welche Last können die Leute heben

a). ohne Rücksicht der Widerstände,

b). wenn die Widerstände = $\frac{1}{3}$ Q sind?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 299.

Aufgabe 319. Bei einem Krahn, wie er in Fig. 341 und 342 dargestellt ist, habe die Seiltrommel A einen Halbmesser von 20 cm, während die Kurbel, an welcher die Kraft wirkt, 40 cm lang ist. Welche Kraft ist nötig, um 200 Zentner Last zu heben,

a). wenn die beiden treibenden Räder K und C beziehungsweise 9 und 11, die beiden getriebenen Räder D und B beziehungsweise 54 und 66 Zähne haben,

b). wenn die treibenden Räder L = 9, E = 9 und C = 11 Zähne, die beiden getriebenen

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 300.

Räder F = 54, D = 54 und B = 66 Zähne enthalten und die Widerstände nicht in Rechnung gebracht werden?

c). Wieviel Umdrehungen der Kurbel sind in jedem der beiden vorerwähnten Fälle nötig, wenn die Last 3 m hoch gehoben werden soll?

f. Ueber die schiefe Ebene und die Elementarmaschinen, welche sich als schiefe Ebenen auffassen lassen.

Anmerkung 5. Um die Gesetze der schiefen Ebene, des Keils und der Schraube verstehen zu können, hat man sich zunächst vorzustellen, dass bei diesen einfachen Maschinen keine Reibung stattfinde, und dass die angewandte Kraft nur den Zweck habe, ein Hinabgleiten der Last zu verhindern. In Wirklichkeit ist freilich die Reibung, welche in dem Lehrbuch „Ueber die Bewegungshindernisse“ ausführlich behandelt wird, namentlich beim Keil und bei der Schraube sehr gross, und ohne dieselbe würden die genannten Elementarmaschinen gar nicht angewandt werden können. Ohne Reibung würde der durch einen Schlag in das Holz eingetriebene Keil plötzlich wieder zurückprallen und ohne Reibung würde sowohl die trennende, als auch die zusammenpressende Schraube ihre einmal zurückgelegten Windungen sofort wieder rückwärts durchlaufen, sobald die Kräfteäusserung aufhörte zu wirken.

Wie sich aus diesen Thatsachen unmittelbar ergibt, wirkt die Reibung sowohl der Lastäusserung als auch der bewegenden Kraft entgegen und kann daher im grossen und ganzen bei der Entwickelung der Gleichgewichtsgesetze, besonders über den Keil und die Schraube, als nicht vorhanden betrachtet werden.

α). Von der schiefen Ebene.

Frage 226. Was ist eine schiefe Ebene?

Antwort. Eine schiefe Ebene ist eine gegen den Horizont unter irgend einem Winkel geneigte Ebene, eine Ebene, welche nicht mit der des ruhenden Wasserspiegels zusammenfällt.

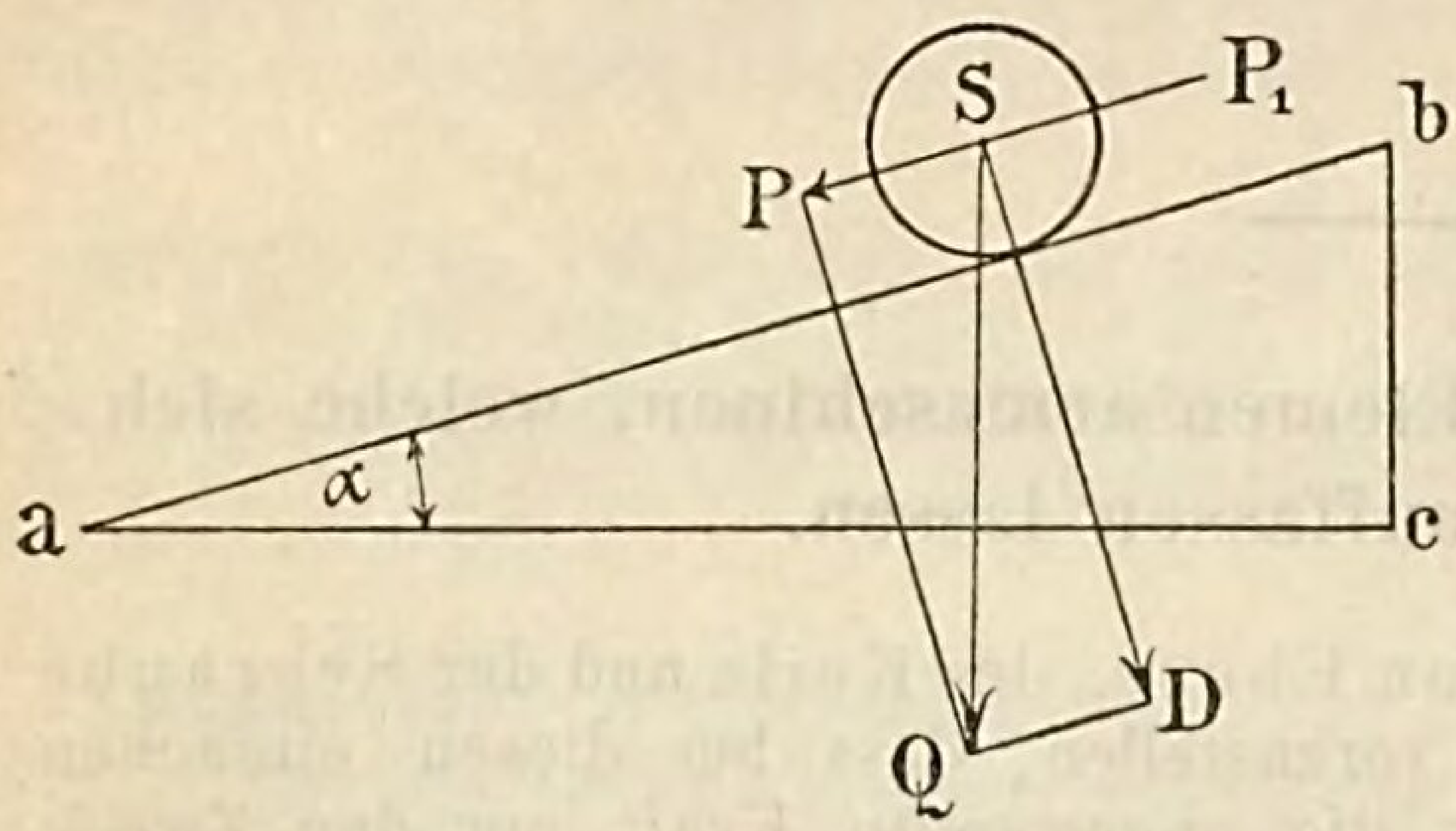
Frage 227. Was geschieht, wenn man irgend eine Last auf die schiefe Ebene legt und wie lassen sich die Bedingungen des Gleichgewichts ermitteln?

Antwort. Denken wir uns auf der schiefen Ebene irgend eine Last, etwa eine Glaskugel liegend, so wird dieselbe infolge der sehr geringen Reibung bestrebt sein, von der schiefen Ebene herabzurollen, und es lässt sich nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte aus dem Gewicht der Kugel eine Kraft ermitteln, welche im stande ist, das Herabrollen der Last zu verhindern und welche, um ein geringes vermehrt, fähig ist, die Kugel auf der schiefen Ebene emporzurollen.

Frage 228. Wie verfährt man, um die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderliche Kraft mit Hilfe der Mathematik zu finden?

Antwort. Um die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderliche Kraft auf mathematischem Weg zu finden, denken wir

Figur 344.



Erkl. 254. Dass es willkürlich ist, von welchem Punkt der schiefen Ebene aus die Höhe konstruiert wird, kommt daher, dass im folgenden nur das Verhältnis von Höhe, Länge und Basis gebraucht wird, und dieses Verhältnis wegen der Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke bei Annahme eines andern Ausgangpunktes doch dasselbe wäre.

uns die schiefe Ebene durch das rechtwinklige Dreieck abc (siehe Fig. 344) dargestellt. Ein Lot bc vom höchsten (oder von irgend einem andern) Punkt b [1]) derselben auf die Horizontalebene gefällt, heisst die Höhe; ein zweites Lot vom Fusspunkt c der Höhe auf die Durchschnittslinie der schiefen Ebene mit der Horizontalebene gefällt, heisst die Basis der schiefen Ebene. Höhe und Basis sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse die Länge der schiefen Ebene heisst. Der Winkel α, den die Länge der schiefen Ebene mit ihrer Basis einschliesst, heisst der Neigungswinkel der schiefen Ebene. Die Schwerkraft oder das Gewicht Q der Last, welches man sich nach der Lehre vom Schwerpunkt als eine Kraft vorstellen kann, welche im Schwerpunkt S angreift, wirkt senkrecht abwärts auf die Kugel, aber die Festigkeit der schiefen Ebene ab verhindert ein senkrechtes Herabfallen und trägt einen Teil der Last, wodurch ein Teil der Schwerkraft für die Bewegung verloren geht und das Herabgleiten nur noch mit einem Teil der Schwerkraft erfolgen kann.

[1]) Siehe Erkl. 254.

Frage 229. Welche Richtung kann die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderliche Kraft in Bezug auf die schiefe Ebene haben?

Antwort. Die Last kann:

1). durch eine parallel der Länge der schiefen Ebene oder auch
2). durch eine parallel der Basis der schiefen Ebene oder endlich
3). durch eine in beliebig schräger Richtung zur schiefen Ebene wirkende Kraft

im Gleichgewicht gehalten werden.

Frage 230. Wie verhält sich, für den Fall, dass die Kraft parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkt, im Zustand des Gleichgewichts die Kraft zur Last?

Antwort. Für den Fall, dass die Kraft parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkt, ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Beweis. Betrachten wir die Richtungslinie der Schwerkraft Q als die Diagonale eines Parallelogramms (s. Fig. 344), dessen eine Seite SD den senkrecht auf die schiefe Ebene gerichteten Druck vorstellt, während SP die zur Länge der schiefen Ebene parallel wirkende Kraft bedeutet, mit welcher die Last herabgleiten möchte, so muss eine Kraft:

$$SP_1 = SP$$

Erkl. 255. Wenn die Kraft P die Last Q im Gleichgewicht erhält, so wird jede ein wenig grössere Kraft, da sie mit SP eine nach der Seite der grösseren Kraft gerichtete Resultante gibt, eine aufwärts gerichtete Bewegung der Last zur Folge haben. Um also die zur Hebung der Last auf der schiefen Ebene erforderliche Kraft zu berechnen, berechne man die Kraft, welche die Last gerade noch in Ruhe hält und vergrössere dieselbe um soviel, als zur Ueber-

windung des etwaigen Reibungswiderstands auf der schiefen Ebene an Kraft erforderlich ist. Soll eine Last langsam auf einer schiefen Ebene hinabgelassen werden, so nimmt man die Gegenkraft wenig kleiner als SP.

Wirkt die Kraft P auf dem ganzen Weg $\overline{ab}$ (siehe Fig. 344) auf die Last Q, so wird Q um den Weg $\overline{bc}$ gehoben und ist also:

$$S : s = \overline{ab} : \overline{bc}$$

wenn S und s die Wegebezeichnungen sind. Da aber nach nebenstehender Relation auch:

$$Q : P = \overline{ab} : \overline{bc}$$

so ist auch:

$$S : s = Q : P$$

oder:

$$P S = Q s$$

d. h. der Weg der Kraft ist in demselben Verhältnis grösser als die Kraft selbst kleiner ist als die Last.

in entgegengesetzter Richtung von SP wirken, um Gleichgewicht herzustellen. Es lässt sich leicht nachweisen, dass

$$\triangle SPQ \sim \triangle abc$$

ist, und daraus folgt:

$$\overline{SP} : \overline{SQ} = \overline{bc} : \overline{ba}$$

oder wenn wir für

$$bc = h \quad \text{und} \quad ba = l$$

einsetzen,

1). $P : Q = h : l$

hieraus folgt:

2). $P = Q \cdot \frac{h}{l}$

woraus bei bekanntem Gewicht der Last und bekanntem Verhältnis der Höhe zur Länge sich die Kraft P berechnen lässt. Bezeichnet man den Neigungswinkel bac der schiefen Ebene mit α, so ist:

$$\frac{h}{l} = \sin \alpha$$

folglich auch:

3). $P = Q \cdot \sin \alpha$

Frage 231. Wie verhält sich, für den Fall, dass die Kraft parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkt, der Druck auf die schiefe Ebene zur Last?

Antwort. Für den Fall, dass die Kraft parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkt, verhält sich der Druck D auf die schiefe Ebene zum Gewicht oder zur Last Q, wie die Basis b der schiefen Ebene zur Länge l derselben.

Beweis. Nach der oben erwähnten Dreiecksähnlichkeit ist:

$$\overline{SD} : \overline{SQ} = \overline{ac} : \overline{ab}$$

oder:

1). $D : Q = b : l$

oder:

$$D = Q \cdot \frac{b}{l}$$

oder, da

$$\frac{b}{l} = \cos \alpha$$

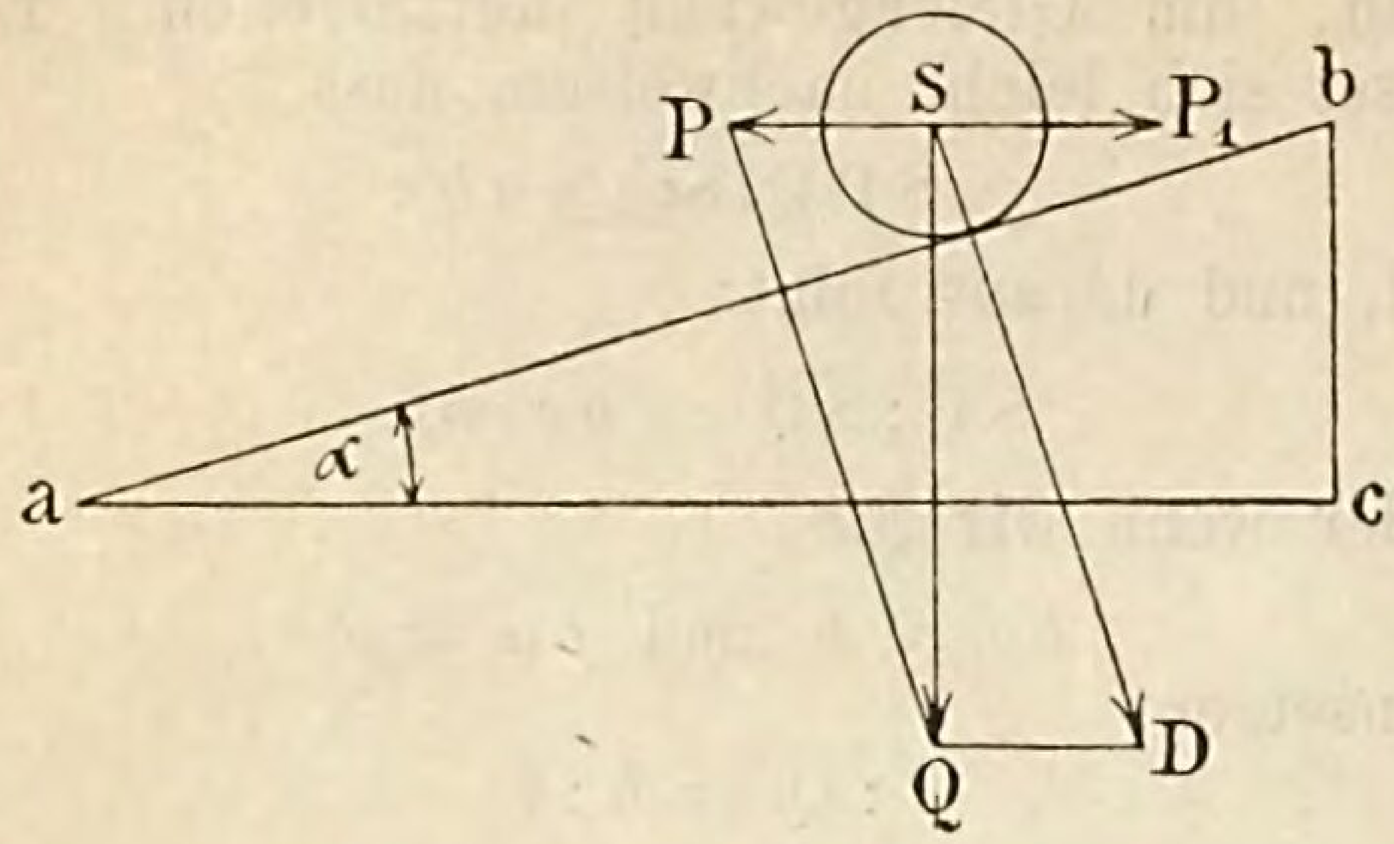
so ist:

2). $D = Q \cdot \cos \alpha$

Frage 232. Wie verhält sich, für den Fall, dass die Kraft horizontal oder parallel der Basis der schiefen Ebene wirkt, bei herrschendem Gleichgewicht die Kraft zur Last?

Antwort. Für den Fall, dass die Kraft horizontal wirkt, ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben.

Figur 345.



Erkl. 256. Da $\frac{h}{b}$ stets grösser als $\frac{h}{l}$ oder auch $\tan \alpha > \sin \alpha$, so ist die in unserm Fall anzuwendende Kraft stets grösser als bei parallel der schiefen Ebene gerichteter Wirkung derselben. Die Kraft P wird schon gleich Q für $\alpha = 45^0$, und bei noch stärkerer Neigung der schiefen Ebene hört die Kraftersparnis überhaupt auf, da dann $P > Q$ wird. Man macht daher von der horizontalen Wirkung der Kraft P nur Gebrauch bei sehr kleinem Neigungswinkel. Für $\alpha = 90^0$ wird $P = \infty$, d. h. es ist überhaupt durch eine horizontale Kraft keine vertikale Erhebung der Last möglich, und für $\alpha = 0$ wird auch $P = 0$, also auch die Folgerung dieselbe wie im Fall 1.

Beweis. Man betrachte die Richtungslinie SQ (Fig. 345) der Schwerkraft Q als die Diagonale eines Parallelogramms, dessen eine Seite $\overline{SD}$ wieder den Druck auf die Ebene vorstellt, während $\overline{SP}$ die zur Basis der schiefen Ebene parallel wirkende Kraft anzeigt. In diesem Fall ist:

$$\triangle SQP \sim \triangle abc$$

woraus folgt, dass

$$P : Q = h : b$$

oder:

1). $P = Q \cdot \frac{h}{b}$ [1]).

oder, da

$$\frac{h}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

so ist:

2). $P = Q \,.\, \operatorname{tg} \alpha$

[1]). Siehe Erkl. 256.

Frage 233. Wie gross ist der Druck, den die schiefe Ebene erleidet, wenn die Kraft in horizontaler Richtung wirkt?

Antwort. Wirkt die Kraft P horizontal, so steht der Druck D auf die schiefe Ebene zur Last Q im Verhältnis wie die Länge l zur Basis b.

Beweis. Da $\triangle SQP \sim \triangle abc$ (Fig. 345), so ist auch

$$\overline{SQ} : \overline{SD} = \overline{ac} : \overline{ab}$$

oder:

$$D : Q = l : b$$

oder:

1). $D = Q \cdot \frac{l}{b}$

oder, da $\frac{b}{l} = \cos \alpha$, so ist:

2). $D = \frac{Q}{\cos \alpha}$

Da die Hypotenuse l stets grösser sein muss als die Kathete b, so ergibt sich aus Gleich. 1)., dass bei horizontal wirkender Kraft der Druck stets grösser als das Gesamtgewicht der Last ist; infolgedessen ist die Reibung in diesem Fall auch bedeutender, als wenn die Kraft parallel der Länge der schiefen Ebene wirkt.

Frage 234. Was ergibt sich aus den in den Antworten der Fragen 230 und 232 enthaltenen Gleichungen in Bezug auf den in beiden Fällen notwendigen Kraftaufwand?

Antwort. Ist die Kraftrichtung parallel zur Länge der schiefen Ebene, so ist:

$$P = Q\frac{h}{l}$$

bei wagerechter Kraftwirkung dagegen ist:

$$P = Q\frac{h}{b}$$

d. h. die anzuwendenden Kräfte verhalten sich zu einander wie

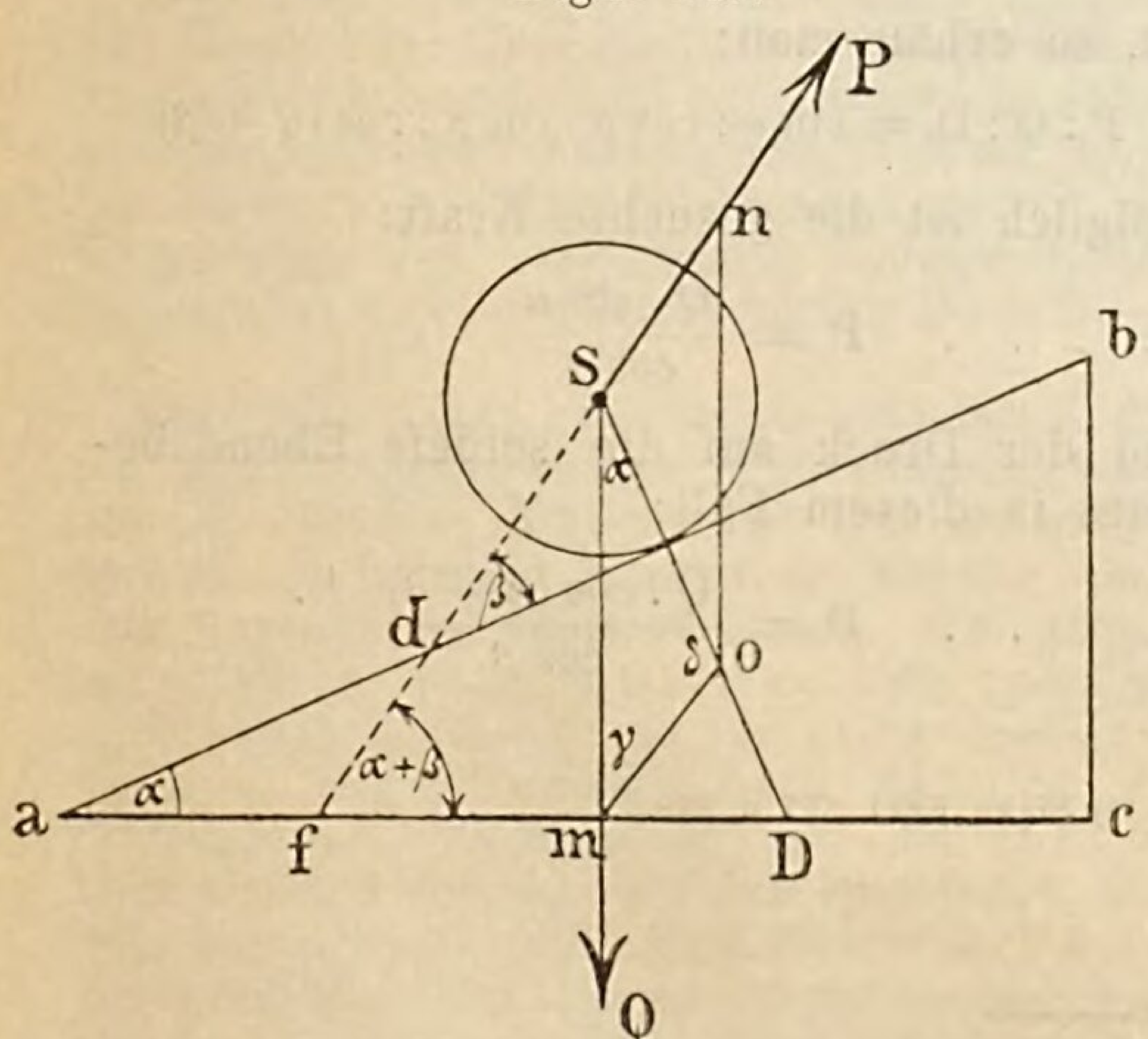
$$Q\frac{h}{l} : Q\frac{h}{b} = \frac{1}{l} : \frac{1}{b}$$

oder wie $b : l$, d. h. wie die Basis zur Länge.

Da nun die Länge als Hypotenuse immer grösser sein muss wie die Basis, so folgt daraus, dass unter sonst gleichen Umständen bei paralleler Wirkung der Kraft, ganz abgesehen von der durch den geringeren Druck bedingten geringeren Reibung, der Kraftaufwand ein weniger grosser ist als bei wagerechter Kraftwirkung, weshalb sich eine Anwendung der letzteren nicht empfiehlt und im praktischen Leben fast ausschliesslich nur parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kräfte angewandt werden, mit Ausnahme der Schraube, bei welcher die Kraft parallel der Basis wirkt.

Frage 235. Wie erhält man die Grösse der zur Herstellung des Gleichgewichts nötigen Kraft, wenn dieselbe in beliebig schräger Richtung zur Länge der schiefen Ebene wirkt und wie gross ist in diesem Fall der Druck, den die Last auf die schiefe Ebene ausübt?

Figur 346.



Antwort. Wirkt eine Kraft P in beliebig schräger Richtung auf die auf der schiefen Ebene $\overline{ab}$, Fig. 346, befindliche Last Q, so erhält man in ähnlicher Weise wie in den oben erörterten Fällen ihre zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Grösse, indem man aus der Kraft P und der durch S lotrecht wirkenden Kraft Q ein Kräfteparallelogramm bildet, dessen Diagonale die Resultierende der beiden Kräfte P und Q darstellt, welche in der auf $\overline{ab}$ senkrechten Linie $\overline{SD}$ liegen muss, und es ist dann für den Fall des Gleichgewichts:

1). . . . $P : Q = \overline{Sn} : \overline{Sm}$

und wenn D die Resultante aus P und Q ist:

2). . . . $D : Q = \overline{So} : \overline{Sm}$

wobei D zugleich den auf die schiefe Ebene stattfindenden Normaldruck bezeichnet.

Erkl. 257. Die in den nebenstehenden Gleichungen 3). und 4). gegebenen Werte haben für alle Fälle Giltigkeit. Wenn nämlich die Kraft P mit $\overline{ab}$ parallel läuft, dann ist:

$$\beta = 0 \quad \text{also} \quad \cos\beta = 1$$

daher:

$$P : Q : D = \sin\alpha : 1 : \cos\alpha$$

also:

1). $P = Q \cdot \sin\alpha$

und

2). $D = Q \cdot \cos\alpha$

Für den zweiten Fall, in welchem P mit $\overline{ac}$ parallel läuft, wird:

$$\gamma = R$$

also

$$\delta = (R - \alpha)$$

und da $\sin R = 1$, so ist:

$$P : Q : D = \sin\alpha : \sin(R - \alpha) : 1$$

oder da $\sin(R - \alpha) = \cos\alpha$, so ist:

$$P : Q : D = \sin\alpha : \cos\alpha : 1$$

und daraus ergibt sich:

3). . . $P = \dfrac{Q \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = Q \cdot \operatorname{tg}\alpha$

4). . . $P = \dfrac{Q}{\cos\alpha}$

übereinstimmend mit den früher entwickelten Formeln.

Erkl. 258. Dieser in nebenstehender Antwort ermittelte Wert für den Druck:

$$D = Q \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\beta}$$

ist aber nur so lange richtig, als die Richtung der Kraft P die schiefe Ebene ab unterhalb der Falllinie der Last Q, also z. B. in d (siehe Fig. 346) schneidet. Ist die Kraft P dagegen so gerichtet, dass ihre Richtungslinie die schiefe Ebene ab oberhalb der Falllinie der Last Q schneidet, dann erhält man in ganz analoger Weise für den Druck:

$$D = Q \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$$

Setzt man den Neigungswinkel der schiefen Ebene

$$\measuredangle\, bac = \alpha$$

und jenen, welchen die Richtung der Kraft P mit der Länge $\overline{ab}$ der Ebene bildet $= \beta$, so ist im Dreieck Smo

$$\measuredangle\, mSo = \alpha \quad \text{(siehe Erkl. 113)}$$

$$\measuredangle\, Smo = \gamma$$

oder da im rechtwinkligen Dreieck fmS

$$\measuredangle\, fSm = R - (\alpha + \beta)$$

ist, und

$$\measuredangle\, fSm = \gamma \quad \text{(als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)}$$

so ist:

$$\gamma = R - (\alpha + \beta)$$

folglich muss

$$\measuredangle\, Som \text{ oder } \delta = 2R - (\alpha + \gamma)$$

sein (denn die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck beträgt 2R) oder den Wert für γ eingesetzt:

$$\delta = 2R - [\alpha + R - (\alpha + \beta)]$$

oder:

$$\delta = R + \beta$$

und da sich nach einem Satz der Trigonometrie die Seiten eines Dreiecks wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, so hat man, statt der Dreiecksseiten gleich die Kräfte setzend:

$$P : Q : D = \sin\alpha : \sin\delta : \sin\gamma$$

oder:

$$P : Q : D = \sin\alpha : \sin(R + \beta) : \sin[R - (\alpha + \beta)]$$

oder, da nach einer Formel aus der Goniometrie

$$\sin(R + \beta) = \cos\beta$$

und

$$\sin[R - (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + \beta)$$

ist, so erhält man:

$$P : Q : D = \sin\alpha : \cos\beta : \cos\beta : \cos(\alpha + \beta)$$

Folglich ist die gesuchte Kraft:

3). . . . $P = \dfrac{Q \cdot \sin\alpha}{\cos\beta}$

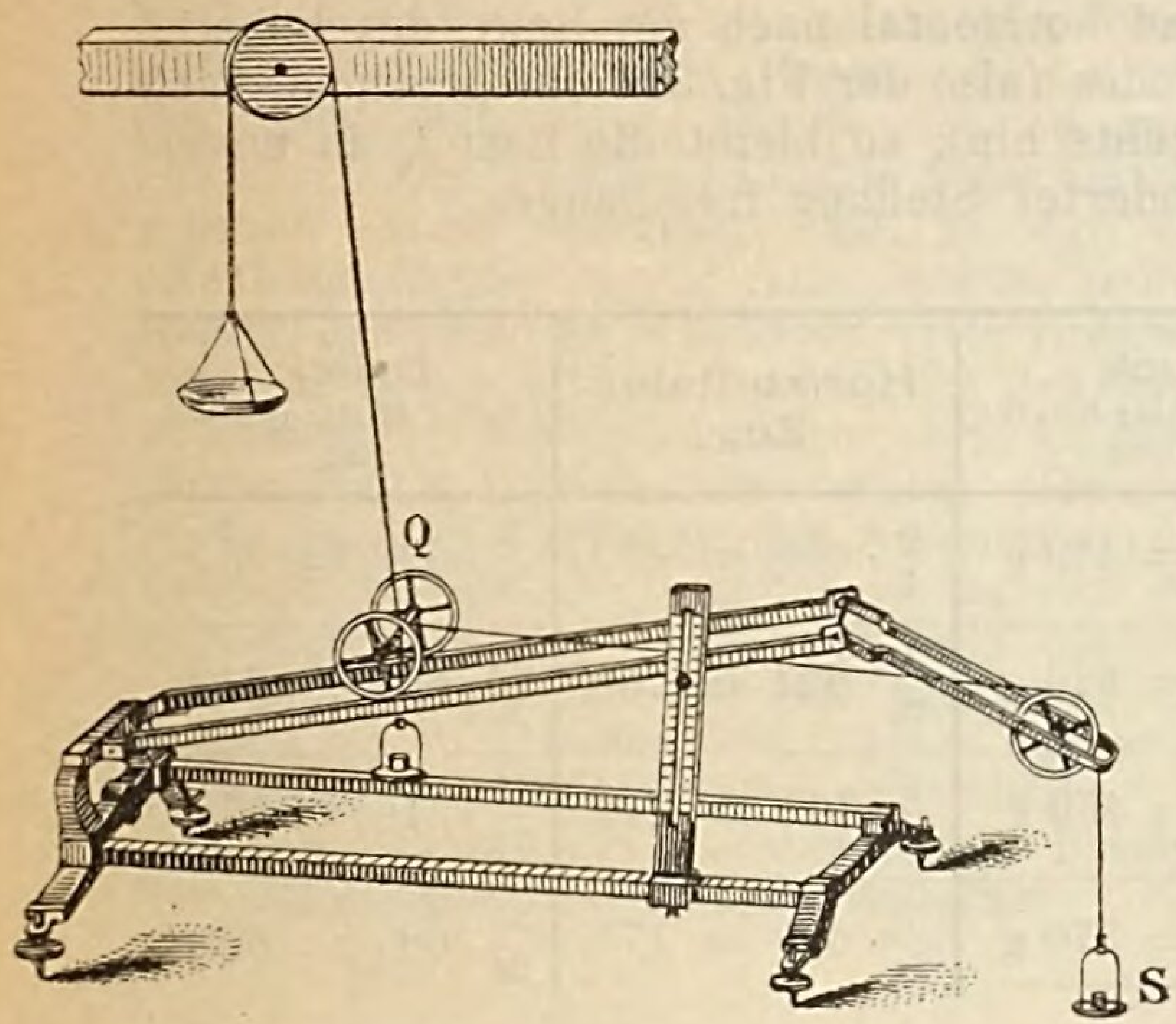
und der Druck auf die schiefe Ebene beträgt in diesem Fall:

4). . . . $D = \dfrac{Q \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\cos\beta}$ [1].

[1]) Siehe Erkl. 257 u. 258.

Frage 236. Wie lassen sich die vorerwähnten Gesetze der schiefen Ebene auf dem Wege des Experiments beweisen?

Figur 347.



Erkl. 259. Als Last einen kleinen vierrädrigen Wagen zu nehmen, den man nach Bedarf mit Gewichten bis zur verlangten Grösse beschwert, ist nicht rätlich, weil man damit den Druck auf die schiefe Ebene nicht gut nachweisen kann, wegen des veränderlichen Schwerpunktes. Weit mehr empfiehlt es sich, zwei Räder durch eine Achse zu verbinden, welche eine Wagschale trägt; zwei an der Achse angebrachte Bügel dienen zum Aufhängen von Schnüren, die über Rollen geführt werden und die Gewichte tragen, welche die Zug- und Druckkräfte repräsentieren.

Erkl. 260. Je nachdem ein solcher Apparat aus Metall oder Mahagoniholz mit verstellbarer Spiegelplatte besteht und seine Achsen in Achat oder Stahl laufen, kostet derselbe Mark 40.— bis Mark 85.—. Ganz einfache Apparate zur Erläuterung des Gesetzes der schiefen Ebene bei parallel wirkender Kraft kosten Mark 15.—.

Erkl. 261. Will man an der schiefen Ebene die Beziehungen zwischen dem Gewicht eines auf ihr liegenden Körpers und den vier hauptsächlich in Betracht kommenden Kräften, dem Zug parallel der schiefen Ebene, dem Druck auf dieselbe, dem horizontalen Zug und dem dabei stattfindenden Druck für einen und denselben Neigungswinkel durch Versuche erläutern, was wünschenswert ist, um nicht zu viele einzelne Versuche machen zu müssen, und will man sich auf solche Verhältnisse der Länge, Basis und Höhe der schiefen Ebene beschränken, die durch nicht zu grosse, ganze rationelle Zah-

Antwort. Um die Gesetze der schiefen Ebene durch Experimente zu beweisen, benutzt man am besten den in Fig. 347 abgebildeten Apparat, bestehend aus einer drehbaren schiefen Ebene, welche man in die verschiedensten Stellungen bringen und in denselben durch eine Schraube befestigen kann. Der Apparat ist so eingerichtet, dass die Last durch Verstellung der Rolle am Ende der Hypotenuse parallel zur schiefen Ebene oder zur Basis derselben wirken kann. Der Lastträger besteht aus einer Achse mit durchbrochenen Rädern [1]) und an ersterer befindlicher Belastungsschale. Von dieser Achse aus führt eine Schnur über eine Rolle und trägt an ihrem Ende eine Zugschale zur Aufnahme der Gewichte.[2]) Länge, Basis und Höhe sind mit Massstäben versehen. Man lege die Last Q (bestehend aus dem Gewicht des Radpaares plus dem der angehängten Schale plus den Belastungsgewichten) auf den unteren Teil der Ebene und die Schnur über die Rolle, lege dann so viel Gewichte in die Schale S bis Gleichgewicht eintritt oder bis der Körper anfängt die schiefe Ebene hinaufzurollen; man lese die Gewichte ab und rechne das Gewicht der Schale hinzu, so hat man dasjenige Gewicht, welches bei der Neigung, die man der schiefen Ebene gegeben hat, nötig ist, um Gleichgewicht herzustellen. Kennt man dann das Gewicht des Körpers Q, so braucht man nur die Länge und Höhe der schiefen Ebene an den eingravierten Massstäben abzulesen und wird dann die obigen Gesetze bestätigt finden.

Stellt man z. B. die schiefe Ebene so, dass ihre Länge 41, ihre Höhe 9 und ihre Basis 40 cm beträgt, so sind bei einer Gesamtlast von 410 g bei zur Länge paralleler Kraftwirkung

$$\frac{410 \cdot 9}{41} = 90 \text{ g Kraft,}$$

bei wagerechter Kraftwirkung aber

$$\frac{410 \cdot 9}{40} = 92^1/_4 \text{ g}$$

nötig zur Herstellung des Gleichgewichts; oder sind die drei Seiten $l = 25$, $b = 24$, $h = 7$, so gehören zu 300 g Last 84 resp. $87^1/_2$ g Kraft u. s. w.

Zum Beweis des Drucks auf die schiefe Ebene führt man eine an der Lastachse

[1]). Siehe Erkl. 259.
[2]). Siehe Erkl. 260.
[3]). Siehe Erkl. 261.

len (bis 25) darstellbar sind, so können nur die Verhältnisse:

1). . . 5 : 4 : 3 3). . . 17 : 15 : 8
2). . . 13 : 12 : 5 4). . . 25 : 24 : 7

in Betracht kommen, weil nur diese rechtwinkligen Dreiecken entsprechen, abgesehen von den blossen vielfachen 10 : 8 : 6 etc. der obigen Verhältnisse.

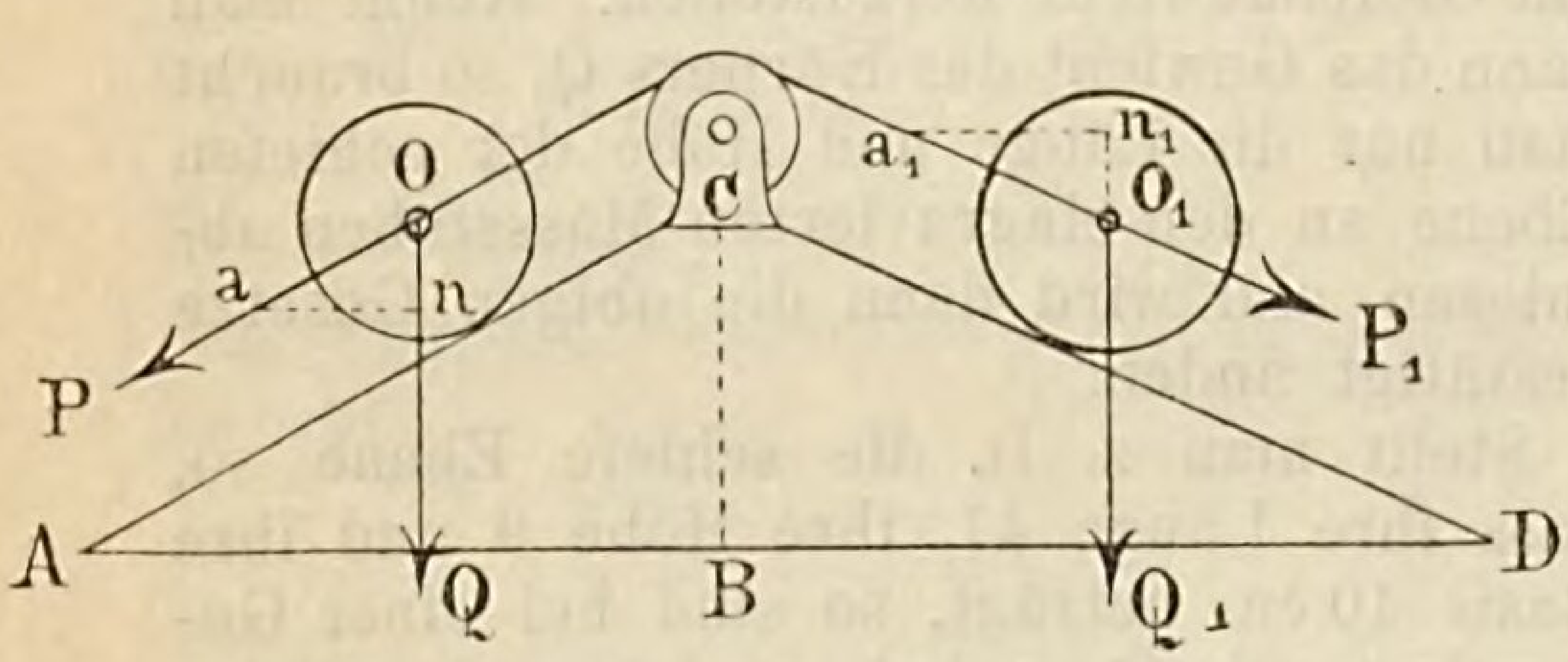
Sollen jedesmal alle vier Kräfte durch ganze Einheiten dargestellt werden, so wählt man für die vier oben erwähnten Verhältnisse am zweckmässigsten folgende Grössen:

befestigte Schnur derart über eine an irgend einem Gestell befestigte Rolle R (siehe Fig. 347), dass die Schnur senkrecht gegen die schiefe Ebene steht, und hängt die erforderlichen Gewichte an; verschiebt man jetzt die schiefe Ebene, parallel mit sich selbst und horizontal nach der Seite des höheren Endes (also der Fig. 347 entsprechend nach rechts hin), so bleibt die Last Q in unveränderter Stellung frei hängen.

Last.	Zug parallel der schiefen Ebene.	Druck bei paralleler Kraftwirkung.	Horizontaler Zug.	Druck beim Horizontalzug.
1). . . 600 g	$\frac{3}{5} \cdot 600 = 360$ g	$\frac{4}{5} \cdot 600 = 480$ g	$\frac{3}{4} \cdot 600 = 450$	$\frac{5}{4} \cdot 600 = 750$
2). . . 624 g	$\frac{5}{13} \cdot 624 = 240$ g	$\frac{12}{13} \cdot 624 = 576$ g	$\frac{5}{12} \cdot 624 = 260$	$\frac{13}{12} \cdot 624 = 676$
3). . . 510 g	$\frac{8}{17} \cdot 510 = 240$ g	$\frac{15}{17} \cdot 510 = 450$ g	$\frac{8}{15} \cdot 510 = 272$	$\frac{17}{15} \cdot 510 = 578$
4). . . 600 g	$\frac{7}{25} \cdot 600 = 168$ g	$\frac{24}{25} \cdot 600 = 576$ g	$\frac{7}{24} \cdot 600 = 175$	$\frac{25}{24} \cdot 600 = 625$

Frage 237. Wenn eine auf einer schiefen Ebene befindliche Last Q eine auf einer andern schiefen Ebene angebrachte Last Q_1 im Gleichgewicht erhalten soll, in welchem Verhältnis stehen dann die beiderseitigen Lasten?

Figur 348.



Erkl. 262. Derart verbundene schiefe Ebenen sieht man als Strassen- und Schienenbahnen, welche in gebirgigen Gegenden, namentlich bei Bergwerken angebracht werden, damit ein auf der einen schiefen Bahn abwärts gehender beladener Wagen einen auf der anderen Ebene befindlichen Wagen aufwärts zieht. Dabei ist es nicht nötig, dass beide Ebenen gerade wie in obiger Figur miteinander verbunden sind; sie können auch eine parallele oder beliebige andere Lage zueinander haben, wenn nur die Fortpflanzung der Bewegung von einer Ebene auf die andere durch entsprechend angebrachte Richtungsrollen etc. bewerkstelligt wird.

Erkl. 263. Es dürfte hier am Platz sein, des Werkes „De Ponderositate" von *Jordanus*

Antwort. Soll eine auf einer schiefen Ebene ABC, Fig. 348, befindliche Last Q eine auf einer andern schiefen Ebene DBC angebrachte Last Q_1 im Gleichgewicht erhalten, so müssen die Lasten im geraden Verhältnis der Längen ihrer schiefen Ebenen stehen oder es ist:

$$Q : Q_1 = \overline{AC} : \overline{DC}$$

Beweis. Denken wir uns die beiden Lasten durch ein über die Rolle C gespanntes Seil miteinander verbunden, so ist die Kraft, welche in der Richtung von C nach A wirkt, nach Antw. auf Frage 230:

$$P = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot Q$$

oder:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q$$

Ebenso ist die von C nach D wirkende Kraft

$$P_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \cdot Q_1$$

oder:

$$P_1 = \frac{h_1}{l_1} \cdot Q_1$$

Nemorarius Erwähnung zu thun. Dasselbe enthält Sätze wie z. B.: „Dass ein Körper in demselben Verhältnis schwerer ist, je mehr er in direkter Richtung gegen den Mittelpunkt fortgeht.“ Die ‚absteigende Kraft‘ der Körper auf geneigten Ebenen wird mit einer andern Erscheinung verglichen, die ein sonderbares Beispiel eines fehlerhaften Schlusses abgeben. Wenn 2 Körper auf 2 geneigten Ebenen, wie z. B. auf den beiden Seiten eines Daches sich bewegen, und durch eine über die Schneide dieses Daches gehende Schnur verbunden sind, so wird der eine dieser Körper so viel fallen, als der andere steigt; aber auf der schieferen (dem Horizont näheren) Ebene wird die verticale Bewegung in demselben Verhältnis geringer sein, als diese Ebene länger ist, als die andere. Demnach wird, nach dem Prinzip des Aristoteles, das Gewicht des auf der schiefen Ebene sich bewegenden Körpers kleiner sein, als das des andern Körpers, und um die Gleichheit der Wirkungen zu erhalten, wird jener Körper in demselben Verhältnis grösser sein müssen.“ — Der ganze Beweis des Jordanus ist ein Beispiel der Gedankenverirrung seines Zeitalters.

Es ist also für den Zustand des Gleichgewichts:

$$\frac{h}{l} \cdot Q = \frac{h_1}{l_1} \cdot Q_1$$

Folglich für den Fall, dass beide Ebenen gleiche Höhe haben, also $h = h_1$ ist, wie in Fig. 348:

$$Q \cdot l_1 = Q_1 \cdot l$$

oder es verhält sich:

$$Q : Q_1 = l : l_1$$

Ist also die Ebene $\overline{CD} = l_1$ 2-, 3-, n-mal länger als $\overline{AC} = l$, so muss auch die Last Q_1 2-, 3-, n-mal grösser als Q sein. (Hierbei ist noch die Reibung zu berücksichtigen.)

Frage 238. Welche alltäglichen Erscheinungen beweisen uns, dass man, um eine Last auf der schiefen Ebene fortzubewegen, um so mehr Kraft gebraucht, je steiler die schiefe Ebene ist?

Erkl. 264. Die Erscheinung, welche uns die Bewegung der Körper auf der schiefen Ebene darbietet, war eine der ersten und wichtigsten, in welcher die neueren Mathematiker ihre Kräfte versuchten. Man fand bald, dass ein Körper auf einer solchen Ebene durch eine Kraft oder durch einen Zug zurückgehalten werden kann, die denselben Körper im freien Zustande nicht zurückzuhalten im stande ist. Deshalb wurde auch die schiefe Ebene in die Liste der einfachen Maschinen aufgenommen, durch welche die Wirkung der Kraft, die man an den Körpern anbringen will, vermehrt wird. Allein die Frage war: in welchem Verhältnis wird diese Kraft bei der schiefen Ebene vermehrt? — Man sah bald, dass die Kraft, die den Körper auf der Ebene erhält, desto kleiner ist, je kleiner die Neigung dieser Ebene gegen den Horizont ist. *Cardanus* behauptete, dass diese Kraft verdoppelt werden müsse, wenn der Winkel der Neigung der Ebene verdoppelt wird, und so fort für andere Neigungen. Allein das war nur eine Mutmassung von Cardan, und eine ganz falsche dazu. — Der Marquis *Guido Ubaldi* von Marchmont publizierte 1577 zu Pesaro sein „Mechanicorum Liber“, in welchem er sich viele Mühe gibt, zu zeigen, dass ein spitzer Keil einen grösseren mechanischen Effekt haben müsse, als ein stumpfer, aber er sagt nichts von dem Verhältnis, das dabei statthaben soll. Es hat, setzt er bloss hinzu, „ein gewisses

Antwort. Je höher man eine Tischplatte auf der einen Seite hebt, desto schneller rollt eine Kugel auf derselben herab. Jedermann weiss, dass auf der Strasse ein Wagen um so schwieriger zu ziehen ist, je steiler der Weg ist, um so leichter aber, je weniger derselbe geneigt ist, oder je grösser die Länge ist, auf die sich die zu überwindende Steigung verteilt. Man kann deshalb Strassen und Eisenbahnen nur bis zu einem gewissen Grad ansteigen lassen, und wird, wenn die natürliche Erhebung für den Transport von Lasten eine zu steile ist, gezwungen, die Wege entweder in Schlangenwindungen anzulegen, wodurch die Neigung auf eine grössere Länge verteilt wird, oder man wendet andere Hilfsmittel an, z. B. das Aufziehen der Wagen mittels starker Seile, welche durch eine auf der Höhe stehende Dampfmaschine auf grosse Trommeln gewickelt werden, um die Steigung zu überwinden. Wird die Steigung immer grösser, so geht die Fläche endlich in eine senkrechte über und in diesem Falle ist die anzuwendende Kraft gleich der Last. Ruht dagegen die Last auf einer horizontalen Ebene, so wirkt ihr ganzes Gewicht als Druck auf die Unterlage, und es bleibt keine nach irgend einer Seite wirkende Kraft übrig. Ohne die Reibung würde man

Widerstreben“ statt, zwischen der Richtung, in welcher der Keil den ihm entgegenstehenden Körper forttreiben muss, und derjenigen, in welcher er in der That fortgehen will. Weiter erkennt er auch richtig, dass der Keil und die schiefe Ebene in ihrem Prinzip zusammengehören. Er verweist sogar auf die Schraube, als auf denselben Gründen mit jenen beiden beruhend. Aber die eigentlichen Verhältnisse, unter welchen sie alle wirken, konnte er doch nicht angeben.

Stevin, geb. in Brügge Mitte des 16. Jahrh., war einer der ersten Begründer der neuen wissenschaftlichen Mechanik. Er erkannte zuerst das wahre Verhältnis der Kraft zur Last bei der schiefen Ebene, das er, ebenso genau als allgemein, für alle besonderen Fälle bestimmte. Er nahm eine Kette an, mit 14 gleich grossen Kugeln in gleichen Zwischenräumen belastet, hängend über einem dreiseitigen Balken, dessen Basis horizontal ist. Die zwei anderen Seiten, die sich in ihrer Länge wie 2 : 1 verhielten, trugen die eine 4 und die andere 2 Kugeln. Er zeigte, dass die Kette in dieser Lage in Ruhe bleiben müsse, weil nämlich jede Bewegung derselben sie auf dieselbe Lage wieder zurückführen würde; dass der andere, mit den übrigen 8 Kugeln beladene Teil der Kette immerhin ganz weggenommen werden könnte, ohne das Gleichgewicht zu stören, und dass daher 4 Kugeln auf der längeren Fläche jene 2 auf der kürzeren ebenfalls im Gleichgewicht erhalten, d. h. dass die Gewichte sich wie die Längen dieser Flächen verhalten. Stevin erbaute auf diesem Prinzip eine vollständige Lehre des Gleichgewichts.

Um dieselbe Zeit begannen sich über die Zusammensetzung der Kräfte mehrere wahre Ansichten zu verbreiten. Der „Tractatus de Motu“ des *Michael Varro* von Genf (1584) stellte bereits den Satz auf, dass Kräfte, die an den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sich im Gleichgewicht halten, diesen Seiten proportioniert sind, woraus der Verfasser auf ganz richtige Weise die Eigenschaften des Keils und der Schraube ableitete. Bald darauf erbaute auch *Galilei* dieselben Resultate auf ganz andere Prinzipien. In seiner Abhandlung „Delle Scienze Meccanice“ (1592) bezieht er die schiefe Ebene auf den Hebel, indem er sich den Hebel so gestellt denkt, dass die Bewegung eines Körpers an dem Ende des einen Hebelarmes dieselbe Richtung habe, wie auf der schiefen Ebene. Mit einer leichten Modifikation dieser Darstellung kann daraus ein vollständiger Beweis des Satzes abgeleitet werden. Uebrigens ist die Auflösung des Problems von der schiefen Ebene durch Galilei nur für den Fall gegeben worden, wo die Richtung der die Last zurückhaltenden Kraft mit der schiefen Ebene selbst parallel ist; die allgemeine Auflösung, wenn diese Richtung eine willkürliche ist, wurde erst später von *Roberval* in einer im Jahre 1636 erschienenen Schrift gegeben.

also die grösste Last mit der geringsten Kraft auf einer horizontalen Ebene in Bewegung setzen können.

Jedes Flussbett ist eine schiefe Ebene, auf der das Wasser je nach der Neigung mit grösserer oder geringerer Geschwindigkeit von höheren zu tieferen Punkten herabfällt. Schiefe Ebenen sind auch die Gleitbahnen, die Treppen und Leitern, die Schrotleiter, welche die Fuhrleute anwenden, sowie die Holzriesen oder Rutschen, welche im Hochgebirge in ausgedehntem Masse beim Holztransport Anwendung finden. Dieselben bestehen aus 4 bis 8 nebeneinanderliegenden Stämmen, in denen Scheit- oder Langholz entlang gleitet. Während man bei sehr steilen Riesen die Hölzer trocken transportiert, wartet man bei solchen von geringem Gefälle Regenwetter ab oder benetzt dieselben durch aufgeschüttetes Wasser. Ist Schnee gefallen, so lässt sich mit dessen Hilfe eine glatte Bahn herstellen; noch besser wird diese aber durch eingetretenen Frost. Hierher gehören ferner die sogen. Aufzüge, durch welche die mit Hölzern beladenen Wagen über ein steiles Gebirgsjoch hinweg nach dem jenseitigen Thale geschafft werden. — Allbekannt sind ferner die schiefen Ebenen, welche die Arbeiter bei Steinbrüchen und Neubauten anlegen, um die Steine bequemer in die Höhe zu schaffen, und welche wahrscheinlich schon im grauen Altertume von den Aegyptern benutzt wurden, um die ungeheuren Steinblöcke in die Höhe zu schaffen, welche sie zu ihren Pyramiden verwendeten.

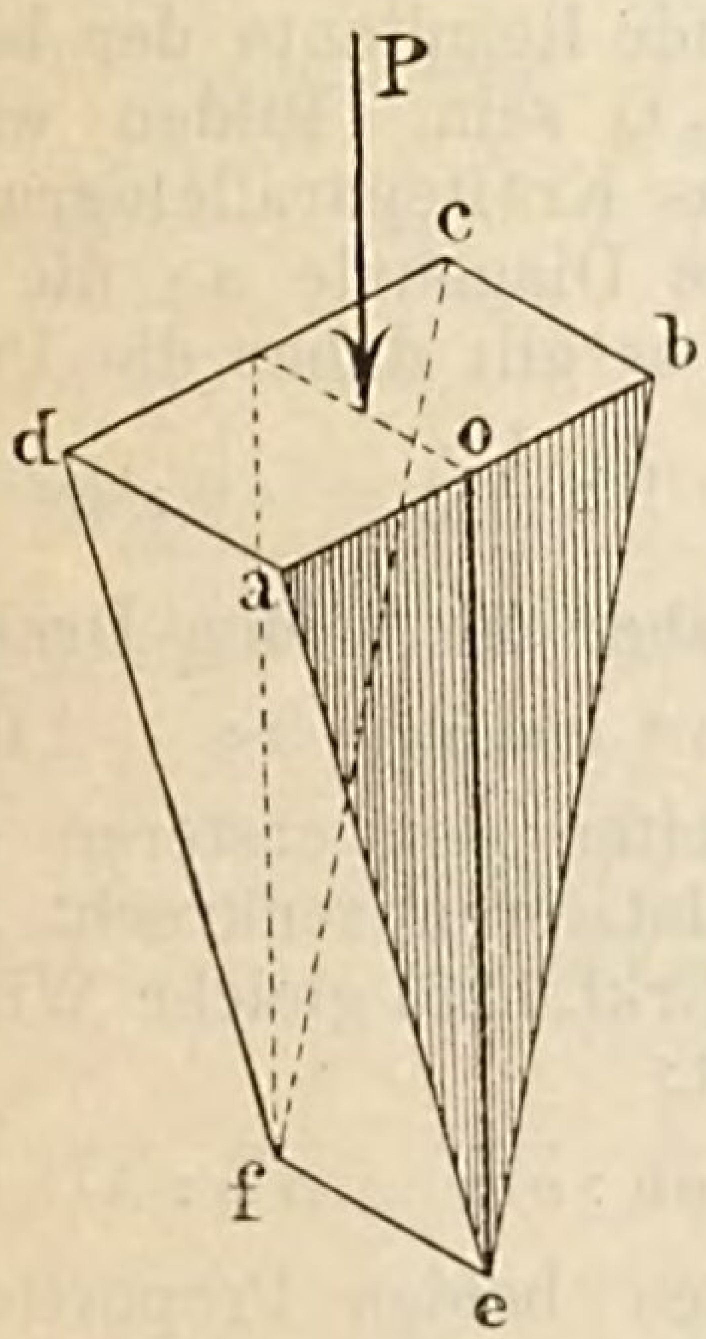
β). Vom Keil und seiner Anwendung.

Frage 239. Auf welche Art der schiefen Ebenen bezogen sich die vorerwähnten Beispiele ihrer Anwendung nach, was für schiefe Ebenen kommen sonst noch vor und welches ist die einfachste Form der letzteren.

Antwort. Alle vorerwähnten Beispiele von Anwendungen der schiefen Ebene bezogen sich nur auf die unbewegliche schiefe Ebene. Im Gegensatz dazu kennt die Praxis auch eine Menge Anwendungen, bei denen die schiefe Ebene beweglich ist. Die einfachste Form einer beweglichen schiefen Ebene mit nur geradlinig fortschreitender Bewegung ist der Keil.

Frage 240. Was versteht man unter einem Keil, welches ist seine gewöhnlichste Form und Anwendung und welches sind die Teile desselben?

Figur 349.



Antwort. Jeder in eine Spitze oder Schneide zulaufende Körper kann als Keil betrachtet werden; jedoch versteht man in der Mechanik hierunter meistens ein dreiseitiges Prisma (Fig. 349), welches durch drei rechteckige (*ac*, *af*, *ce*) und zwei dreieckige Flächen (*aeb* und *dfc*) eingeschlossen ist und mit einer seiner Kanten (*ef*) zwischen zwei Hindernisse eindringt, um diese durch Anwendung einer Kraft P auf die der betreffenden Kante gegenüberliegende Fläche (*ac*) von einander zu entfernen. Zum Spalten, Sprengen und Schneiden benutzt man gewöhnlich einen Keil, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ist (siehe Fig. 350). Die der scharfen Kante *ef* (Fig. 349) gegenüberliegende Fläche des Keils *ac* nennt man den Rücken oder Kopf, die beiden Flächen *de* und *ce*, welche in der scharfen Kante *ef* zusammenlaufen, heissen die Seiten des Keils, während die Kante *ef*, welche sich zwischen die Hindernisse einsenkt, Schneide oder Schärfe genannt wird, während die zum Rücken senkrechte Mittellinie $\overline{eo}$ die Länge oder Höhe desselben bildet.

Frage 241. In welcher Art und Weise können die vom Keil zu überwindenden Widerstände gegen die Seiten desselben wirken?

Antwort. Die vom Keil zu überwindenden Widerstände wirken entweder

1). normal, d. i. senkrecht auf die Seiten des Keils, oder
2). normal zu der Länge oder Höhe des Keils, oder
3). unter irgend einer anderen Richtung.

Frage 242. Wie verhält sich am Keil für den Fall des Gleichgewichts die Kraft P zu dem normal gegen die Seiten des Keils gerichteten Gesamtwiderstand Q?

Antwort. Es verhält sich beim Keil die gegen den Rücken (oder Kopf) desselben anzuwendende Kraft P zu dem Widerstand Q, welcher normal gegen seine beiden Seitenwände ausgeübt wird, wie die Fläche R des Rückens zu seinen beiden Seitenflächen 2 S.

Beweis. Es sei ABC der Durchschnitt eines Keils in seiner gewöhnlichsten Form, so dass AC = BC ist, und P sei die lotrecht gegen den Kopf desselben gerichtete Kraft, während in den Punkten *m* und *n* senkrecht zu den Seiten des Keils der Gesamtwiderstand Q des zu spaltenden Körpers, also auf jeder Seite $\frac{1}{2}$ Q, wirkt.

Nach Satz 5 in Antwort auf Frage 11 können wir uns die Angriffspunkte der drei auf den Keil wirkenden Kräfte nach dem Durchschnittspunkt *o* ihrer Richtungslinien verlegt denken und es muss dann für den Fall des Gleichgewichts P die entgegengesetzt wirkende Resultante der beiden Komponenten $\frac{1}{2}$ Q sein. Bilden wir nun aus letzteren das Kräfteparallelogramm *monu*, so stellt die Diagonale $\overline{ou}$ die Resultante P vor, und es gilt daher die Proportion:

$$P : \frac{1}{2} Q = \overline{ou} : \overline{om}$$

Es sind aber die beiden Dreiecke

omu und *onu* ∾ △ ABC

weil die Seiten der ersteren einzeln auf denen des letzteren senkrecht stehen und also (nach Erkl. 113) gleiche Winkel bilden, demnach ist:

$$\overline{ou} : \overline{om} = \overline{AB} : \overline{AC} \text{ }^{1)}$$

Aus diesen beiden Proportionen ergibt sich aber die neue:

$$P : \frac{1}{2} Q = \overline{AB} : \overline{AC}$$

folglich ist, wenn wir für $\overline{AB}$ = R (Rücken) und für $\overline{AC}$ = S (Seite) setzen:

$$P : \frac{1}{2} Q = R : S$$

oder:

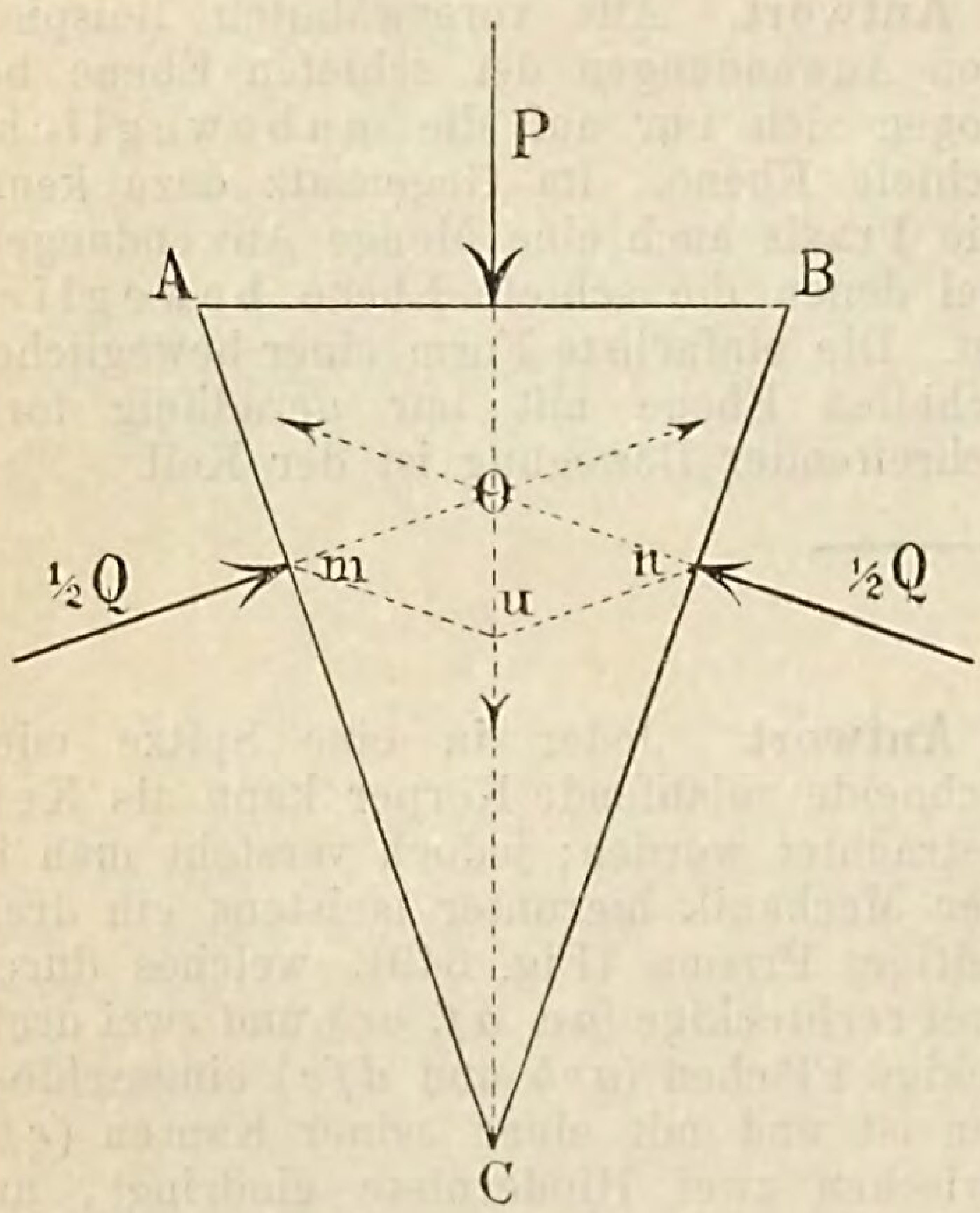
1). . . . $P : Q = R : 2S$

was zu beweisen war. Aus obiger Gleichung 1). folgt:

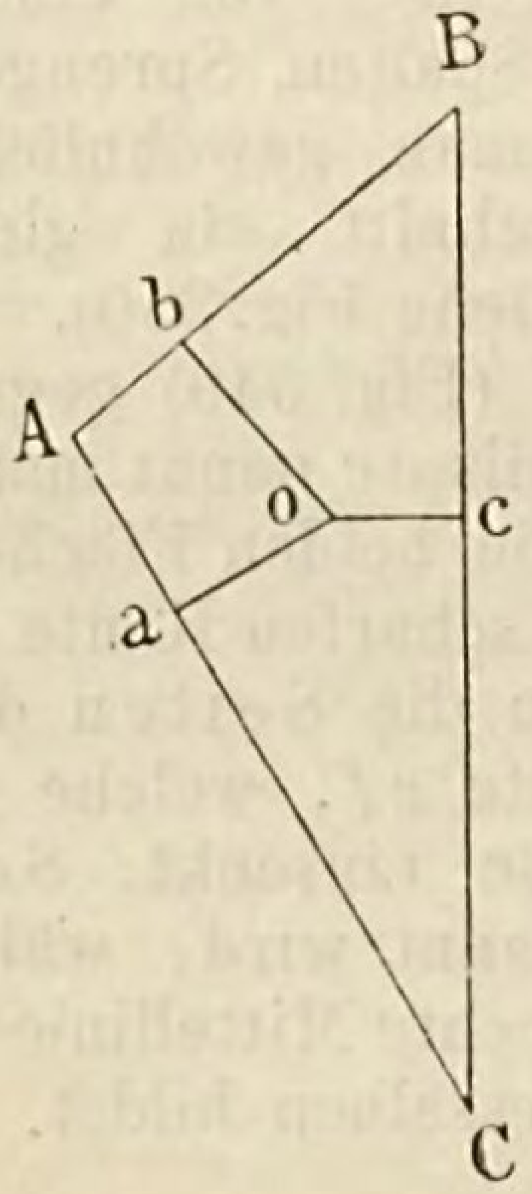
2). . . $P = \frac{Q \cdot R}{2S}$ und $Q = \frac{P \cdot 2S}{R}$

[1]) Siehe Erkl. 265.

Figur 350.



Figur 351.



Erkl. 265. Aus der in nebenstehender Antwort erwähnten Dreiecksähnlichkeit folgt, dass

$$\overline{ou} : \overline{om} : \overline{mu} = \overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$$

oder:

$$P : \frac{1}{2} Q : \frac{1}{2} Q = \overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$$

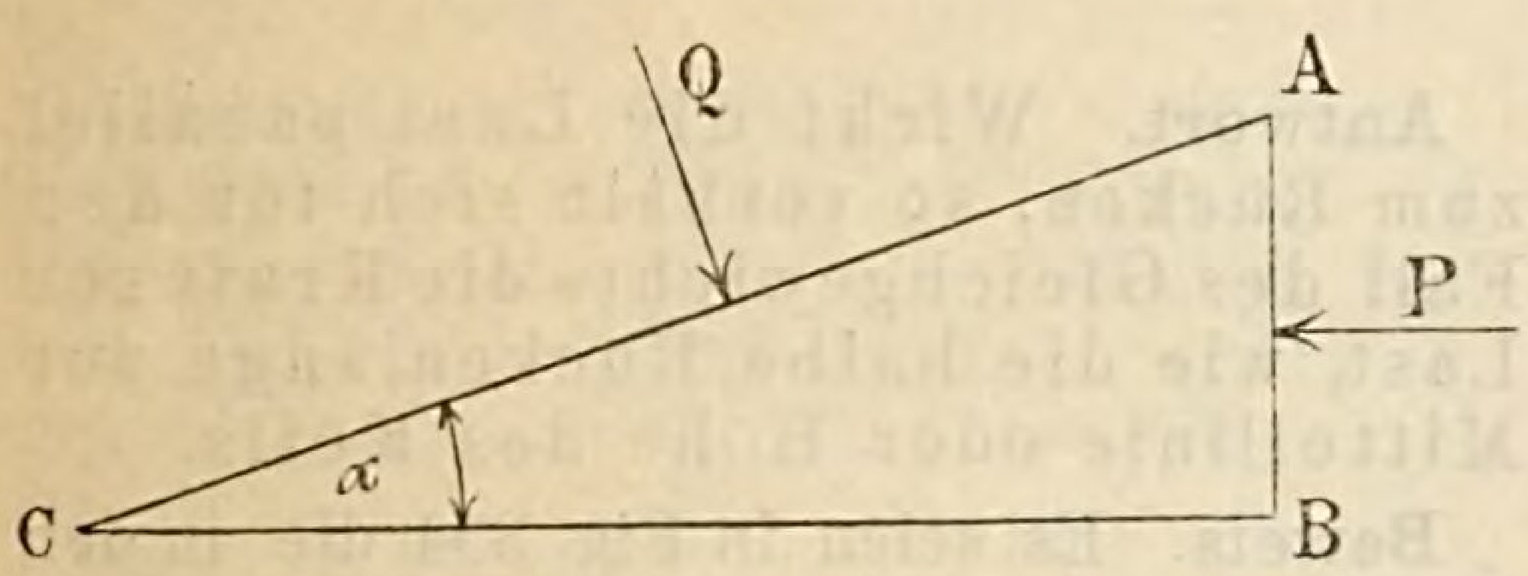
d. h. es verhalten sich für den Zustand des Gleichgewichts die drei wirkenden Kräfte bei einem Keil, wie die drei Seiten des Dreiecks ABC.

Da die Form des Keils willkürlich ist, so lassen sich die auf seine drei Seiten wirkenden

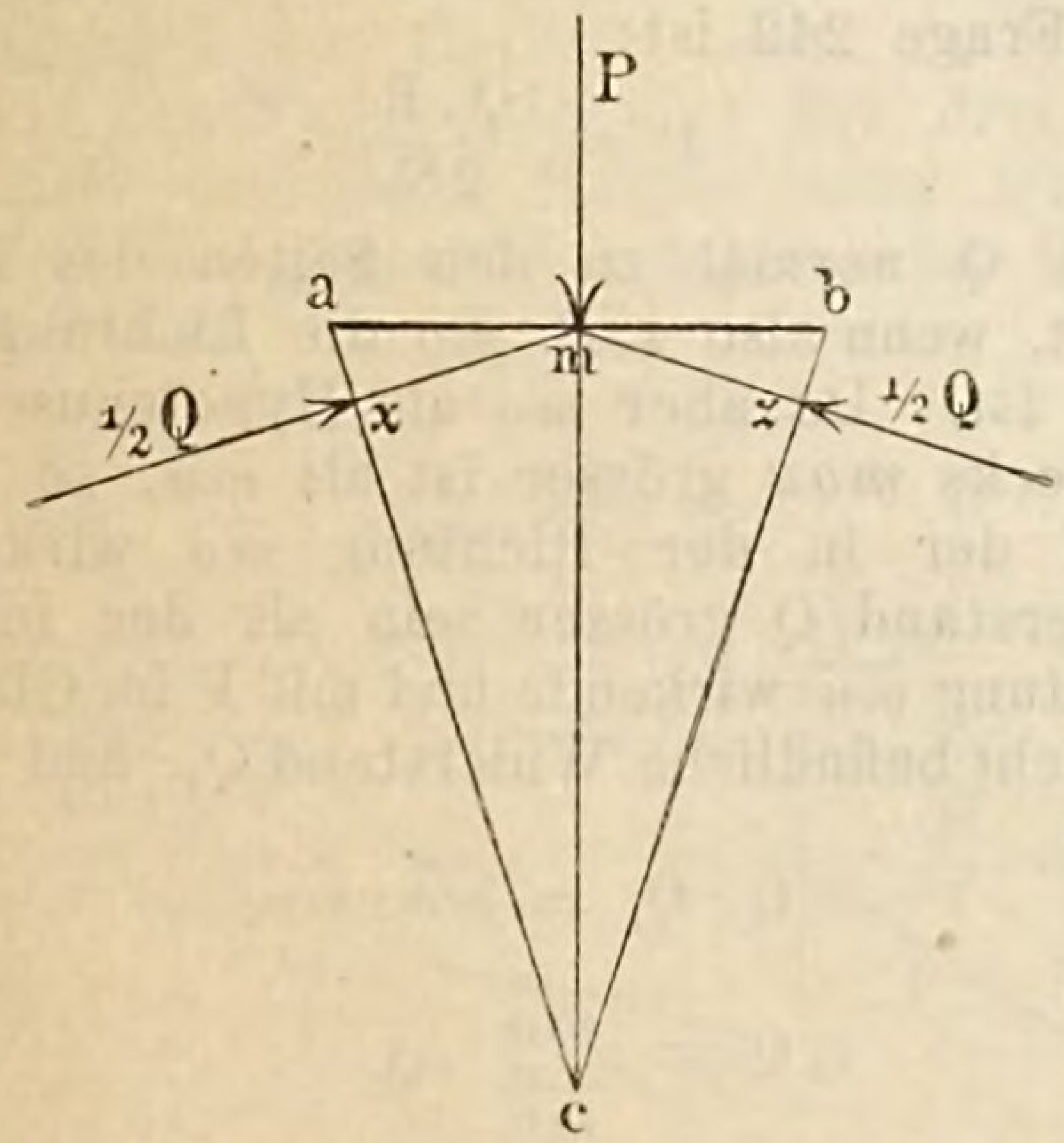
Kräfte durch drei Lote $\overline{ao}$, $\overline{bo}$, $\overline{co}$ (siehe Fig. 351) ausdrücken, welche sich für den Zustand des Gleichgewichts aber in einem Punkt schneiden müssen, weil sonst eine Drehung erfolgt. Weil aber für den Zustand des Gleichgewichts die erforderlichen Kräfte den Dreiecksseiten (oder Keilflächen) proportional sind, so folgt zugleich, dass die Wirkung eines Druckes oder Stosses gegen den Kopf eines Keils unendlich wird, wenn die Fläche dieses Kopfes verschwindet.

Frage 243. Was versteht man unter einem a) einfachen, b) doppelten Keil und was ist über den Gleichgewichtszustand beider zu bemerken?

Figur 352.



Figur 353.



Erkl. 266. Ohne das Gesetz der schiefen Ebene lässt sich der Beweis auch folgendermassen führen:

Ist der Keil durch die Kraft P um den Weg mc (s. Fig. 353) in ein Hindernis eingedrungen, so ist (da jede mechanische Arbeit gemessen wird durch das Produkt aus der aufgewandten Kraft in den zurückgelegten Weg) die Leistung der Kraft $= P \,.\, mc$. Dabei ist jederseits der halbe Widerstand $= {}^1\!/_2\, Q$ auf dem Weg xm resp. zm überwunden worden, und es muss somit

$$P \,.\, \overline{mc} = \frac{1}{2} Q \,.\, \overline{xm} + \frac{1}{2} Q \,.\, \overline{zm}$$

oder:

Antwort. Der vorerwähnte Keil mit gleichschenkligem Querschnitt wird auch doppelter Keil genannt, weil derselbe angesehen werden kann als aus zwei mit ihren Grundflächen zusammengelegten geneigten Ebenen bestehend, während man denjenigen Keil, der gewöhnlich zum Heben von Lasten Anwendung findet, und dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ist, einfachen Keil nennt. Wird ein solcher Keil (siehe Fig. 352) gegen die zu hebende Last bewegt, so wirkt die Gesamtkraft P auf den Rücken $\overline{AB}$, die Gesamtlast Q auf die Seite $\overline{AC}$, und es ist nach dem Gesetz der schiefen Ebene demnach Gleichgewicht, wenn

$$P : Q = \overline{AB} : \overline{AC}$$

oder:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad P : Q = R : S$$

d. h. am einfachen Keil ist Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Rücken des Keils zur Seite.

Aus obiger Gleichung 1). folgt, dass

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = Q \cdot \frac{R}{S}$$

Nennen wir aber den Neigungswinkel der schiefen Ebene α, dann ist:

$$\frac{R}{S} = \sin \alpha$$

und also

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = Q \,.\, \sin \alpha$$

Ist aber die Durchschnittsfläche des Keils ein gleichschenkliges Dreieck, so stellt in Figur 352 $\overline{AB}$ nur den halben Rücken $= {}^1\!/_2\, R$ vor, auf welchen auch nur die halbe Kraft $= {}^1\!/_2\, P$ wirkt, um den auf die Seite $\overline{AC}$ wirkenden halben Widerstand ${}^1\!/_2\, Q$ zu bewältigen, und es ist dann:

$$\frac{1}{2} P : \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} R : S$$

oder wie in Antwort auf Frage 242:

oder:
$$P \,.\, \overline{mc} = \frac{1}{2} Q \,(\overline{xm} + \overline{zm})$$
$$P \,.\, \overline{mc} = Q \,.\, \overline{xm}$$

sein. In diese letzte Gleichung lassen sich aber zwei andere Grössen einsetzen, denn:
$$\triangle xmc \backsim \triangle amc$$
und deshalb
$$\overline{xm} : \overline{mc} = \overline{am} : \overline{ac}$$
und demnach:
$$P \,.\, \overline{ac} = Q \,.\, \overline{am}$$
oder:
$$P : Q = \overline{am} : \overline{ac}$$
oder:
$$P : Q = \frac{1}{2} R : S$$

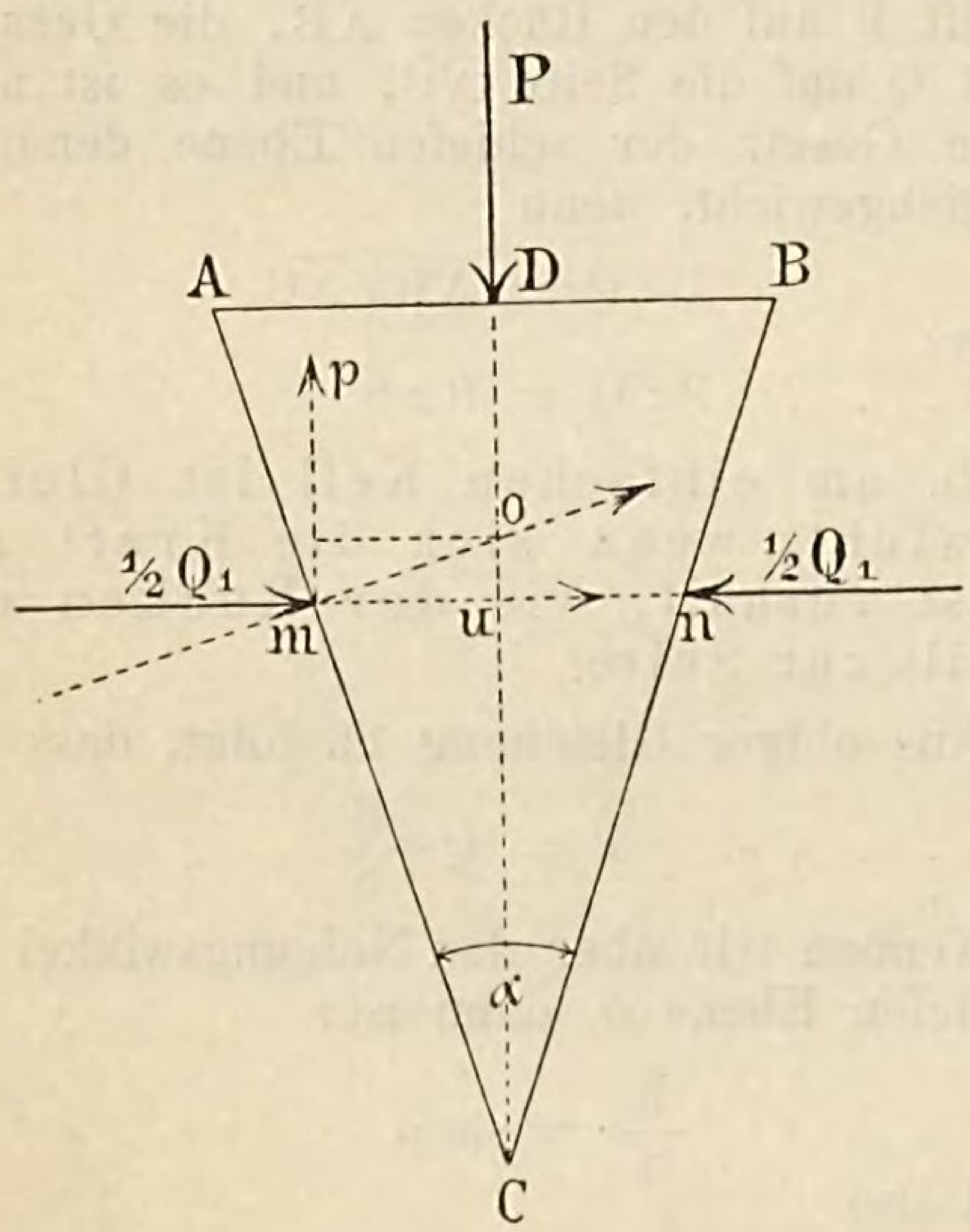
$$4). \;\ldots\; P = \frac{Q \,.\, R}{2\,S} \quad \text{oder} \quad P = Q \cdot \frac{\frac{1}{2} R}{S} \; [1]$$

und wenn der ganze Winkel, welchen die beiden Keilflächen bilden $= \alpha$ heisst, so ist, da
$$\frac{\frac{1}{2} R}{S} = \sin \frac{1}{2} \alpha$$
$$5). \;\ldots\ldots\; P = Q \,.\, \sin \frac{1}{2} \alpha$$

[1] Siehe Erkl. 266.

Frage 244. Wie verhält sich am Keil für den Fall des Gleichgewichts die Kraft P zu dem normal zur Höhe oder parallel zum Rücken des Keils gerichteten Gesamtwiderstand Q?

Figur 354.



Antwort. Wirkt die Last parallel zum Rücken, so verhält sich für den Fall des Gleichgewichts die Kraft zur Last, wie die halbe Rückenlänge zur Mittellinie oder Höhe des Keils.

Beweis. Es seien in Fig. 354 die in den Punkten m und n wirkenden Widerstände von je $\frac{1}{2}Q$ senkrecht zur Höhe $\overline{CD}$ des Keils gerichtet. Nach Gleich. 2). in Antw. auf Frage 242 ist:
$$P = \frac{Q \,.\, R}{2\,S}$$
wenn Q normal zu den Seiten des Keils wirkt, wenn also z. B. $\overline{mo}$ die Richtung von $\frac{1}{2}Q$ ist. Da aber $\overline{mo}$ als Hypotenuse des Dreiecks mou grösser ist als $\overline{mu}$, so wird auch der in der Richtung $\overline{mo}$ wirkende Widerstand Q grösser sein als der in der Richtung $\overline{mu}$ wirkende und mit P im Gleichgewicht befindliche Widerstand Q_1, und zwar wird
$$Q : Q_1 = \overline{mo} : \overline{mu}$$
oder:
$$Q = \frac{\overline{mo}}{\overline{mu}} \cdot Q_1$$
sein. Es ist aber
$$\triangle mou \backsim \triangle ADC$$
daher auch:
$$Q : Q_1 = \overline{AC} : \overline{DC}$$
oder:
$$Q = \frac{Q_1 \,.\, \overline{AC}}{\overline{DC}}$$
oder wenn man $\overline{DC} = H$ setzt:
$$Q = \frac{Q_1 \,.\, S}{H}$$

Setzen wir diesen Wert in die obige Gleichung 2). aus Antwort auf Frage 242, so ist:

Erkl. 267. Zur Kenntnis des Keils und seiner Wirksamkeit genügt das bisher Angegebene vollkommen, da seine Anwendung zwar sehr häufig, aber nie verwickelt ist, selbst nicht bei gewölbten Bogen, deren einzelne Ausschnitte als Keile betrachtet werden. Meistens bedient man sich des gleichschenkligen Keils, und da die Dicke der Keile in der Regel ungleich geringer ist, als ihre Länge, so macht es keinen merklichen Unterschied, ob die Berechnung nach

dem Sinus oder der Tangente angestellt wird. Ueberhaupt aber wird der mechanische Effekt oder Erfolg des Keils selten berechnet, sondern gewöhnlich bringt man denselben nur nach allgemeinen Regeln einer groben Erfahrung in Anwendung. Weit weniger geschieht dieses ferner in der Art, dass drei Kräfte gleichzeitig gegen den Kopf und die beiden Flächen des Keils drücken, als dass gegen ersteren ein Stoss ausgeübt wird, um die Flächen zwischen den Widerstand leistenden Körper zu treiben, und dabei wird dann in der Regel ohne nähere Untersuchung vorausgesetzt, dass die Richtung der drei Kräfte auf diese Flächen lotrecht sei.

$$P = \frac{Q_1 . S}{H} \cdot \frac{R}{2S}$$

oder:

$$1). \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{Q_1 \cdot \frac{1}{2} R}{H}$$

was zu beweisen war.

Da aber

$$\frac{\frac{1}{2} R}{H} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

so ist auch

$$2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = Q_1 . \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

Für den einfachen Keil erhält man in analoger Weise, oder auch nach dem Gesetz der schiefen Ebene:

$$P : Q = R : H$$

oder:

$$3). \quad . \quad . \quad . \quad P = Q \cdot \frac{R}{H}$$

oder, da

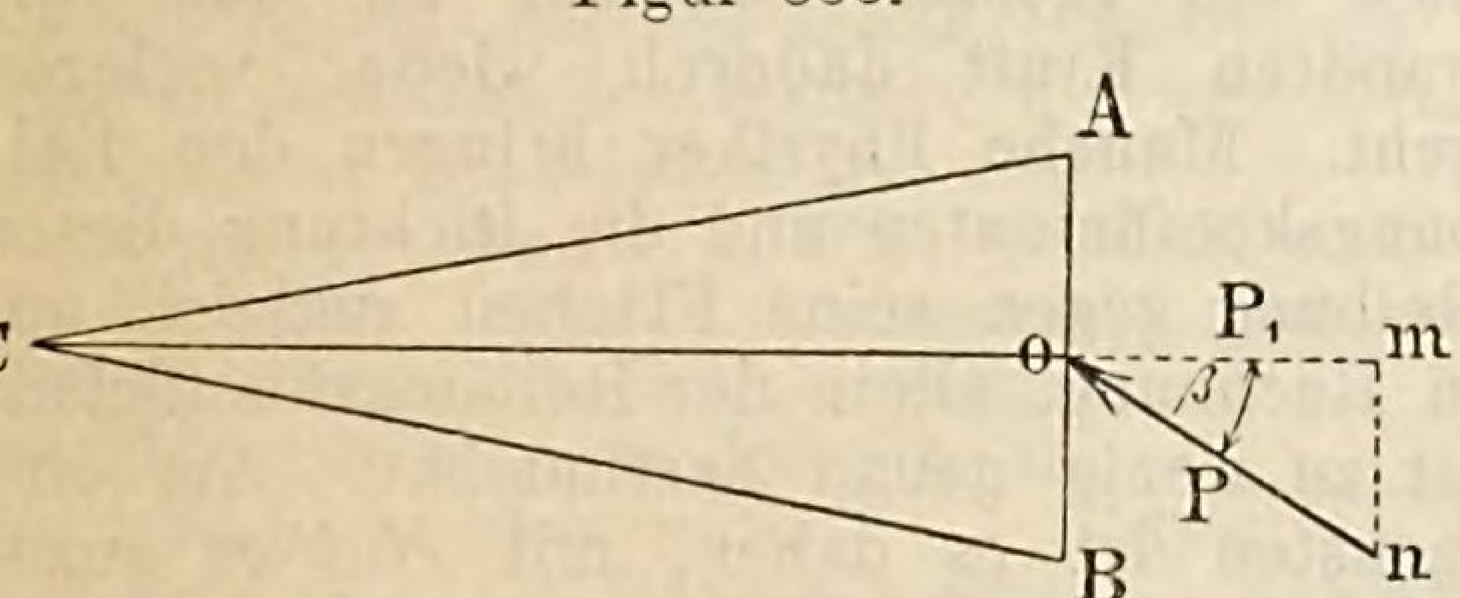
$$\frac{R}{H} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{(siehe Fig. 352)}$$

so ist:

$$P = Q . \operatorname{tg} \alpha$$

Frage 245. Was ist zu thun, um die Bedingungen des Gleichgewichts zu erfahren für den Fall, dass eine der drei auf den Keil wirkenden Kräfte unter irgend einem Winkel gegen die entsprechende Keilfläche wirkt?

Figur 355.



Antwort. Wirkt eine der drei Kräfte am Keil nicht normal, sondern unter irgend einem Winkel gegen die entsprechende Keilfläche, so kann die Kraft bei bekannter Richtung derselben leicht reduziert werden. Wäre z. B. der Keil ABC (siehe Fig. 355) und die Richtung der Kraft $P = \overline{no}$ gegen denselben gegeben, so ist diese als die Diagonale der Komponenten $\overline{om}$ und $\overline{mn}$ zu betrachten, wovon die letztere verschwindet, die erstere aber als thatsächlich wirksam bleibt. Es ist aber $\frac{\overline{om}}{\overline{on}}$ der Kosinus des Neigungswinkels β der Kraft mit der geometrischen Achse $\overline{oc}$ des Keils und folglich ist die reduzierte Kraft

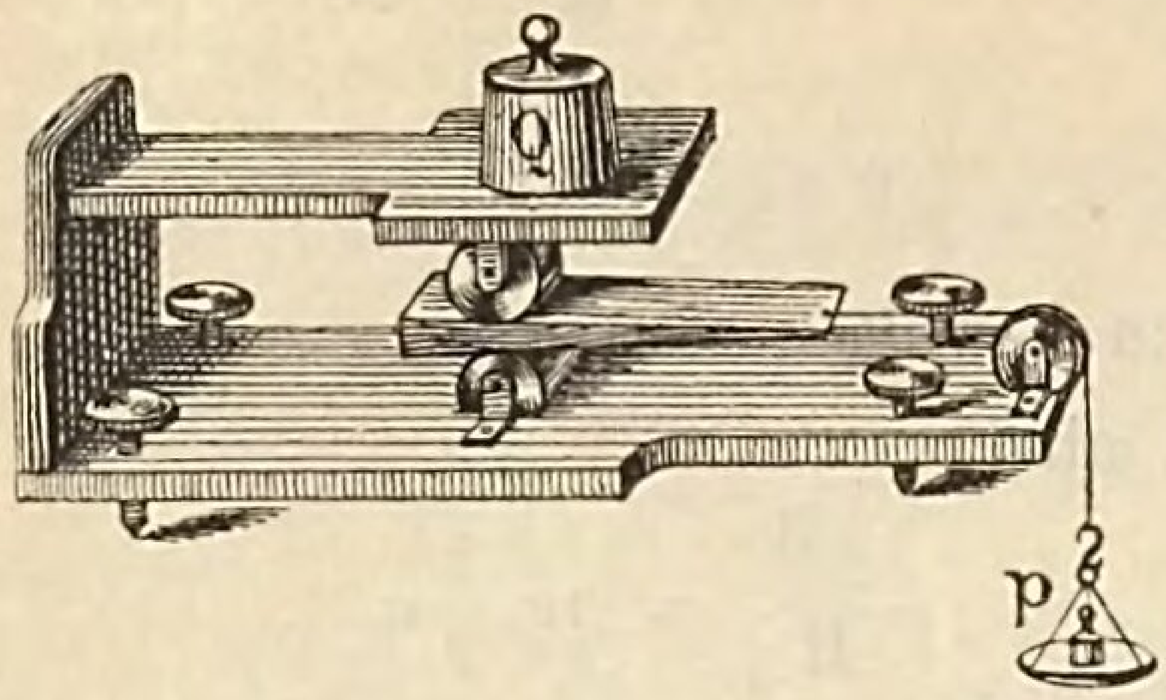
$$P_1 = P . \cos \beta$$

Dasselbe Verfahren genügt auch zur Reduktion der Kräfte, welche in gegebener Richtung gegen die Seitenflächen des Keils wirken.

Frage 246. Wie lässt sich das in Antw. auf Frage 242 gegebene Gesetz des Keils durch Experiment beweisen?

Antwort. Zum Experimentalbeweis des Gesetzes über den Keil benutzt man den

Figur 356.



Erkl. 268. Der in Fig. 356 dargestellte Apparat kostet, von Mahagoniholz gefertigt, mit Messingrollen, Keil und Messingschale an seidener Schnur bei *Leppin & Masche*, Berlin S, M. 15.—.

Apparat Fig. 356 [1]), bei welchem sich ein Keil zwischen zwei Rollen befindet, von denen die untere festliegt, während die obere beweglich ist. Man belastet letztere durch das Gewicht Q und legt in die Zugschale P so lang Gewichte bis sich der Keil zwischen den Rollen hindurchbewegt und somit die Last Q hebt. Man kann dabei mit einer geringen Kraft eine verhältnismässig grosse Last heben, und zwar eine um so grössere, je schmaler der Rücken des Keils im Vergleich zu seiner Länge ist.

[1]) Siehe Erkl. 268.

Frage 247. Was ist über die Bewegungswiderstände bei Anwendung des Keils zu bemerken und warum wendet man denselben trotzdem so vielfach an?

Antwort. Wenn man sich des Keils bedient, z. B. beim Spalten des Holzes und der Steine, oder zum Hinauftreiben von Lasten, so wird er durch die Reibung in dem Spalt festgehalten, woraus schon von selbst folgt, dass diese ausserordentlich stark sein muss. In den meisten Fällen würde er ohne diese fast seine ganze Brauchbarkeit verlieren, wie man unter anderen dann wahrnimmt, wenn seine Flächen zu glatt sind und er bei jedem Schlag auf seinen Kopf wieder zurückspringt. Die starke Reibung ist bei ihm daher notwendig, aber es folgt daraus auch zugleich, dass ein grosser Teil der auf ihn verwandten Kraft dadurch wieder verloren geht. Manche Physiker bringen den Reibungskoefficienten und die Richtung dieser Reibung gegen seine Flächen zugleich mit in Rechnung, allein der Reibungskoefficient ist zu wenig genau bestimmbar. Am einfachsten ist es daher, mit *Hutton* anzunehmen, dass die Reibung gerade so stark ist, als der gegen ihn ausgeübte Druck; denn wäre sie geringer, so würde der vorwärts getriebene Keil bei nachlassender treibender Kraft sich wieder zurückbewegen. In der Regel ist aber die Reibung noch ungleich stärker, als diese angegebene Grösse, denn sonst müsste man einen durch Schlagen hineingetriebenen Keil mit leichter Mühe wieder zurückziehen können. Hiernach muss aber zur Bewegung eines Keils die doppelte Kraft angewandt werden, wenn man Lasten durch ihn heben will, und der durch ihn zu erhaltende mechanische Effekt könnte daher nicht gross sein, wenn der Keil nicht

Erkl. 269. Man benutzt den Keil zum Heben schwerer Lasten; so werden z. B. auf den Werften Keile unter die Schiffe getrieben, um sie zu heben. Wenn sich ein Gebäude gesenkt hat, so treiben die Zimmerleute Keile unter die Balken. Kistendeckel sucht man durch Stemmeisen zu heben und die so gelockerten Nägel entfernt die Zange, deren Kopf aus 2 Keilen besteht. — Um eine sehr grosse Pressung hervorzubringen, benutzt man in den Oelmühlen den Keil in der sogen. Keilpresse, welche aus dem zerriebenen Oelsamen das Oel liefert. — Zum Spalten und Schneiden wendet man den Keil an, indem man ihn mit der scharfen Kante in feste Holz- und Steinmassen treibt. Da eine Kraft um so mehr wirkt, je kleiner der Rücken im Verhältnis zur Seite des Keils ist, so finden wir alle Schneidewerkzeuge, welche mit einer kleinen Kraft meist einen grossen Widerstand überwinden sollen und welche ohne Ausnahme Keile sind mit fast parallelen Seiten an der Schneide versehen. Je schmaler der Rücken eines Messers gegen die Seiten ist, um so besser schneidet es, und Rasiermesser werden aus diesem Grunde hohl geschliffen. Alle Aexte, Beile, Meissel, Stemmeisen, Messer, Scheren, Hobel, Hacken, Spaten, Pflugschare, Pfriemen, Grabstichel, Säbel, Sporen und Bajonette sind Keile; kurz alles, was schneidet, reisst oder sticht. Die Zähne der Egge, der Feile, der Harke, der Säge etc. sind keilförmig, und auch unsere eigenen Schneide- und Eckzähne bilden Keile. Schiffe und Vögel haben vorn schmale Kiele, um die Widerstände des Wassers und der Luft leichter überwinden zu können. — Endlich wirkt der Keil als Befestigungsmittel, in Form von Nägeln, Nadeln, den Zinken der Gabel u. s. w.

Kork- und Gummipfropfen sind runde elastische Keile und auch die Wirbel der Saiteninstrumente sind Keile, bei denen die Reibung die Spannkraft der Saite überwinden soll. Auch die Gewölbesteine kann man als Keile mit abgestumpfter Schneide betrachten, deren jeder vermöge seiner Schwere zwischen die benachbarten eindringt und indem er sie zu trennen sucht, äussert er einen Druck auf sie, der, von ihnen vermehrt, auf die zur Seite anstossenden übertragen wird, bis er endlich senkrecht auf den Erdboden wirkt und hier in dem Widerstand desselben seinen Rückhalt findet. Maschinenräder werden auf ihren Wellen häufig durch Keile befestigt; Holzkeile dienen zum Aneinanderpressen der Lettern, zum Befestigen des Hobeleisens und zum Feststellen der Masten. Auch die Wurzeln der Pflanzen dringen keilförmig in das Erdreich. — Um Teile von Messinstrumenten um sehr wenig zu verschieben, gebraucht man den Messkeil.

Als eine Verbindung verschiedenartiger mechanischer Potenzen oder Elementarmaschinen, bei welchen auch der Keil vertreten ist, möge hier noch die Keilpresse erwähnt werden. Dieselbe besteht, wie Fig. 357 zeigt, aus einem Wellrad BC, zwei einarmigen Hebeln DF und EF_1, zwei Keilen JL und J^1L^1 und mehreren festen Rollen.

Durch die Kurbel AB wird die Welle C in Bewegung gesetzt, um welche sich ein um die feste Rolle D geschlungenes Seil, das in E befestigt ist, aufwindet Durch das Seil CDE wird in D und E auf die in H und H^1 gestützten Hebel DH und EH^1 gewirkt. Diese Hebel drücken in F und F^1 auf die Keile JL und J^1L^1. Durch diese Keile wird die Pressplatte MN aufwärts und die Platte OR abwärts getrieben, wodurch auf die zwischen diesen Platten und den festen Hindernissen V und W befindlichen Gegenstände X und Y ein bedeutender Druck ausgeübt wird.

Vermittelst der in J, M, O, J^1, N und R angebrachten festen Rollen erreicht man den Zweck, dass die beim Uebereinandergleiten eintretende Reibung bedeutend vermindert wird.

Nennt man die an der Kurbel AB wirkende Kraft P, und setzt man den Radius der Welle $C = r$, den Rücken der Keile JL und $J^1L^1 = r^1$ und die Seitenlänge dieser Keile $= s$, so hat man, da HG senkrecht auf die Richtung des Seiles genommen, den Hebelarm des Druckes in D, und HJ den Hebelarm des Druckes in F auf den Keil JL vorstellt, nach früherem. wenn Q den von dem Keil JL den Platten MN und OR mitgeteilten Druck bedeutet:

$$P . AB . HG . s = Q . r . HJ . r^1$$

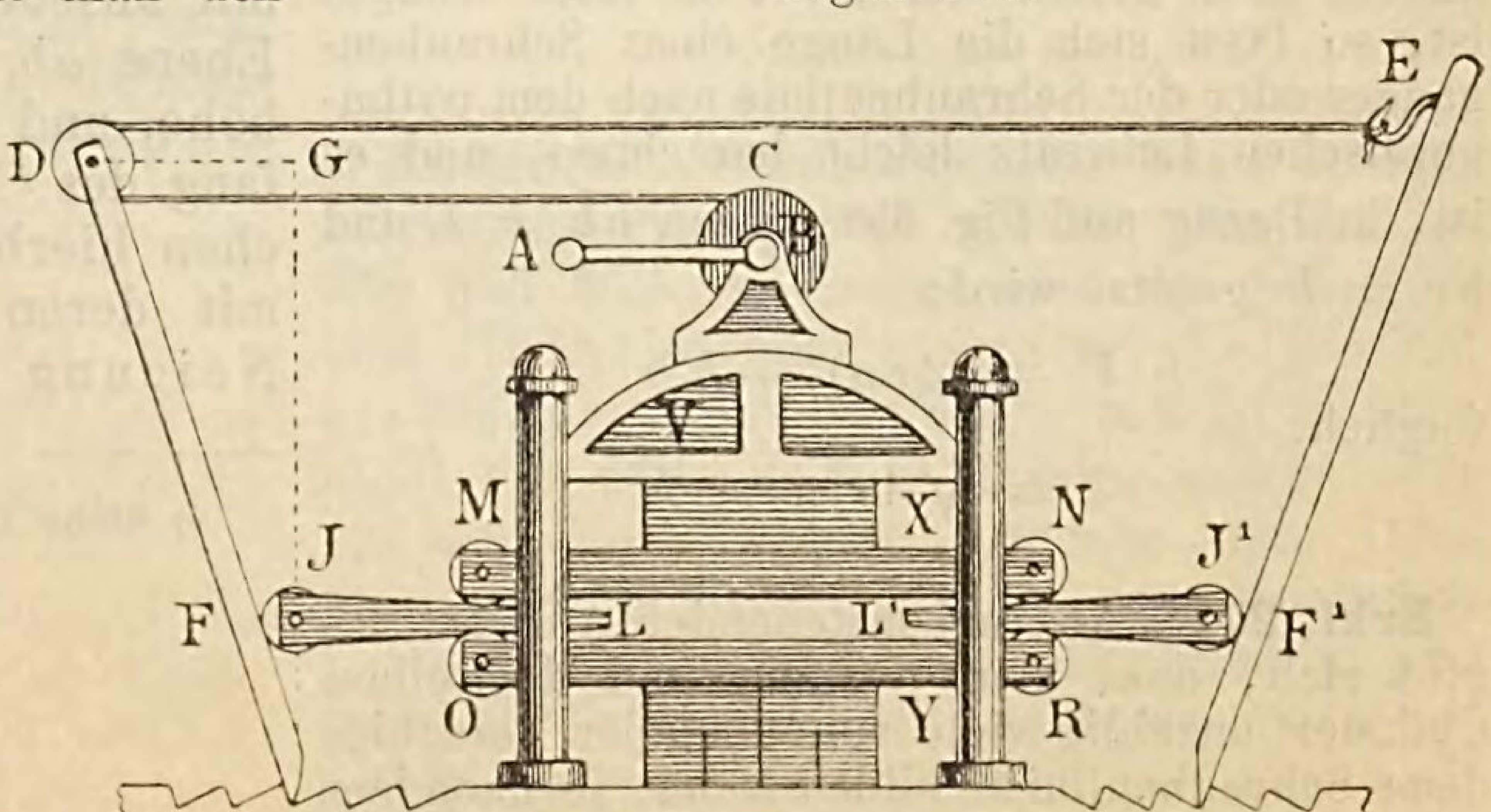
folglich:

zugleich den Vorteil gewährte, dass er durch den Stoss oder Schlag getrieben wird, was bei keiner sonstigen einfachen Maschine der Fall ist.

Da nun die Wirkung eines stossenden oder schlagenden Körpers, z. B. eines geschwungenen Hammers etc., wie das Quadrat der Geschwindigkeit multipliziert mit der Masse des stossenden Körpers wächst (wie im Lehrb. vom „Stoss“ gezeigt wird) und durch diese beiden Faktoren ein grosser Effekt zu erreichen ist, so ist eine solche Maschine in allen Fällen willkommen, wo man eine Kraft auf jene Weise anwenden kann. Die Erfahrung lehrt, dass durch schwere Hämmer von 4 bis 6 kg Gewicht starke eiserne Keile zerschlagen werden, und *Hutton* sagt daher mit Recht, dass das schwerste Schiff vermittelst eines unter dasselbe getriebenen Keils gehoben werden kann.

Bisher ist unter dem Widerstand, welchen der Keil zu überwinden hat, nur der Druck gegen seine Seiten verstanden worden. In der praktischen Anwendung hat jedoch die Schärfe des Keils oft ein widerstehendes Hindernis zu durchschneiden, welches einen desto grösseren Aufwand von Kraft erfordert, je härter der zu trennende Körper und je stumpfer die Schneide des Keils ist. In allen Fällen ist daher der mechanische Effekt des Keils um so grösser, je geringer seine Höhe im Verhältnis zu seiner Länge und je feiner seine Schneide ist, jedoch lässt sich beides nicht so weit treiben, dass der Keil die erforderliche Stärke verliert.

Figur 257.



$$Q = \frac{AB \cdot HG \cdot s}{r \cdot r^1 \cdot HJ} \cdot P$$

wobei auf Bewegungshindernisse noch keine Rücksicht genommen ist.

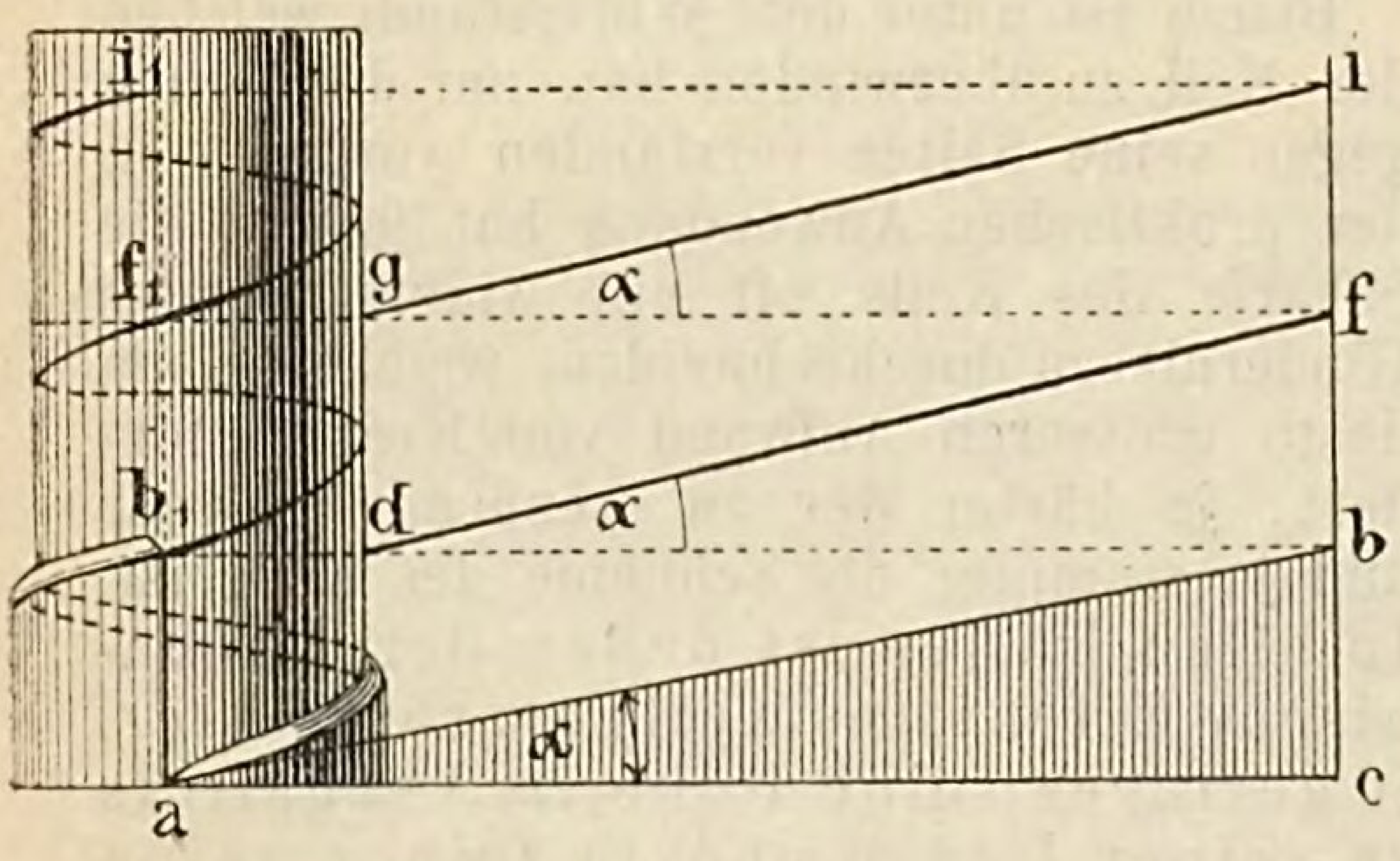
Den gleichen Druck teilt aber auch der Keil J^1L^1 den Platten MN und OR mit. Folglich erleiden die Körper X und Y, da man MN und OR als feste, unbiegsame Körper und die Richtung der beiden Drücke nahezu als parallel annehmen kann, einen Druck = 2 Q; d. i. einen

$$\text{Gesamtdruck} = 2 \cdot \frac{AB \cdot HG \cdot s}{r \cdot r^1 \cdot HJ} \cdot P$$

γ). Von der Schraube und ihrer Anwendung.

Frage 248. Wie entsteht eine Schraubenlinie und als was kann man dieselbe ansehen?

Figur 358.



Antwort. Wickelt man ein aus starkem Papier oder aus einer dicken Kautschukplatte geschnittenes rechtwinkliges Dreieck so um irgend einen geraden Cylinder (etwa um einen Bleistift oder eine Glasröhre) herum, dass die eine Kathete $\overline{ac}$ (siehe Fig. 358) mit dem Umfang der Grundfläche zusammenfällt, so bildet die Hypotenuse $\overline{ab}$ eine den Cylinder umwindende schräg ansteigende krumme Linie, die man Schraubenlinie[1]) nennt. Hat man hierbei die Kathete ac genau so gross genommen, wie den Umfang des Cylinders, so kommt der höchste Punkt b_1 des Dreiecks genau über den Punkt a zu liegen, und die senkrechte Entfernung $\overline{ab_1}$ dieser beiden Punkte bezeichnet man als Gewinde- oder Ganghöhe, während der zwischen diesen Schnittpunkten liegende Teil der Schraubenlinie eine Schraubenwindung oder ein Schraubengang heisst. Letzteren kann man somit ansehen als die Länge einer schiefen Ebene $\overline{ab}$, deren Höhe $\overline{bc}$ gleich der Ganghöhe, und deren Basis $\overline{ac}$ gleich dem Umfang des Cylinders ist. Der Winkel α, welchen hierbei die Länge der schiefen Ebene mit deren Basis einschliesst, heisst die Neigung der Schraubenlinie.

Erkl. 270 Da nach nebenstehender Antwort die Schraubenlinie die Hypontenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete gleich dem Spindelumfang, also $= 2r\pi$, die andere aber gleich der Höhe h eines Ganges ist, so lässt sich die Länge eines Schraubenganges oder der Schraubenlinie nach dem pythagoräischen Lehrsatz leicht berechnen, und es ist, in Bezug auf Fig. 358, wenn $\overline{ab} = l$ und $\overline{bc} = h$ gesetzt wird:

$$l^2 = (2r\pi)^2 + h^2$$

folglich:

$$l = \sqrt{4r^2\pi^2 + h^2}$$

Erkl. 271. Aus nebenstehender Antwort ergibt sich, dass man auf ein und demselben Cylinder unzählig viele von einander verschiedene Schraubenlinien bilden kann, je nachdem man in dem erzeugenden Dreieck abc die Höhe $\overline{bc}$ kleiner oder grösser nimmt.

Stellt man mehrere schiefe Ebenen acb, dbf etc. auf einander, so, dass die Basis $\overline{bd}$ da anfängt, wo die erste schiefe Ebene $\overline{ab}$ endigt,

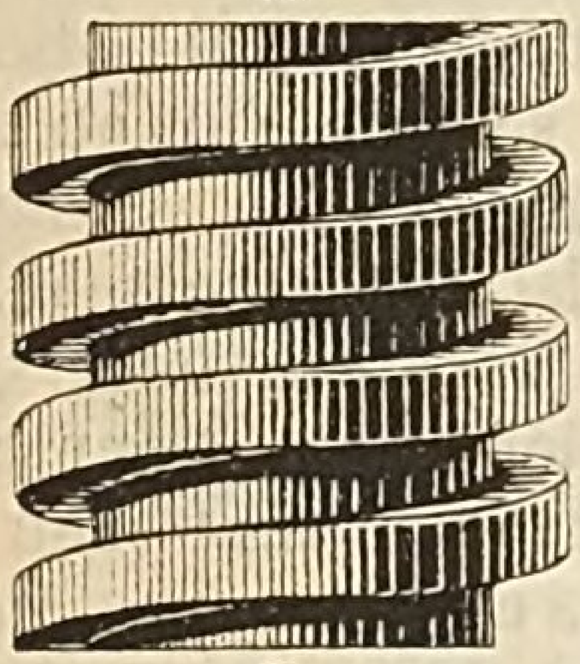
[1]) Siehe Erkl. 270.

so entstehen durch die Aufwickelung dieses Systems um den Cylinder ebenso viele völlig gleiche Schraubenlinien oder Gänge als schiefe Ebenen vorhanden sind, welche einzeln genau aneinanderschliessen und in ihrer Gesamtheit eine einzige ununterbrochene oder kontinuierliche Schraubenlinie von mehreren Gängen oder ein Schraubengewinde bilden; der Cylinder wird hierdurch zur Schraubenspindel und das Ganze zur Schraube.

Frage 249. Aus wievielen und welchen Teilen besteht jede Schraube?

Figur 359.

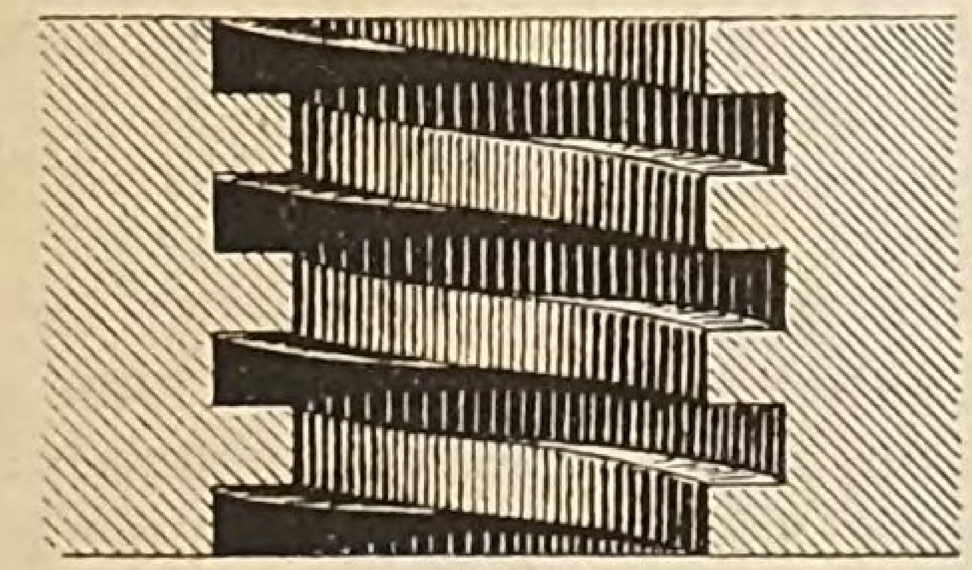
A



B

Figur 360.

C



D

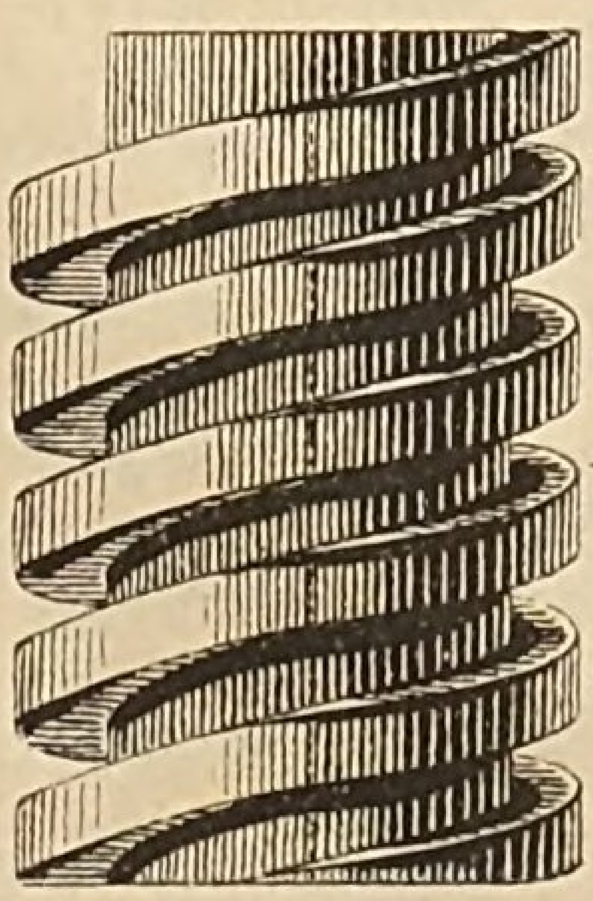
Antwort. Jede Schraube besteht aus zwei Teilen, welche in ihrer Anwendung stets zusammenwirken müssen, nämlich aus Schraubenspindel und Schraubenmutter.

Die Schraubenspindel AB (siehe Fig. 359) oder die eigentliche Schraube, auch Kern der Schraube genannt, ist ein Cylinder, auf welchem sich eine in einer Schraubenlinie umlaufende Erhöhung das Gewinde befindet. Die Schraubenmutter CD (siehe Fig. 360) bildet die zur Schraubenspindel möglichst genau passende Hohlform, also einen Hohlcylinder, in welchen die Schraubengänge an der Innenseite als Vertiefungen so eingeschnitten sind, dass die erhabenen Gänge der Spindel AB genau in dieselben passen.

Zu jeder Schrauhenspindel gehört allemal eine Schraubenmutter, welche entweder fest ist, so dass die Schraubenspindel durch Drehung um ihre Achse sich in die Mutter hineinschraubt oder die letztere um die feste Spindel beweglich ist. Beide zusammen bilden dann einen Schraubensatz.

Frage 250. Was versteht man unter ein-, zwei- und mehrgängigen Schrauben, sowie unter scharf- und flachgängigen Schrauben?

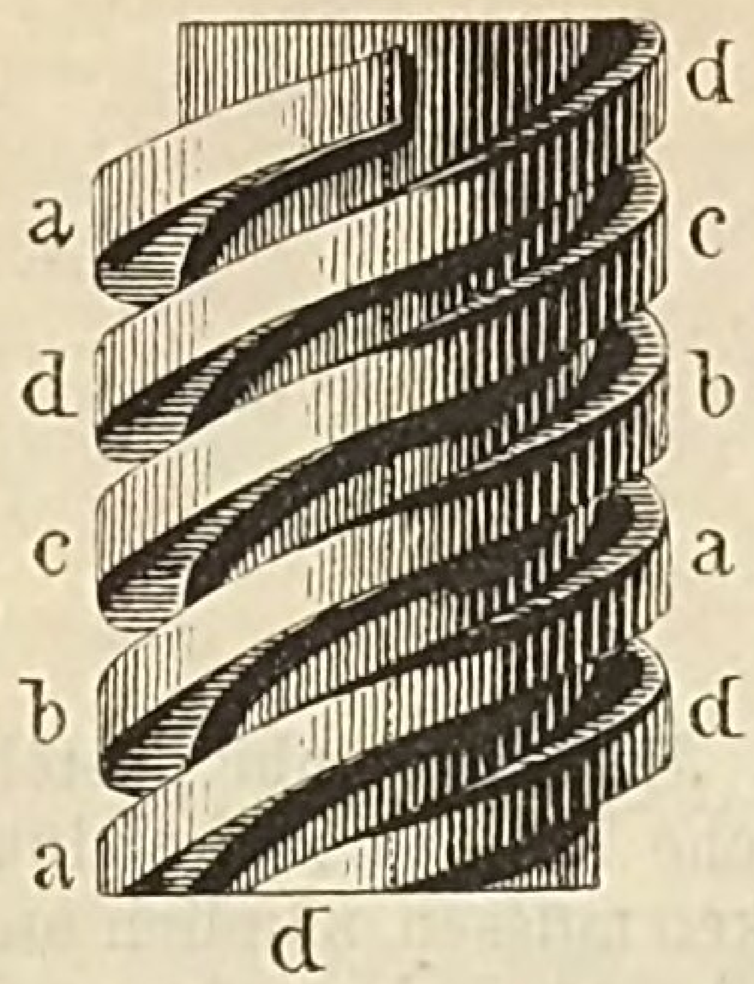
Figur 361.



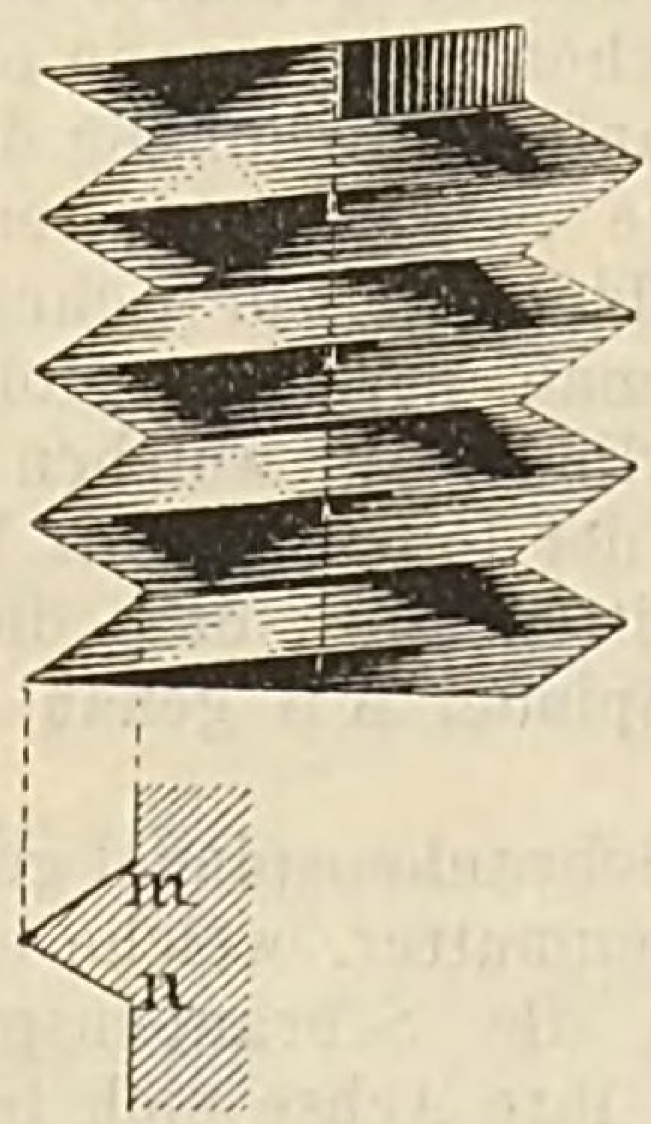
Antwort. Wenn sich nur eine schiefe Ebene um die Spindel windet, wie in Fig. 358 und 359, so nennt man die Schraube eine einfache oder eingängige. Bei den praktisch verwendeten Schrauben ist es aber nicht nur eine schiefe Ebene, welche sich um den Kern windet, sondern man lässt zwei oder mehrere von einander unabhängige, aber untereinander völlig gleiche und parallele Schraubenlinien um ein und denselben Cylinder herumlaufen, und erhält so zwei- oder mehrgängige Schrauben.

Fig. 361 zeigt eine zweigängige Schraube mit den Gewinden *aa* und *bb*, und Fig. 362 zeigt eine viergängige Schraube mit den Gewinden *aa*, *bb*, *cc*, *dd*. Hierbei besitzen

Figur 362.



Figur 363.



Erkl. 272. Da die Gewinde die ganze Oberfläche der Spindel und ebenso die ganze Innenfläche der Mutter bedecken, so ist die Wirkung der Schraube eine ununterbrochene, ohne dass hierdurch die Reibung vergrössert wird (denn die Reibung ist von der Grösse der Berührungsflächen unabhängig, wie im Lehrbuch von den Bewegungshindernissen dargethan wird). Die Form des Gewindes ist für die Benutzung der Schraube von Wichtigkeit; da nämlich bei scharfgängigen Schrauben die Reibung grösser ist als bei flachgängigen, so werden erstere besonders als Befestigungsschrauben, letztere besonders als Bewegungsschrauben angewendet. Bei beiden ist für die bessere Wirksamkeit erforderlich, dass der umgewundene Körper durchaus gleichmässig gestaltet sei und in jedem einzelnen Punkt eine gleiche Neigung gegen eine auf die Achse der Spindel normale Ebene habe. Auf diesen Bedingungen, sowie auf dem gehörigen Verhältnis der Dicke des umgewundenen Körpers zu dem Durchmesser der Spindel und der zu hebenden Last und endlich auf der Dauerhaftigkeit des Materials beruht die Güte und der Wert der Schraube.

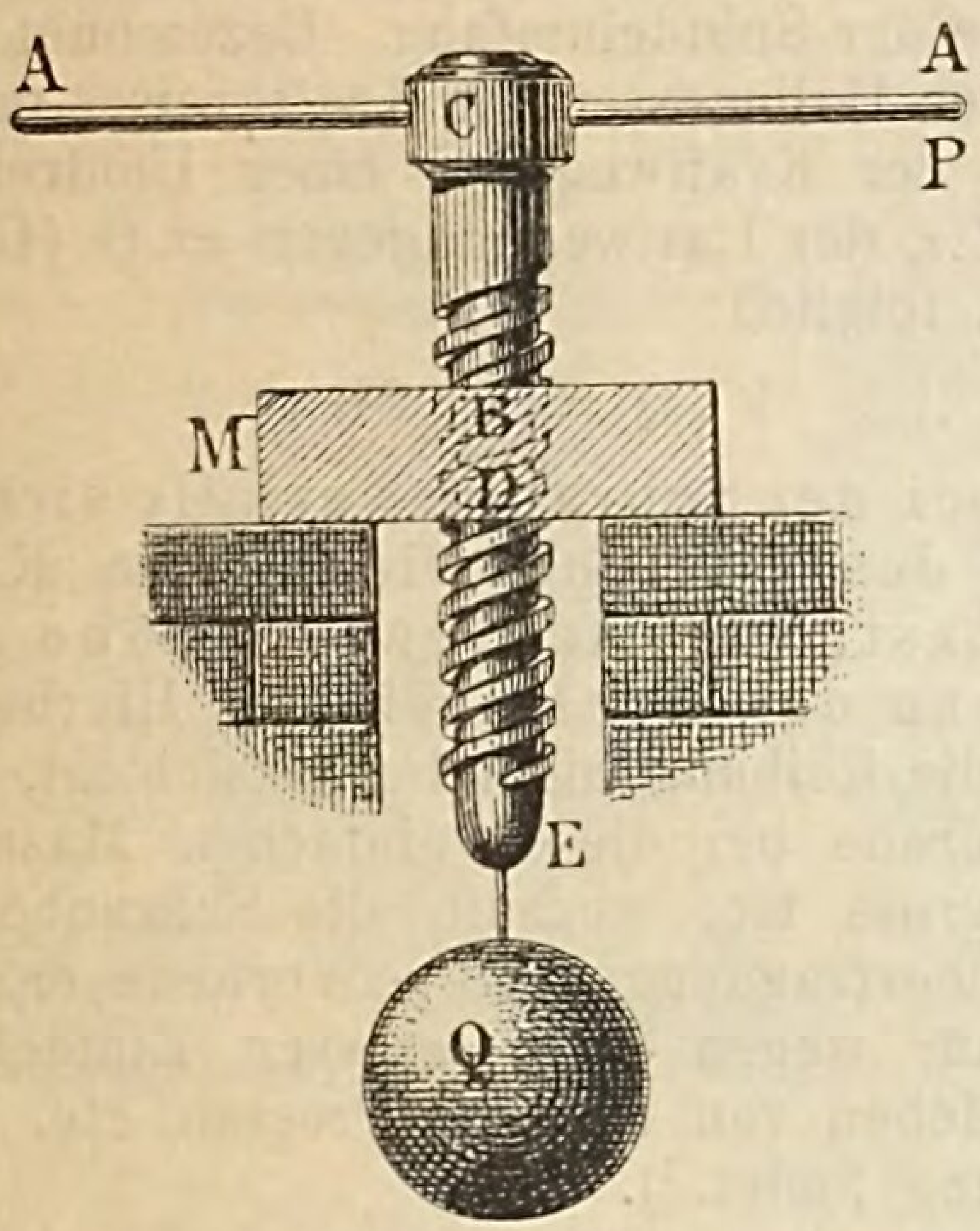
die schiefen Ebenen eine solche Länge, dass sich ihre Umwindungen öfter wiederholen, und endlich sind eigentlich nicht schiefe Ebenen mit ihrer ganzen massiven Unterlage, sondern nur die der Länge oder Hypotenuse entsprechenden Streifen um den Kern der Spindel gewunden. Sind hierbei die über den Kern vorstehenden Streifen oder Gänge im Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck, welches mit seiner Grundlinie mn, Fig. 363, auf dem Kern aufsitzt, so heisst die Schraube scharfgängig. Häufig wird die Spitze des Dreiecks weggeschnitten und zwar entweder mit einer Ebene, wodurch man trapezförmige Gänge erhält, oder man macht runde Gänge, d. h. man rundet sowohl die obere Spitze als auch die scharfe Furche ab, in welcher die Seitenflächen der Gänge den Kern schneiden. Ist der Querschnitt der Gänge dagegen ein Rechteck oder Quadrat, siehe Fig. 364, welches mit einer Seite auf dem Kern aufsitzt, so nennt man die Schraube eine flachgängige. Die in den Figuren 359, 361 und 362 dargestellten Schrauben sind flachgängige.

Figur 364.



Frage 251. Durch welche Betrachtung gelangt man zu dem Gesetz des Gleichgewichts an der Schraube, und wie lautet dasselbe?

Figur 365.



Erkl. 273. Aus nebenstehender Antwort folgt, dass man die Kraft der Schrauben zunehmend erhöhen kann, wenn man den Umfang der Spindel vergrössert und die Höhe der Schraubengänge vermindert. Beides hat aber in der praktischen Anwendung seine Grenzen, denn wenn man wegen der Festigkeit des Materials die Schrauben von Metall verfertigt, so werden sie durch grösseren Umfang der Schraubenspindel leicht zu schwer, zu mühsam zu schneiden und zugleich zu kostspielig. Die Höhe der Schraubengänge darf aber unter ein gewisses Minimum nicht herabsinken, welches durch die Haltbarkeit derselben gegeben wird. Es müssen nämlich die Zwischenräume zwischen den Schraubengängen auf gleiche Weise vertieft sein, als die Schraubengänge selbst erhaben sind, und wenn daher z. B. 100 Windungen auf 1 cm Länge kommen, wie bei den feinen, zum genauen Messen der kleinsten Abstände bestimmten Mikrometerschrauben, so beträgt die Dicke des dreikantigen Schraubenganges in der Mitte nur

$$\frac{10}{2.100} = \frac{1}{20}$$

Millimeter, und kann nicht wohl vermindert werden, wenn selbst der feinste Stahl noch genügende Haltbarkeit behalten soll.

Erkl. 274. Eine gut geschnittene Schraube muss nach dem Eingreifen von 3—4 Gängen nicht mehr schlottern, und sich dann mit stets nahezu unverändertem Widerstand durch mässigen Kraftaufwand weiter schrauben lassen, so lange sie noch keine Last zu überwinden hat. Allein meistens widerstehen dieselben der umdrehenden Kraft selbst bei keiner zu hebenden Last bedeutend.

Dreht man eine Schraube mit scharfem Ge-

Antwort. Bringen wir die Spindel mit ihren Windungen in diejenige der Mutter (siehe Fig. 365), so wird die Spindel mit ihrem ganzen Gewicht und einer noch etwa an derselben hängenden Last Q auf die schiefe Ebene der Schraubenmutter drücken, und wenn keine Reibung vorhanden wäre, drehend hinabgleiten.

Nehmen wir nun an, dass die an der Spindel wirkende Last Q gehoben werden soll, oder dass umgekehrt ein Abwärtsbewegen der Spindel und damit ein Zusammenpressen darunter befindlicher Gegenstände erfolgen soll, so muss in jedem Fall eine Kraft P vorhanden sein, welche am Umfang der Spindel in der Richtung ihres Halbmessers, also wagerecht wirkt. Alsdann wirken aber Last und Kraft gerade so auf die schiefe Ebene der Schraubenmutter wie in dem zweiten Fall der Lehre von der schiefen Ebene, d. h. die Kraft wirkt wagerecht oder parallel der Basis, und es wird also, wenn von der grossen Reibung abgesehen wird, bei der Schraube Gleichgewicht vorhanden sein, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben, d. h. wie die Gewindehöhe zum Umfang der Spindel. Denkt man sich die Spindel einmal umgedreht, so ist der Kraftweg gleich dem Spindelumfang, der Lastweg gleich der Ganghöhe, und auch hieraus folgt:

1). $P : Q = G : U$

oder da der Umfang U der Spindel bei dem Halbmesser r:

$$U = 2r\pi$$

ist, so ist, wenn G die Ganghöhe bezeichnet:

2). $P : Q = G : 2r\pi$

oder:

$$P = Q \cdot \frac{G}{2r\pi}$$

Nennt man aber den Neigungswinkel der Schraubengänge $= \alpha$, so ist:

$$\frac{G}{U} \text{ oder } \frac{G}{2r\pi} = \operatorname{tg} \alpha$$

und also auch:

3). $P = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$

Man lässt aber die Kraft niemals direkt an der Spindel angreifen, sondern am Umfang eines Schraubenkopfs von grösserem Durchmesser, oder am Ende einer Kurbel oder einer durch den Schraubenbolzen gesteckten Hebelstange ACA (siehe Fig. 365)

winde in Holz hinein, so übt dieselbe einen so starken Druck in der Richtung der Achse aus, dass sie die Festigkeit des Holzes überwindet; ebenso gross ist aber auch der Widerstand oder Gegendruck des Holzes. Weil demnach die Windungen und das Holz sich fest gegeneinander pressen, so entsteht eine so grosse Reibung, dass die Windungen im Innern des Holzes fest bleiben, dass demnach die Schraube sich ihre Muttergänge erst selbst erzeugt. Zu diesem Zwecke erhalten derartige Schrauben (sog. Holzschrauben) ein sehr scharfes Gewinde mit dünnen, tiefen, scharfrandigen und weit auseinander liegenden Gängen, damit sie den Widerstand des Körpers, in den sie eingeschraubt werden, leichter überwinden, wozu noch der Umstand beiträgt, dass dieselben nach der Spitze hin sich kegelförmig verjüngen.

Soll eine Schraube beim Nachlassen der bewegenden Kraft von selbst zurückgehen, so muss die Mutter derselben in Metall geschnitten und die Höhe der Schraubengänge so gross sein, dass die Last von selbst auf der geneigten Ebene herabgleitet. Da aber die Reibung die Anwendung von mehr als der ganzen Kraft erfordert, oder diese um mehr als das doppelte vergrössert, so folgt hieraus, dass ein doppeltes Schraubengewinde hierzu nicht mehr genügt. Man gibt also solchen Schrauben, z. B. bei den Papier- und Münzpressen, ein drei- und vierfaches flachgängiges Gewinde.

Erkl. 275. Das in nebenstehender Relation 4). ausgedrückte Verhältnis bleibt offenbar auch dasselbe, wenn sich anstatt der Spindel die Mutter um die feststehende Spindel dreht. Da die Schraube nur selten zum wirklichen Heben der Last Q verwendet wird, so muss man in andern Fällen unter Q die Stärke des Druckes oder der Pressung verstehen, welche durch Umdrehung der Spindel oder Mutter hervorgebracht wird. Ist die Schraube mehrgängig, so hat man unter G die Höhe zu verstehen, um welche die Spindel bei einer ganzen Umdrehung aus der Mutter heraussteigt, also bei einer zweifachen die Höhe von zwei Gewinden.

Die obige Relation 4). gibt hier unmittelbar den bei allen Maschinen nachweisbaren Satz von

$$S : s = Q : P \quad \text{oder} \quad PS = Qs$$

nach welchem nämlich die Kraft in ihren Weg multipliziert, dem Produkt aus der Last in den von ihr gleichzeitig zurückgelegten Weg gleich sein muss.

Uebrigens ist noch zu bemerken, dass das nebenstehende Gesetz ungeändert bleibt, man mag der Schraubenmutter nur ein eiziges, oder zur Verteilung der Last, wie es immer geschieht, mehrere Gewinde geben; enthält diese z. B. ihrer Höhe und Dicke nach zwei Schraubengänge, so kommt auf jeden derselben die Last $^1/_2$Q, zu deren Überwindung allerdings nur die halbe Kraft oder $^1/_2$P notwendig ist; da aber dieser Widerstand zweimal vorkommt, so ist dazu auch $^1/_2$P zweimal nötig, was wieder die Kraft P gibt, und so auch in den übrigen Fällen.

so, dass die Schraube zugleich als ein Rad an der Welle erscheint. Dadurch wird der Weg der Kraft und somit ihre Wirkung um so viel grösser, als der Umfang des von der Kraft beschriebenen Kreises grösser ist wie der Spindelumfang. Bezeichnet man nun den Halbmesser des Kraftkreises mit R, so ist der Kraftweg bei einer Umdrehung $= 2R\pi$, der Lastweg dagegen $=$ G (Ganghöhe), folglich:

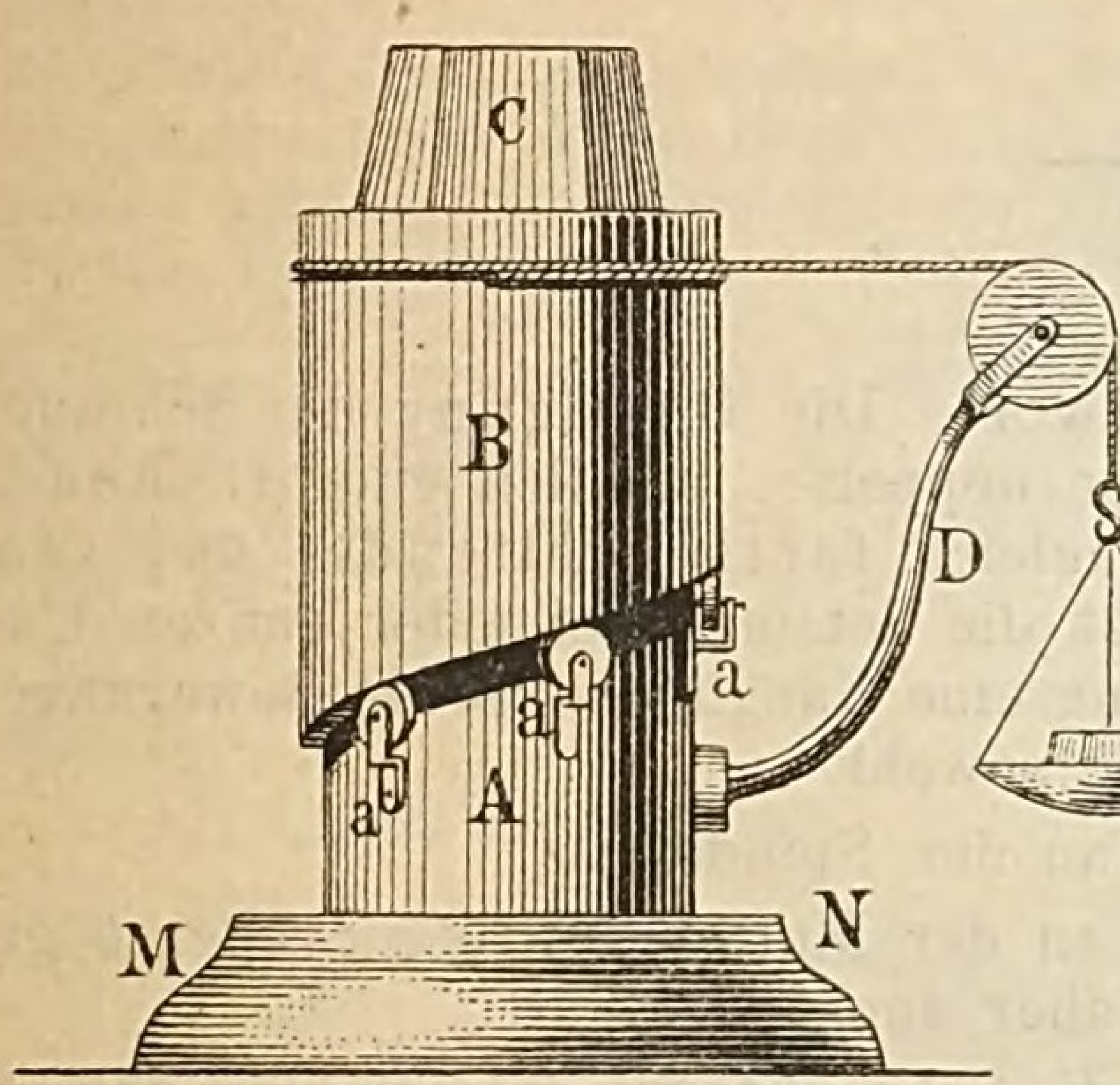
$$4). \quad \ldots \quad P : Q = G : 2R\pi$$

d. h. bei der Schraube verhält sich im Fall des Gleichgewichts die Kraft zur Last, wie die Gewindehöhe zum Umfang des Kraftkreises. Hierbei ist aber die Reibung nicht berücksichtigt, welche gerade bei dieser einfachen Maschine sehr gross ist, weshalb die Schraube bei Kraftübertragungen grosse Verluste erzeugt und nur wegen ihrer grossen Einfachheit zum Heben von Lasten, Pressen etc. Verwendung findet.[1]).

[1]) Siehe Erkl. 274.

Frage 252. Mit Hilfe welches Apparates lässt sich die Wirkung der Schraube auf experimentellem Weg zeigen?

Figur 366.

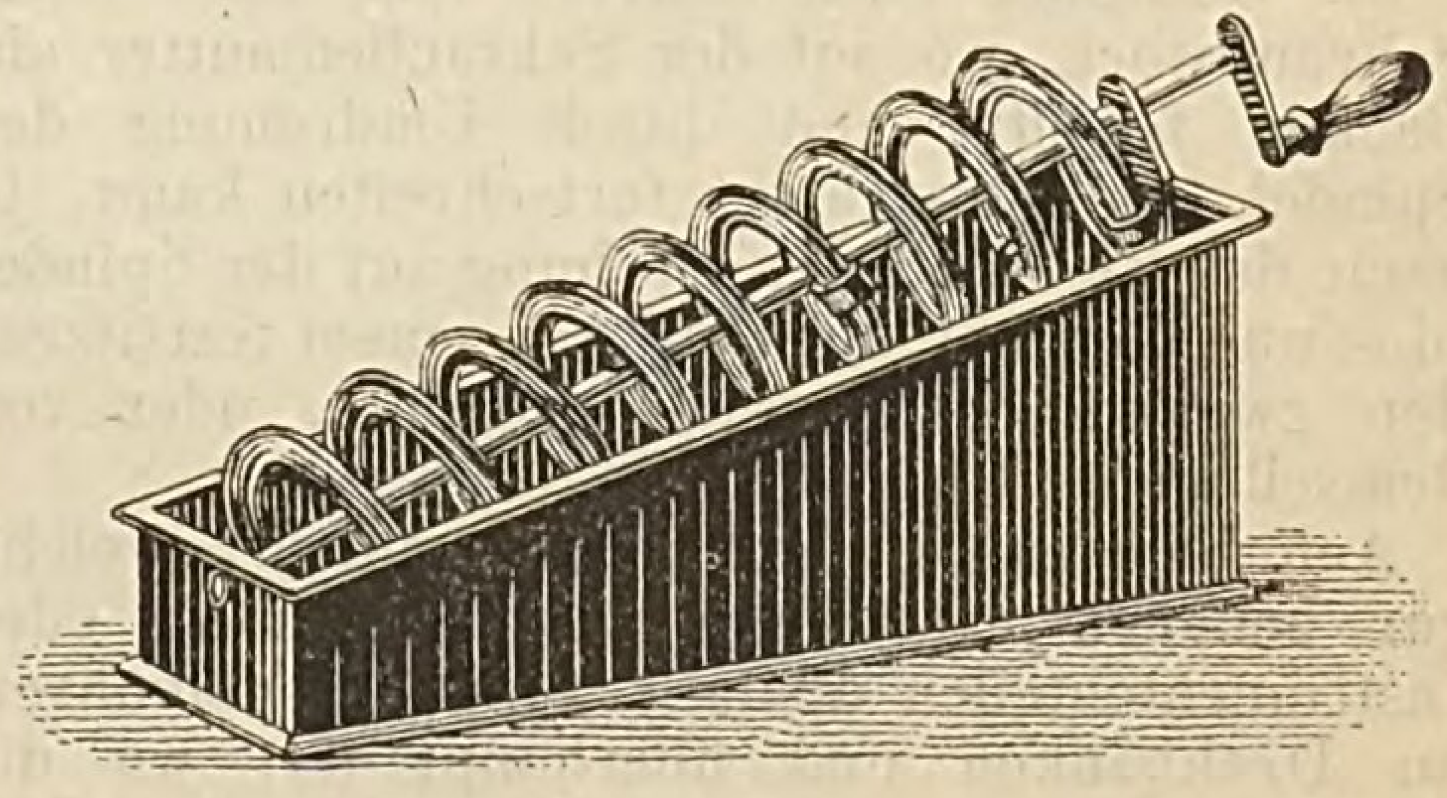


Antwort. Soll das Gesetz über das Gleichgewicht an der Schraube durch ein Experiment nachgewiesen werden, so benützt man am besten den in Fig. 366 veranschaulichten Apparat, bestehend aus dem Fuss MN, welcher einen massiven, gut abgedrehten Cylinder A von hartem Holz trägt, auf welchen ein hohl ausgedrehter, ebenfalls hölzerner Cylinder B gesteckt werden kann, welcher bestimmt ist, das Gewicht C zu tragen; letzterer muss aus besonders hartem und trockenem Holz gefertigt sein und wird unterhalb in Form einer Schraube abgeschnitten, was sich ziemlich genau erreichen lässt, wenn man zunächst ein Papierdreieck aufklebt, wie es in Fig. 358 angedeutet ist. An dem massiven Cylinder A werden dann sechs Rollen a, a_1 etc. befestigt, so dass sie alle zugleich die Schraubenwindung stützen. Der Arm D trägt ebenfalls eine Rolle, über welche eine Schnur mit dem Gegengewicht E läuft. Man gibt der Schraube eine starke Steigung und zwar so, dass das Verhältnis des Umfangs zur Ganghöhe ein möglichst einfaches, etwa 3 : 1 oder 4 : 1 ist. Legt man dann auf den Cylinder B ein 3- resp. 4mal so grosses Gewicht als in die Schale E, so wird Gleichgewicht herrschen.

Erkl. 276. Wollte man wirkliche Schrauben benützen, um die Theorie derselben durch Gewichte zu zeigen, so müsste man solche mit sehr grosser Steigung nehmen, und auch dann noch würde die Reibung so gross ausfallen, dass eine Vergleichung der anzuwendenden Gewichte nicht das gewünschte Resultat gibt.

Zur weiteren Erläuterung der Anwendung der Schraube kann ausser dem in nebenstehender Antwort beschriebenen Apparat auch die sog. archimedische Schraube dienen, welche wohl auch unter dem Namen Wasserschnecke bekannt ist. Dieselbe ist ungeachtet ihres Namens kaum von *Archimedes*, sondern wohl schon früher in Aegypten erfunden worden. Sie schiebt das Wasser eine nicht zu steile schiefe Ebene hinauf und besteht in der einfachsten Form aus einer Schraube, die in einem festliegenden halbcylindrischen Trog gedreht wird. Hierbei entschlüpft aber immer mehr oder weniger Wasser wieder nach unten, deswegen gibt man statt des Troges der Schraube eine volle Ummantelung, die überall auf den Kanten des Schraubengewindes fest ansitzt und folglich an der Drehung teilnimmt. Die Drehung der Wasserschnecke muss immer in entgegengesetzter Richtung von der erfolgen, in welcher das Gewinde läuft. Hat das untere, im Wasser liegende Ende eine Quantität Wasser geschöpft, so wird dasselbe, wenn das Gewinde unter ihm weggedreht wird, beim ersten Umgang von der übrigen Wassermenge abgeschnitten und bei jedem späteren rückt es infolge seiner Schwere, die es immer auf dem tiefsten Punkt hält, um einen Gang dem höher gelegenen Ausfluss zu, welchen es dann auch nach so viel Drehungen, als die Schraube Windungen hat, erreicht. Die Windungen der Schraube bilden einen einzigen Kanal, den das Wasser von unten nach oben

Figur 367.



zu durchwandern hat. Nun lassen sich aber solche gewundene Kanäle auch so herstellen, dass man eine oder zwei Blechröhren korkzieherartig um eine drehbare Achse windet, wie es Fig. 367 darstellt. Ein dieser Figur entsprechendes Modell von Glas in lackiertem Blechkasten liefert die Firma Leppin & Masche in Berlin S zum Preis von M. 10. —.

Frage 253. Was ist über die Bewegung einer Schraube zu bemerken und in wievielfacher und welcher Weise kann dieselbe zur Wirkung kommen?

Antwort. Die Bewegung der Schraube ist eine doppelte, nämlich eine drehende und zugleich fortschreitende, und zwar beträgt die letztere bei jeder ganzen Umdrehung eine Ganghöhe. Beide Bewegungen können sowohl

1). an der Spindel als

2). an der Mutter auftreten; ebenso gut kann aber auch

3). die Schraubenspindel sich bloss drehen, während an der Mutter die fortschreitende Bewegung erscheint oder

4). die Mutter bewegt sich nur drehend und die Spindel fortschreitend.

Die Spindel wird fortbewegt, wenn die Mutter festsitzt, die Mutter dagegen, wenn die Spindel festsitzt; im ersteren Fall wirken Kraft und Last gemeinschaftlich an der Spindel, im letzteren Fall gemeinschaftlich an der Mutter. Wirken Kraft und Last getrennt an Spindel und Mutter, dann sind beide Teile in Bewegung.

Erkl. 277. Als Beispiele zu den in nebenstehender Antwort erwähnten Fällen mögen folgende dienen:

1). Nur die Spindel bewegt sich drehend und fortschreitend bei den in Erkl. 274 bereits erwähnten Holzschrauben, sowie bei der in Fig. 365 dargestellten Schraube, welche sowohl zum Heben von Lasten als auch, wie es in der Schraubenpresse (Kopierpresse etc.) der Fall ist, zur Erzeugung eines kräftigen Drucks benützt wird. Auch gehören hierher der Nagelbohrer, Korkzieher, die Spindel der Stossprägemaschine u. dergl. m.

2). Bei den Buchbinderpressen bewegt sich die mit Handhaben oder Flügeln versehene Mutter drehend und fortschreitend über die feste Spindel. In gleicher Weise kommt diese Art der Schraubenbewegung besonders da vor, wo man, um zwei Körper fest miteinander zu verbinden, durch beide einen Bolzen steckt, dessen Ende mit einem Schraubengewinde versehen ist. Dreht man auf letzteres die Mutter, so rückt dieselbe zugleich vor und presst beide Körper fest aneinander.

3). Getrennt wirken Kraft und Last beim Schraubstock, wo auf der Schraubenmutter ein Backen festsitzt und durch Umdrehung der Spindel, die selbst nicht fortschreiten kann, je nach der Richtung der Drehung auf der Spindel hin- und hergeht und dadurch einem festsitzenden zweiten Backenstück genähert, oder von demselben entfernt wird.

Aehnlich ist es bei Stellschrauben, welche zur genauen Einstellung von Maschinen- oder Instrumententeilen dienen, beim Spindelbohrer, an Drehbänken und überhaupt da, wo die Schraube als sog. Leitspindel gebraucht wird, wo eine drehende Bewegung mittels der Schraube in eine geradlinige umgesetzt wird.

4). Ein interessantes und weniger bekanntes Beispiel für den vierten Fall, wo die Mutter sich bloss dreht, die Spindel dagegen nur fortschreitet, kommt vorzüglich bei der sog. englischen Wagenwinde vor, die in Fig. 368 abgebildet ist. Die Kraft P wirkt an den Kurbeln FF und bewirkt dadurch eine Drehung des Getriebes E; dieses greift in das Zahnrad DD ein, mit welchem die Schraubenmutter C fest verbunden ist; mit der Drehung der Kur-

beln FF dreht sich also auch die Mutter C. Letztere umschliesst mit ihrem Gewinde das Gewinde der Spindel AB, welche sich in einer Hülse auf- und abbewegen, aber wegen der mit ihr verbundenen und durch einen Schlitz aus der Hülse hervorragenden Klaue B sich nicht drehen kann.

Um die Last Q zu berechnen, welche man mit einer solchen Winde durch eine gegebene Kraft P heben kann, nehme man zuerst an, die Kurbeln FF seien direkt in horizontaler Stellung mit der Mutter C verbunden; wenn dann die Länge der Hebelarme FG mit R, die Ganghöhe der Schraube mit h, die zum Heben der Last Q erforderliche Kraft am Ende F des Hebels mit P bezeichnet wird, so ist:

$$P : Q = h : 2R\pi$$

folglich:

$$P = Q \cdot \frac{h}{2R\pi}$$

Da jedoch in der Winde die Kurbeln nicht auf der Mutter, sondern auf einer Welle G sitzen, die durch ein Zahnräderpaar E, D mit der Mutter C verbunden sind, so wird nun die am Ende F des Hebels FG erforderliche Kraft in dem Verhältnis der Zähnezahlen beider Räder kleiner. Wenn daher die Zähnezahlen mit Z resp. z, die an den Kurbeln wirkende Kraft mit P_1 bezeichnet werden, so ist:

$$P_1 = Q \cdot \frac{h}{2R\pi} \cdot \frac{z}{Z}$$

und

$$Q = P_1 \cdot \frac{2R\pi}{h} \cdot \frac{Z}{z}$$

sind aber statt der Zähnezahlen die Halbmesser R_1 und r_1 der beiden eingreifenden Räder gegeben, so ist:

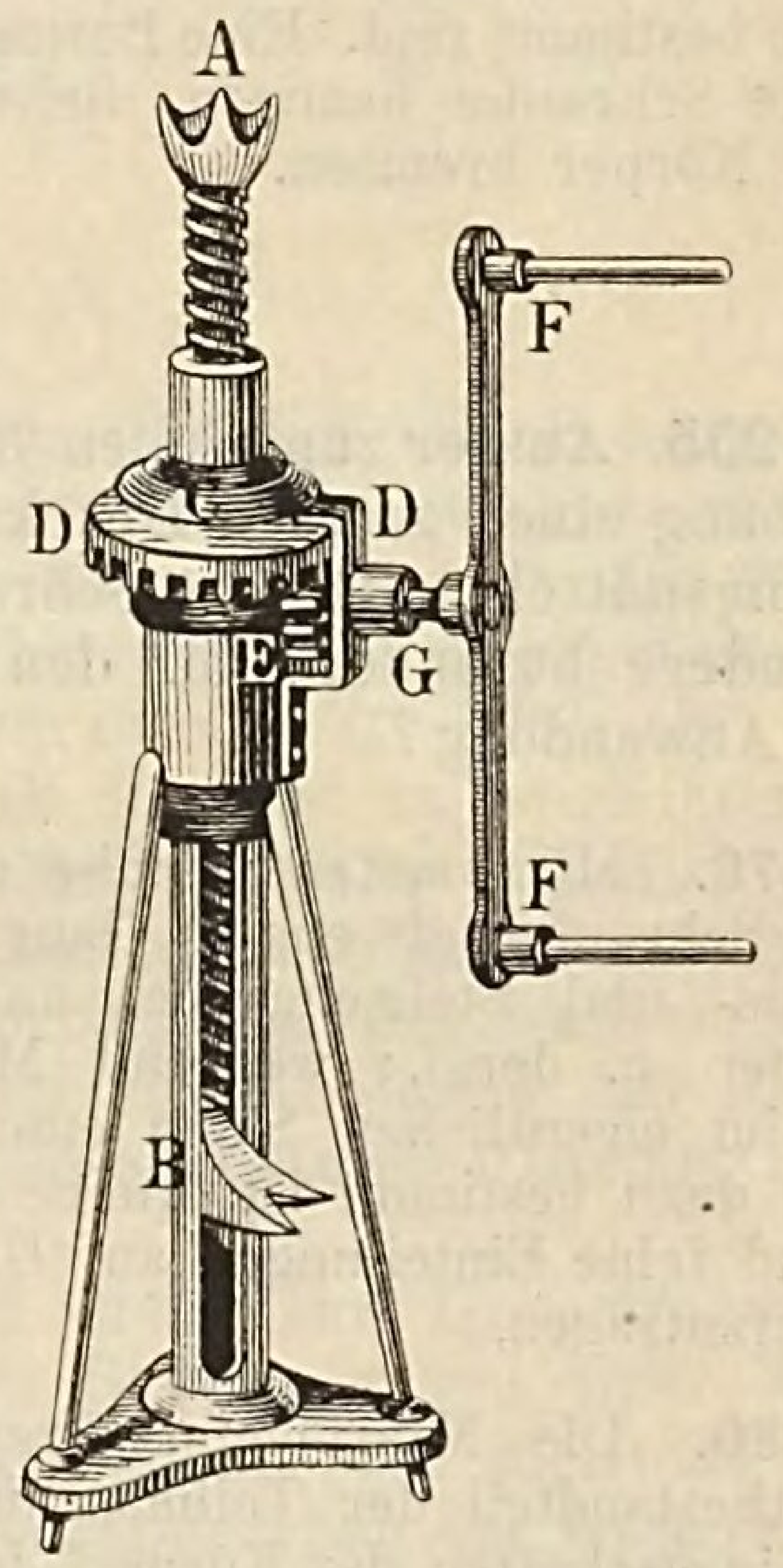
$$P_1 = Q \cdot \frac{h}{2R\pi} \cdot \frac{r_1}{R_1}$$

und

$$Q = P_1 \cdot \frac{2R\pi}{h} \cdot \frac{R_1}{r_1}$$

Aus diesen Formeln ist leicht ersichtlich, wie bedeutend die Wirksamkeit einer solchen Maschine in Bezug auf die Grösse der zu hebenden Last ist, selbst wenn auch, mit Berücksichtigung der bedeutenden Widerstände, der Nutzeffekt nur $1/3$ bis $1/4$ des oben berechneten Wertes beträgt.

Figur 368.



Frage 254. Inwiefern ist die bei der Schraube auftretende grosse Reibung, welche dem Heben von Lasten entgegenwirkt, gerade die Ursache ihrer Anwendung?

Antwort. Infolge der grossen Reibung, welche bei der Schraube auftritt, und welche schon für sich allein einer Last das Gleichgewicht halten kann, bietet die Schraube für den Maschinenbau ein ausgezeichnetes Befestigungsmittel, weil sich die Verbindung leicht lösen und wieder herstellen lässt. Wir finden sie deshalb in

Erkl. 278. Bei vielen Instrumenten werden cylindrische Zapfen, Arme von Ständern etc. in Hohlcylindern mittels einer durch die Wendung der letzteren gehenden Druckschraube festgehalten, so dass die bei gelüfteter Schraube

möglichst drehende oder fortschreitende Bewegung des Zapfens, Arms, Stiels etc. durch Anziehung derselben verhindert wird. Eine solche Schraube heisst **Bremsschraube**. Denselben Namen führen alle Schrauben, welche das Fortgleiten zweier Körper übereinander, auch wenn sie sich in ebenen Flächen berühren, mag die Bewegung fortschreitend oder drehend sein, zu verhindern bestimmt sind. Eine Bewegung durch eine solche Schraube hemmen, heisst den betreffenden Körper bremsen.

Uhren, an Thüren, Flinten, Retortenhaltern, am Schraubstock, an der Hobelbank u. s. w. An die Wagenachsen werden Schraubenmuttern angeschraubt, um das Abgleiten der Räder zu verhindern und in Verbindung mit Bremsen und Schleifzeug dienen sie zum Hemmen der Fuhrwerke und Eisenbahnwagen. Ferner finden wir die Schraube an Schiebelampen, Fernröhren und Mikroskopen teils als Befestigungs-, teils als Stellschraube.

Frage 255. Ausser zum Heben von Lasten, zur Ausübung eines grossen Drucks oder als Befestigungsmittel findet die Schraube noch welche andere besonders für den Physiker wichtige Anwendung?

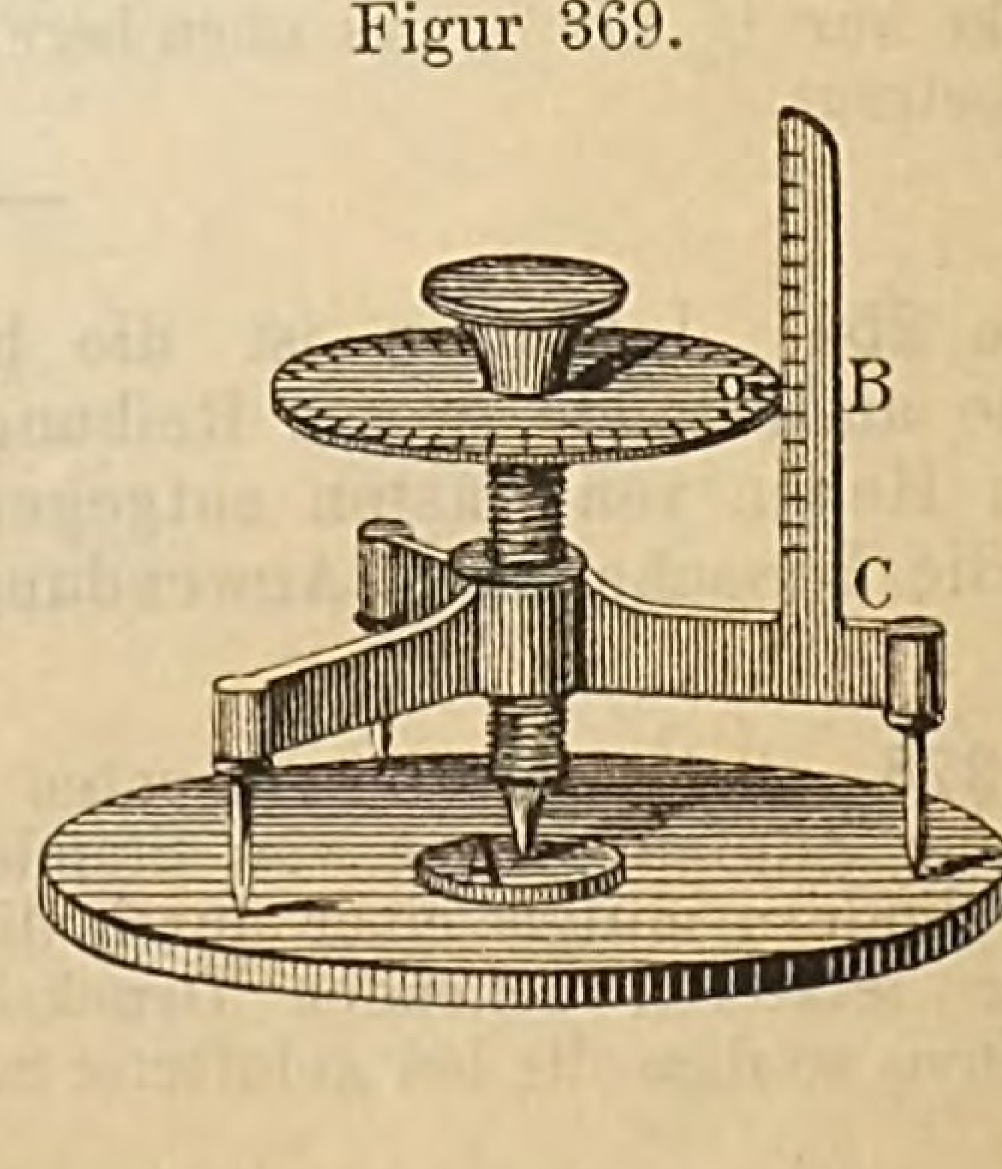
Erkl. 279. Mikrometerschraube nennt man jetzt jede Schraube mit engem Gang, auch die Korrektions- und Stellschrauben an optischen Instrumenten u. dergl.; während Mikrometerschraube im eigentlichen Sinne eine Schraube heisst, die dazu bestimmt ist, kleine Grössen zu messen und feine Einteilungen auf Glas, Metall u. s. w. aufzutragen.

Erkl. 280. Die Mikrometerschraube bildet den Hauptbestandteil der Teilmaschine (s. Allgemeine Eigenschaften der Körper) des Sphärometers u. a. Zur näheren Erläuterung der Mikrometerschraube möge das Sphärometer in seiner einfachsten Konstruktion dienen (wie es von Leppin & Masche in Berlin S zu M. 36. — geliefert wird), siehe Fig. 369. Dasselbe wird gebraucht, um die Dicke sehr dünner Bleche, Glasplättchen, Drähte u. s. w. zu messen. Es besteht aus einer sehr feinen Schraube, die sich in einer Schraubenmutter drehen lässt, welche mittels dreier stählerner Füsse auf einer ebenen Glasplatte ruht. Auf der Schraubenspindel ist eine horizontale Kreisschraube befestigt, deren Rand in 100 oder mehr gleiche Teile geteilt ist. Dicht zur Seite dieser Scheibe steht ein vertikales Metallstäbchen C, dessen Teilung der Höhe der einzelnen Schraubengänge entspricht. Beträgt diese 1 mm, so wird die Spitze A der Schraubenspindel bei einer ganzen Umdrehung um 1 mm gehoben oder gesenkt; dreht man aber die Kreisscheibe und die Spindel nur um $^1/_{100}$ der Umdrehung an C vorbei, so rückt auch die Spitze A nur um $^1/_{100}$ mm auf oder ab. Um damit die Dicke eines Plättchens zu messen, dreht man zuerst die Schraube so tief herab, bis ihre Spitze und die Füsse des Instruments in einer Ebene liegen, also die als Unterlage dienende Glastafel berühren, und notiert dann die Stellung der Kreisscheibe an dem Stäbchen C. Nun schraubt man die Schraube in die Höhe, legt das zu messende Plättchen unter ihre Spitze und schraubt wieder abwärts, bis dieses von der Spitze A berührt wird. Indem man nun die

Antwort. Die Schraube wird nicht bloss angewandt um an Kraft zu gewinnen oder einen Druck auszuüben, sondern auch, um gewisse kleine Körperteile mit grosser Genauigkeit durch äusserst kleine und doch messbare Strecken geradlinig fortzubewegen, um dieselben entweder abzumessen oder einzuteilen. Zu solchen Zwecken benutzt man Schrauben mit sehr feinen Windungen, sog. **Mikrometerschrauben.**[1]) Hat nämlich eine solche Schraube n Gänge auf 1 cm, so bewegt sich die Mutter bei jeder Umdrehung der Spindel um $\frac{1}{n}$cm fort. Da man nun Mikrometerschrauben fertigt, bei welchen 100 Umwindungen auf 1 cm Höhe kommen, so kann man mit solchen Schrauben überaus kleine Bewegungen hervorbringen, besonders wenn dieselben nur um $^1/_4$, $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ eines Kreises umgedreht werden, und es lassen sich mit Hilfe einer solchen Schraube Teilungen ausführen, die bei exakter (d. h. gewissenhafter, genauer) Herstellung der Apparate[2]) eine Grenze für unser Auge fast nicht mehr haben, und denen die Messung von Schmetterlingsstaub und Blutkügelchen eine leichte Aufgabe ist.

[1]). Siehe Erkl. 279.
[2]). Siehe Erkl. 280.

Figur 369.

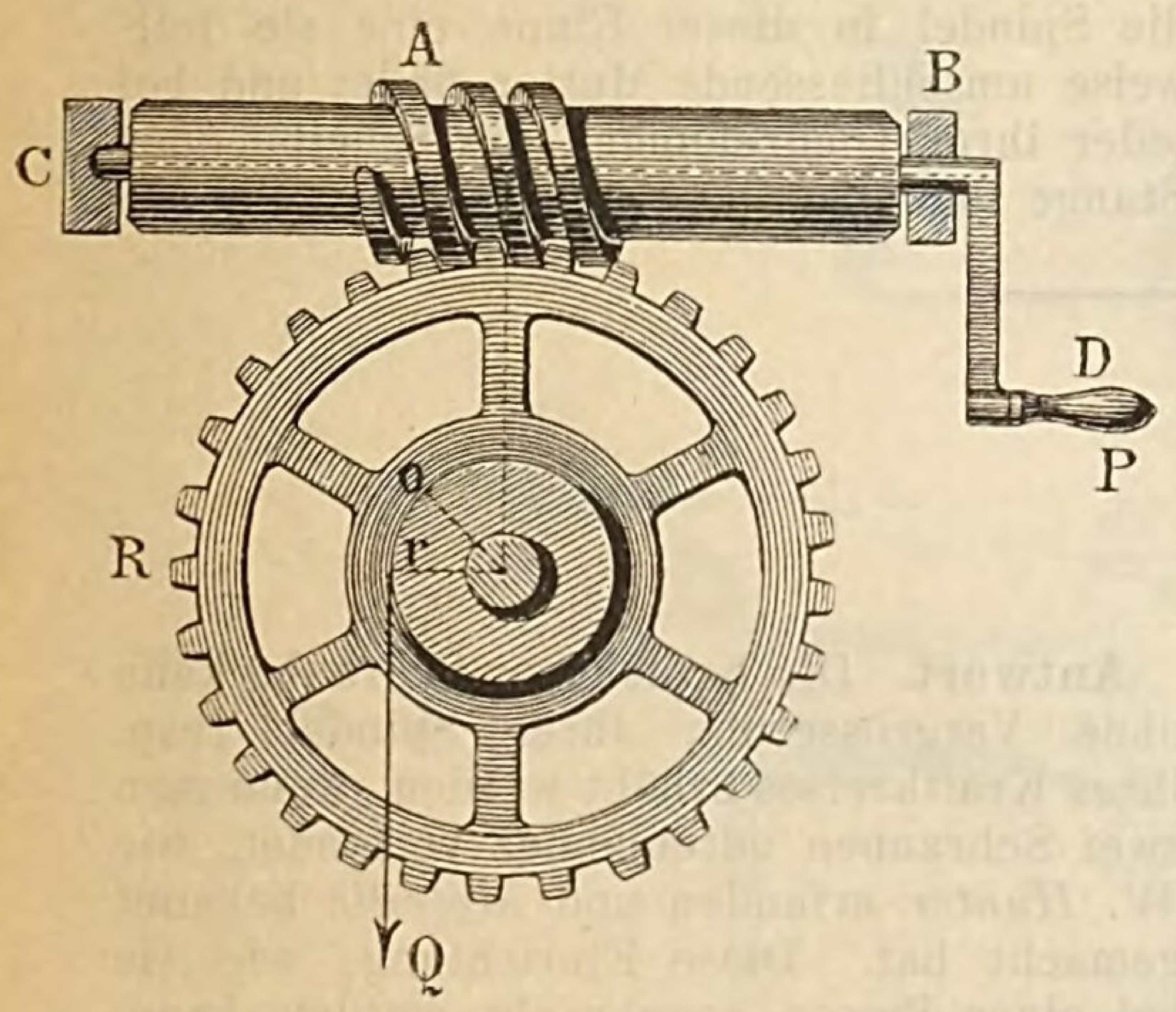


Stellung der Kreisscheibe an C abermals abliest, findet man aus dem Unterschied beider Stellungen die Dicke des Plättchens. Es betrage z. B. dieser Unterschied eine ganze Umdrehung und 15 Teilstriche der Scheibe, so ist die Dicke des Plättchens offenbar 1,15 mm.

Sphärometer in genauester Ausführung mit Libellenfühlhebel, bei denen die hundertteilige Kreisscheibe 0,005 mm angibt, liefert die obengenannte Firma zu M. 165. —.

Frage 256. Was versteht man unter einer Schraube ohne Ende, wo findet dieselbe hauptsächlich Anwendung und wenn ist dieselbe im Gleichgewicht?

Figur 370.



Antwort. Greifen die Schraubengänge, anstatt sich in den Vertiefungen der Schraubenmutter zu bewegen, in die für diesen Zweck gehörig schräg gearbeiteten Zähne eines Stirnrades (Fig. 370) ein, so dass letzteres als die Last zu betrachten ist, die auf der schiefen Ebene hinaufbewegt wird, so nennt man eine solche Vorrichtung eine Schraube ohne Ende, weil sie stets aufs neue wieder in die Zähne des Rades eingreift und so eine stetige Drehung desselben bewirkt.

Dieselbe dient zur Uebertraguug einer rotierenden Bewegung von einer Welle auf die andere, wobei man meistens eine bedeutende Verminderung der Geschwindigkeit resp. Vermehrung der Kraft erreichen will.

Die Anwendung der Schraube ohne Ende ist eine doppelte:

1). Will man mit einer kleinen Kraft P eine grosse Last Q heben, so ist die Spindel flachgängig und das Rad hat dann Zähne, deren Flanken schräg gegen die Stirnfläche des Rades stehen. Die Last wird dann durch die Drehung des Schneckenrades bewegt, indem sie an einem Seil hängt, das sich auf die Welle des Rades wickelt, oder an einer Zahnstange wirkt, die durch ein auf der Welle sitzendes Zahnrad bewegt wird, oder durch eine Schraube, deren Mutter sich in der Nähe des Rades befindet. Das Verhältnis zwischen Kraft und Last ermittelt man wie bei der Schraube. Bezeichnet r den Radius der Welle, R den Radius des Rades, so würde die Kraft, wenn sie am Umfange des Rades wirkte,

$$P = \frac{Q \cdot r}{R}$$

sein. Von dieser Kraft braucht nur aber der sovielte Teil angewandt zu werden, sovielmal der durch die Kurbel BD zurückgelegte Kraftweg $2k\pi$ grösser ist als die Ganghöhe g der Schraube. Hieraus ergibt sich:

$$P = \frac{Q \cdot g \cdot r}{2k\pi \cdot R}$$

oder:

$$P : Q = gr : 2k\pi R$$

dabei ergibt sich immer ein so grosser Reibungsverlust, dass man nur wegen ihrer Einfachheit die Schraube ohne Ende zuweilen zum Heben von Lasten verwendet.

2). Eine andere Anwendung findet die Schraube ohne Ende, wo es sich darum handelt, eine recht sanfte und langsame Kreisbewegung hervorzubringen. Die Schraube ohne Ende dient hier als Stell- oder Mikrometerschraube zur feinen Einstellung an Instrumenten, auch wohl an den Wirbeln von Guitarren und Kontrabässen etc. Die Spindel ist gewöhnlich eine scharfgängige Schraube, welche derart gelagert ist, dass sie sich nur um ihre Achse drehen kann; im Umfange der Scheibe ist eine runde Rinne eingegraben und in diese sind dann Schraubenwindungen eingeschnitten, so dass die Spindel in dieser Rinne eine sie teilweise umschliessende Mutter findet und bei jeder ihrer Umdrehungen die Scheibe oder Stange um eine Ganghöhe fortschraubt.

Frage 257. Es wurde bereits bemerkt, dass man die Kraft einer Schraube vermehren kann, indem man den Spindelumfang im Verhältnis zur Ganghöhe möglichst gross nimmt und dass man die Kraft an einem möglichst langen Hebelarm wirken lässt; ausser diesen gibt es aber noch welches andere Mittel die Kraft einer Schraube zu vermehren?

Antwort. Die Kraft einer Schraube kann ohne Vergrösserung ihrer Spindel resp. ihres Kraftkreises erhöht werden, wenn man zwei Schrauben miteinander verbindet, wie *W. Hunter* erfunden und *Melville* bekannt gemacht hat. Diese Einrichtung, wie sie bei einer Presse angebracht werden kann, ist in der Zeichnung Fig. 371 dargestellt. AA ist eine hohle Schraube, die zugleich als Mutter für die massive Schraube BB dient; die Ganghöhe von BB ist etwas geringer als die von AA. Beim Anfang der Bewegung, sowie beim Zurückziehen der Pressplatte dreht man an den Armen CC, während EE festgehalten wird; dann wird sich die Pressplatte DD um eine Ganghöhe von BB senken oder heben. Soll der Druck ein grösserer werden und abwärts gerichtet sein, so dreht man vermittelst der Arme EE die Schraube AA abwärts, während CC an der Drehung verhindert wird; alsdann senkt sich die Platte DD um die Differenz der Ganghöhen der beiden Schrauben. Denn bei der Drehung der Schraube AA, die für

Erkl. 281. Aus nebenstehender Gleichung ist zu ersehen, dass man der Spindel und den beiden Gewinden jede beliebige Stärke geben kann, und dass die Wirkung der Schraube bloss von der Kleinheit der Differenz ($H - h$) abhängt. Da aber die Kleinheit dieses Unterschieds aufs äusserste gebracht werden kann, so ist, in theoretischer Hinsicht, die Wirkung der genannten Schraube eine fast unbegrenzte. Hätte z. B. die Spindel AA 10 Schraubengänge auf 1 cm, die Spindel BB aber deren 12, so würde die Druckplatte DD durch eine Umdrehung nur um

$^1/_{10}$ cm abwärts und gleichzeitig um $^1/_{12}$ cm aufwärts, also im ganzen um

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \text{ cm}$$

abwärts bewegt werden. Doch wird auch bei dieser Maschine die Wirkung in Bezug auf die Grösse des ausgeübten Drucks durch eintretende Reibung und Gegenwirkungen bedeutend abgeändert und modifiziert (vom lat. modificāre von modus, Mass und facĕre, machen s. v. w. mässigen, abändern, einschränken). Hingegen können solche Schrauben, wegen des geringen Raumes, den der bewegte Körper durchläuft, auch zu Mikrometerschrauben von grosser Feinheit gebraucht werden, das Schneiden derselben erfordert aber eine grosse Sorgfalt und Geschicklichkeit.

BB als Mutter dient, wird letztere herausgeschraubt, hebt sich also um ihre Ganghöhe $= h$; die Ganghöhe von AA ist aber etwas grösser $=$ H, darum muss sich die Pressplatte DD, welche um die Ganghöhe h gehoben und um die grössere Ganghöhe H abwärts bewegt wird, um soviel senken, als die Differenz H $- h$ der beiden Ganghöhen beträgt. Da nun, wie schon oft bemerkt, bei jeder im Gleichgewicht befindlichen Maschine Kraft mal Kraftweg = Last mal Lastweg sein muss, so gilt für die eben beschriebene Schraube, welche den Namen Differentialschraube führt, die Relation:

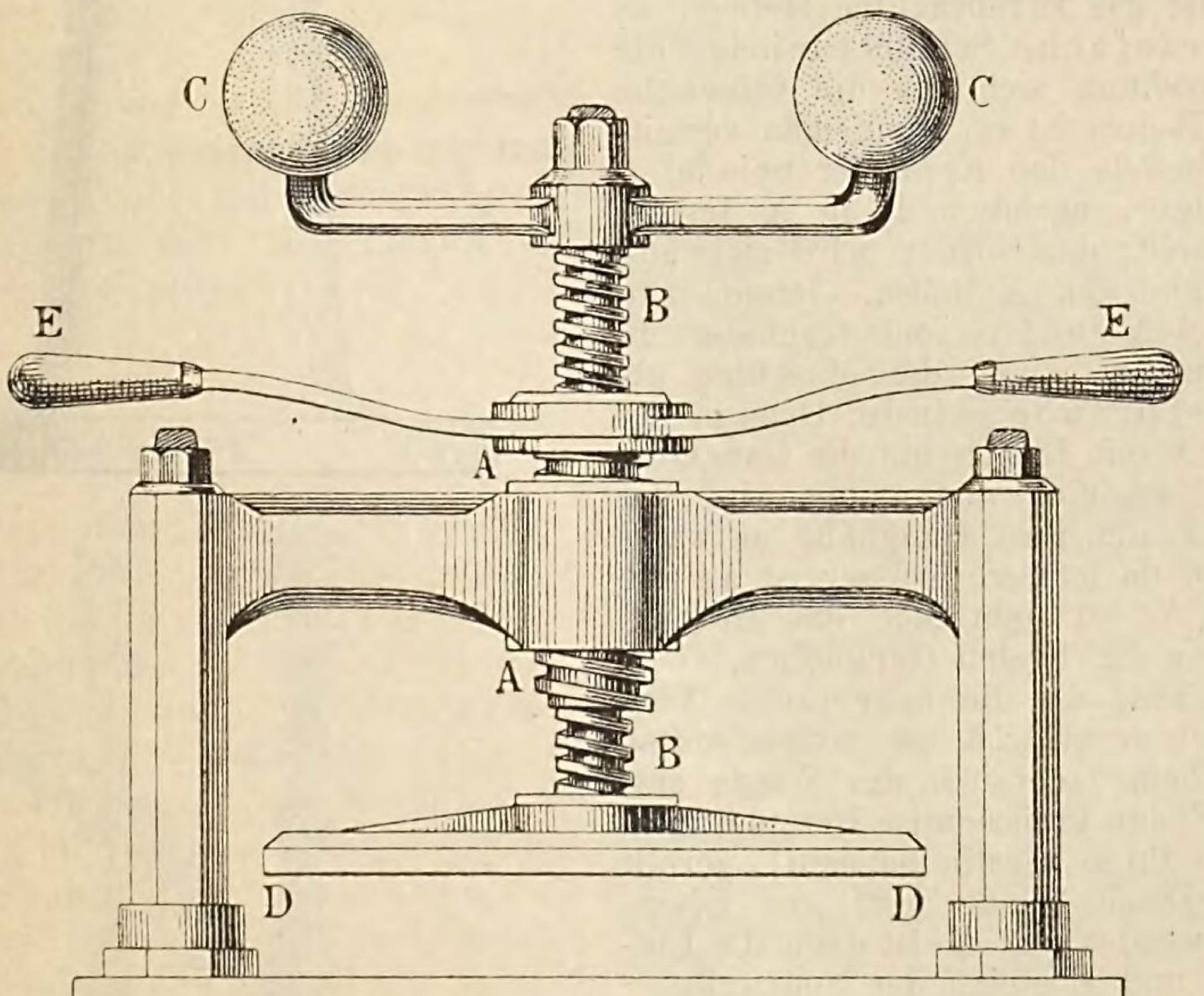
$$P \,.\, 2R\pi = Q \,.\, (H - h)$$

oder:

$$P : Q = (H - h) : 2R\pi \; ^{1}).$$

1). Siehe Erkl. 281.

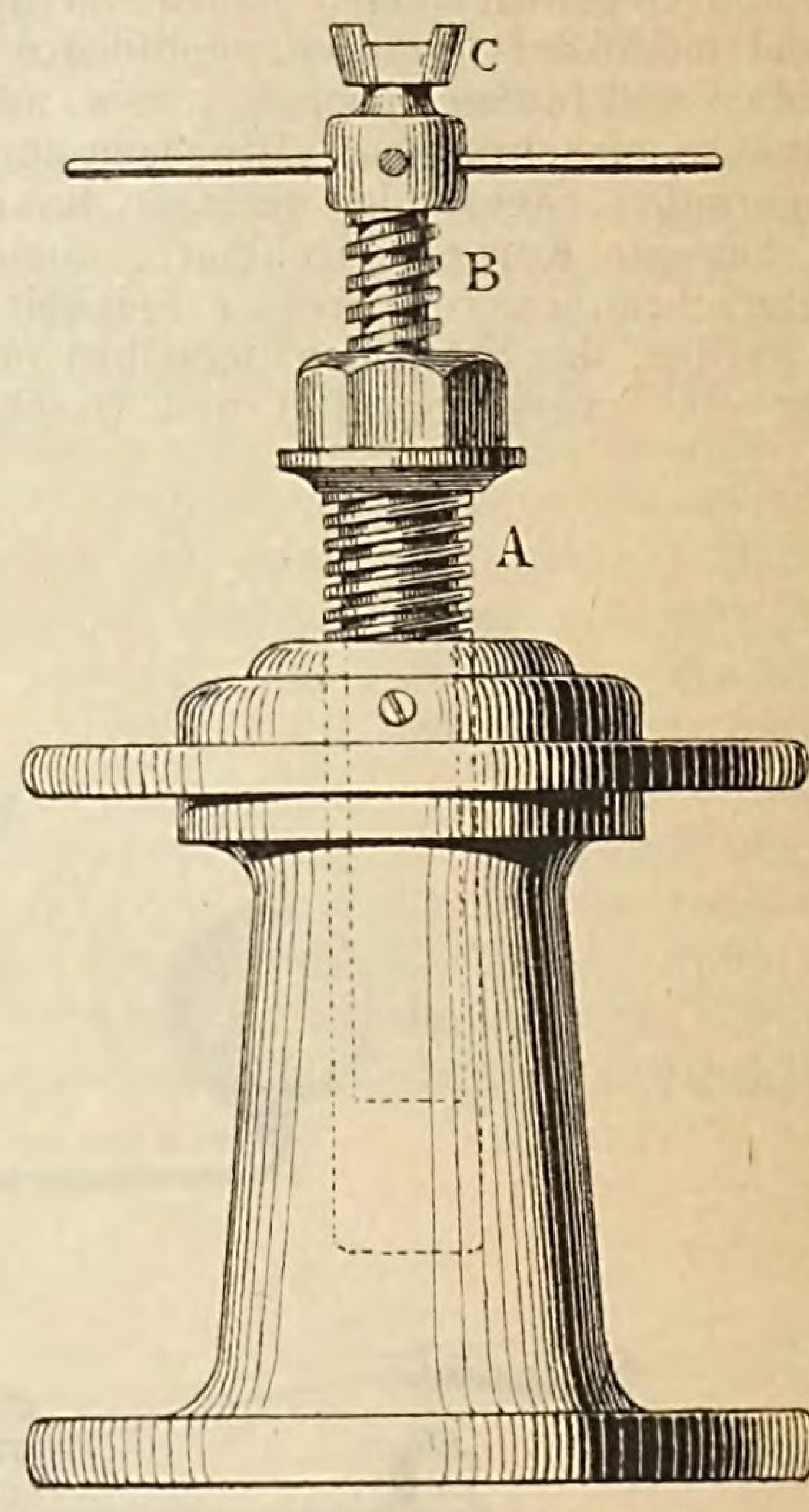
Figur 371.



Erkl. 282. Eine andere Einrichtung erhält die Differentialschraube, wenn beide Gewinde auf den nämlichen Cylinder geschnitten sind und jedem eine eigene Mutter zugehört, welche beide sich zwar nicht drehen, wohl aber einander nähern und voneinander entfernen lassen. Steht die Mutter des gröberen Gewindes fest, ist aber die des feineren nach der Achsenrichtung der Spindel beweglich, so rückt die Spindel bei einer Umdrehung in der festen Mutter um die Höhe H eines der gröberen Schraubengänge

vor, in der beweglichen Mutter dagegen um die Höhe h eines der feineren Schraubengänge; nun aber rückt die Spindel jedenfalls um die erstere Grösse H nach der Richtung, wohin sie geschraubt wird; also zieht sie die bewegliche Mutter um die Differenz der Schraubengänge $(H - h)$ beider Gewinde nach der festen Mutter heran. Schraubt man in entgegengesetztem Drehungssinn, so entfernt sich die bewegliche Mutter bei einer Umdrehung der Spindel um die Differenz der Höhen $(H - h)$ der Schraubengänge von der festen.

Figur 372.



Erkl. 283. Auf ähnliche Weise wie zu der nebenbeschriebenen Differentialschraubenpresse kann man die Differentialschraube auch als Winde benutzen, wie es *Dunn*'s sehr sinnreiche sogenannte Perspektivwinde (Fig. 372) zeigt. Bei derselben sind, wie in voriger Figur, zwei Schraubenspindeln A und B angebracht, wovon A hohl ist und als Mutter für die Spindel B dient. Beide Spindeln haben wieder verschiedene Ganghöhen. Es habe z. B. die innere Spindel B, welche das Horn C trägt, eine grössere Ganghöhe. Dreht man nun die Spindel B vermittelst des angebrachten Hebels, so hat man eine einfache Schraubenwinde, die bei einer Umdrehung sich um die Ganghöhe von B hebt. Ebenso ist es, wenn man vermittelst eines Schlüssels den Kopf der Spindel A ergreift und diese, nachdem B in A festgeschraubt ist, dreht; das Horn C wird sich nun um die Ganghöhe von A heben. Dreht man aber die Spindel A abwärts und verhindert B, sich zu drehen, so wirkt die Maschine als Differentialschraubenwinde. Denn in diesem Fall wird A mit B sich um die Ganghöhe von A senken; zugleich aber auch wird die innere Spindel B um ihre Ganghöhe aufwärts geschraubt, und da letztere grösser ist als die Ganghöhe von A, so hebt sich das Horn C um die Differenz der beiden Ganghöhen.

Sehr zweckmässig ist die angebrachte Vorrichtung, wonach vermittelst des aufgesteckten Rades D, das beim Gebrauch der Winde entfernt wird, und der kreisrunden Fussplatte E, die Winde an ihren Bestimmungsort gerollt werden kann. Diese Winde wird auf Eisenbahnen oft verwendet und es ist dann die Entfernung von D und E gleich der Spurweite.

Frage 258. Kann auch der Widerstand flüssiger und luftförmiger Körper in ähnlicher Weise zur Erzeugung einer fortschreitenden Schraubenbewegung dienen, wie es durch den Widerstand fester Körper geschieht?

Antwort. Gleichwie der Widerstand der festen Körper das Mittel zur Erzeugung einer fortschreitenden Schraubenbewegung bietet, so kann auch der Widerstand flüssiger und luftförmiger Körper zur Erzeugung einer fortschreitenden Schraubenbewegung dienen.

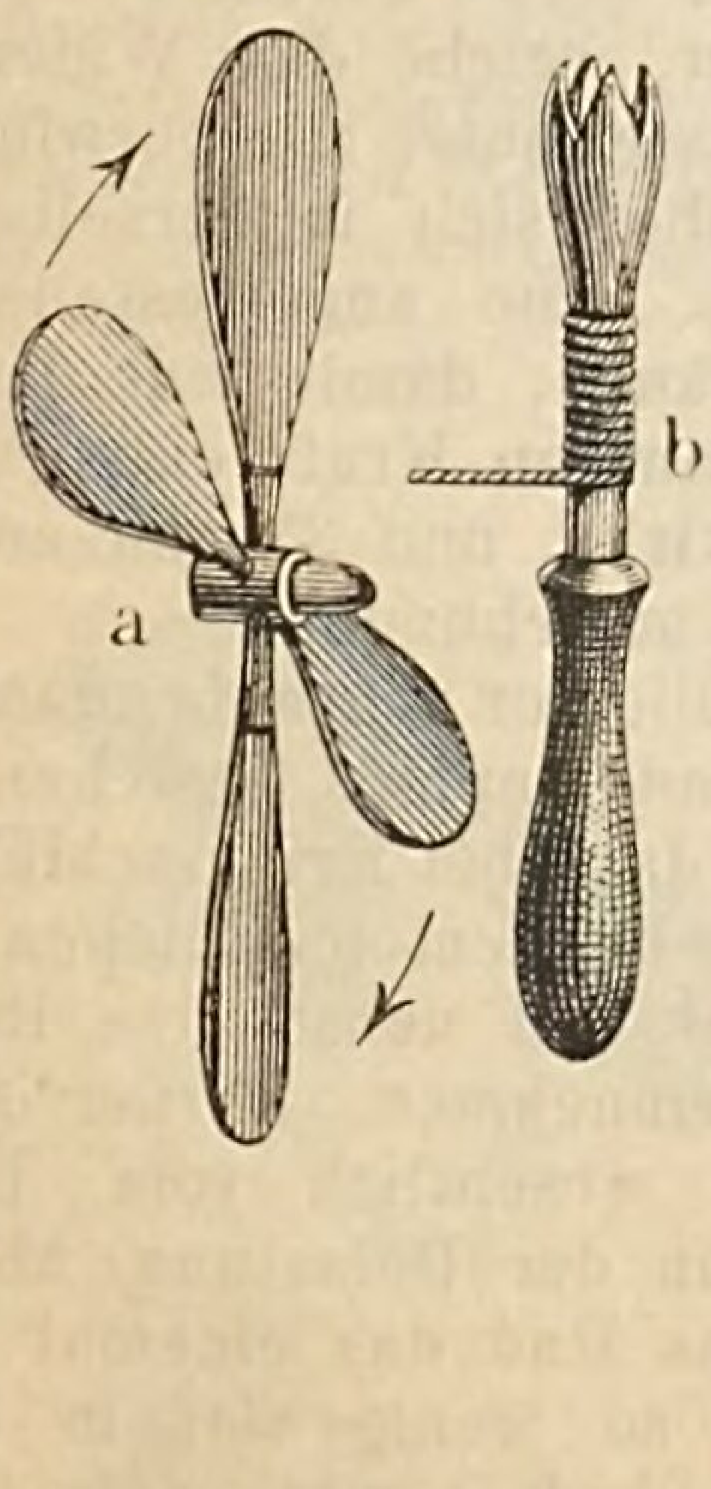
Frage 259. Wodurch lässt sich die obige Behauptung beweisen und welche überaus wichtige Anwendung hat die Schraube in dieser Beziehung gefunden?

Antwort. Es lässt sich mit Hilfe der Schiffsschraube, sowie mit Hilfe der Luftschraube beweisen, dass auch in flüssigen resp. luftförmigen Körpern durch geeignet konstruierte Schrauben eine fördernde Bewegung erzeugt werden kann.

Besonders wichtig ist die Verwendung der Schraube zum Fortbewegen der Schiffe als Schiffsschraube an Stelle der Schaufelräder, wodurch nicht nur der Wellenschlag bedeutend vermindert, sondern auch dem wichtigsten Teil des Schiffs eine versteckte Stelle angewiesen wird. Das Prinzip derselben beruht darauf, dass das Wasser genug Widerstand leistet, um einer sehr rasch um ihre Achse sich drehenden Schraube gegenüber sich wie eine feststehende Schraubenmutter zu verhalten. Die Schraubenspindel schraubt sich in dasselbe, wie ein Korkzieher in den Kork hinein und bewegt sich darin in der Richtung ihrer Achse weiter.

Frage 260. Durch welchen Apparat kann man die Wirkung der Schiffsschraube erläutern, wie ist derselbe eingerichtet und welches ist seine Wirkung?

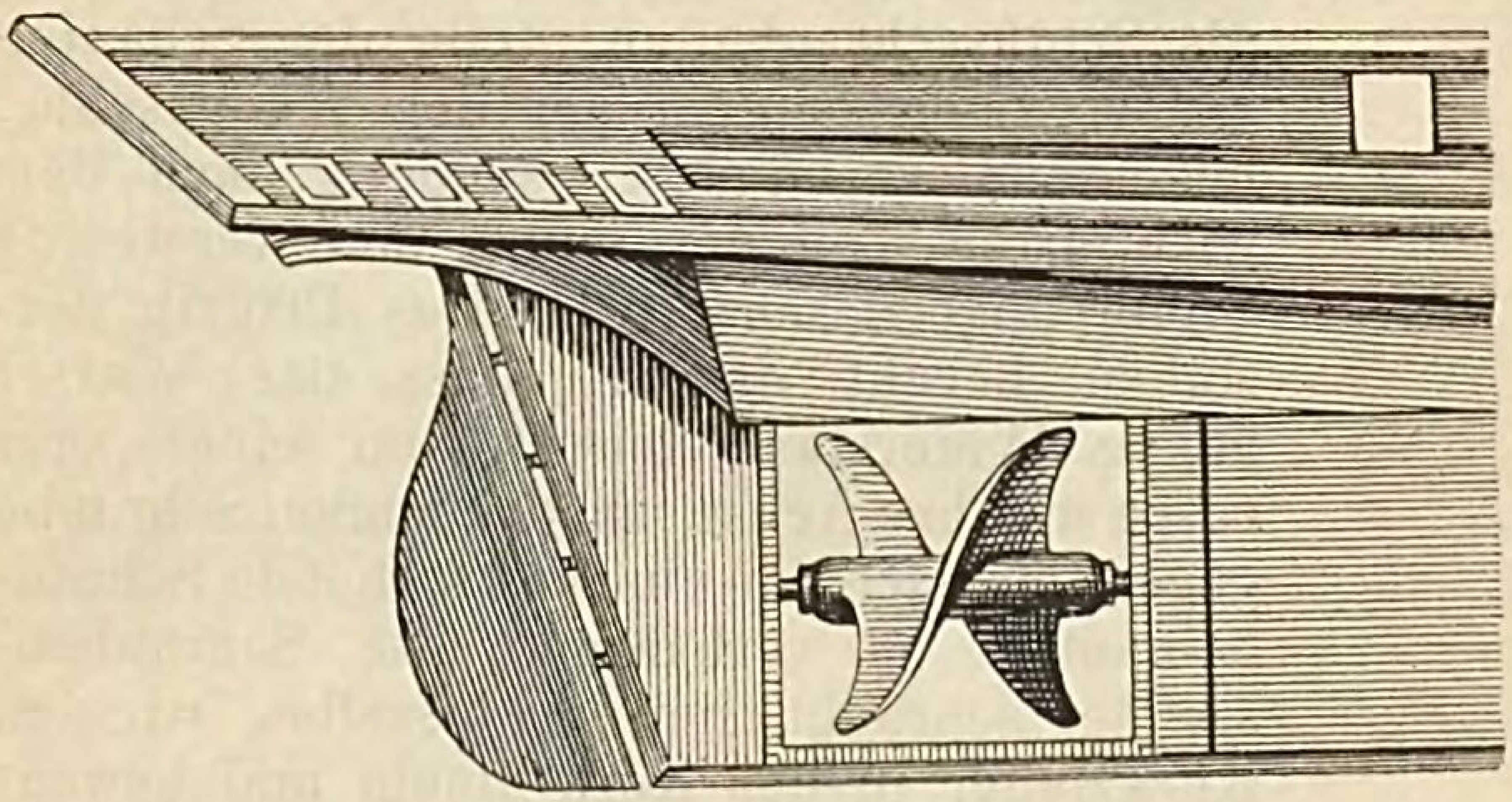
Figur 373.



Antwort. Zum bessern Verständnis der Wirkungen der Schiffsschraube kann man die Luftschraube oder den sog. Flieger benützen, welcher in den Spielwarengeschäften schon von M. 1.— an käuflich ist. Derselbe besteht aus vier dünnen Blechflügeln (siehe Fig. 373), welche, ähnlich wie die Flügel einer Windmühle, in etwas schiefer Lage um einen Dorn angebracht sind. Jeder derselben stellt vermöge seiner Neigung ein Stück einer Schraubenfläche dar. Die Vorrichtung *a* wird mit dem Dorn in die gabelförmige Oeffnung des Rotationsapparates *b* gelegt, und die letztere durch die umgewickelte Schnur in rasche Drehungen versetzt, welche sich auch dem Flieger mitteilen, infolge deren sich derselbe auslöst und in der Luft in die Höhe schraubt, bis seine Bewegung matter wird, und sein Gewicht ihn wieder herabzieht. Wie hier die Luft, so wirkt bei der Schiffsschraube der Widerstand des Wassers; da derselbe aber viel grösser, die Fortbewegung eines Körpers in horizontaler Richtung ausserdem leichter als in vertikaler Richtung ist, so wird ein dem Flieger ähnlicher, entsprechend grosser Apparat, in der Längsrichtung des Schiffes angebracht, bei genügend rascher Drehung auch einen schweren Schiffskörper in Bewegung setzen können.

Frage 261. Wie ist die Schiffsschraube eingerichtet, welches sind die hauptsächlichsten Bedingungen einer möglichst grossen Wirksamkeit derselben und welche Vorteile gewähren die Schraubendampfer gegenüber den Raddampfern?

Figur 374.



Erkl. 284. Dem berühmten Physiker *Daniel Bernoulli* gebührt die Ehre, die Schiffsschraube, wie wir sie heute noch anwenden, erfunden zu haben. Er reichte 1752 bei der französischen Akademie eine Denkschrift ein, in welcher er die Schiffsschraube ausführlich beschrieb und dieselbe zur Anwendung empfahl. Aber erst als zu Anfang dieses Jahrhunderts *Fulton* seine ersten Dampfschiffe gebaut hatte, deren Erfolge auch die ärgsten Zweifler verstummen machten und als der Verkehr durch Einführung des Dampfes als bewegende Kraft Ausdehnungen annahm, welche den Wert der Zeit bedeutend steigerten, erst da gelangte die Idee, die Schraube als Schiffsmotor anzuwenden, zur Verwirklichung. 1829 fanden im Triester Hafen die Probefahrten des ersten Schraubendampfers statt, welcher nach *Joseph Ressels* Angaben gebaut war. Aber trotz des glänzenden Erfolges kam die Sache doch wieder in Vergessenheit, bis der Engländer *Smith* 1835 Schraubendampfer zu bauen begann, welche sogar die Bedingungen der Admiralität übertrafen. Er umschiffte ganz England, legte in allen bedeutenden Häfen an und eine grosse Anzahl der hervorragendsten Ingenieure und Gelehrten erhielt so Gelegenheit, sich von der Vortrefflichkeit der Schiffsschraube zu überzeugen.

Erkl. 285. Die Schraube findet auch noch Anwendung bei den sog. gezogenen Läufen der Geschütze und Handfeuerwaffen, bei denen im Innern des Laufes schraubengangartig gewundene Einschnitte oder Rinnen angebracht sind. Die mit einem Bleimantel umhüllten resp. aus Blei bestehenden Geschosse werden durch die

Antwort. Die Schiffsschraube besteht aus mehrfach auf dieselbe Achse gesetzten und durch Radien begrenzten Teilen einer Schraubenfläche, aus 2 bis 6 Schraubenflügeln (Fig. 374 ist eine doppeltgängige Schiffsschraube), welche mehr oder weniger genau nach der Schraubenfläche gestaltet sind und welche entweder fest oder verstellbar an der möglichst kugelförmigen Nabe angebracht oder mit ihr aus einem Stücke gegossen sind. Sie liegt am Hinterteil des Schiffes, vor dem Steuerruder, im sogen. toten Holze, welches stets, wenn das Schiff schwimmt, unter Wasser ist. Die Welle oder Achse wird durch die Dampfmaschine in rasche Umdrehungen gesetzt. Beträgt das Vorwärtsgehen im Wasser auch nicht bei jeder Umdrehung soviel wie die Ganghöhe, da das Wasser nachgiebig ist und dem Druck der Schraubenflächen sowohl nach hinten als nach den Seiten ausweicht, so wird doch immer ein Fortrücken erreicht, welches bei 100 bis 150 Umgängen der Schraube pro Minute, zu einer ansehnlichen Gesamtwirkung anwächst.

Als hauptsächliche Bedingungen einer möglichst grossen Wirksamkeit sind zu erwähnen 1). eine breite Fläche oder ein grosser Durchmesser, welche den Widerstand einer grossen Wassermasse zu überwinden hat und deswegen eher sich in derselben vorwärts bewegt; 2). eine angemessene Höhe der Schraubengänge, damit jede Drehung eine der aufgewandten Kraft entsprechende Bewegung bewirke, und 3). eine entsprechende Zahl von Umdrehungen.

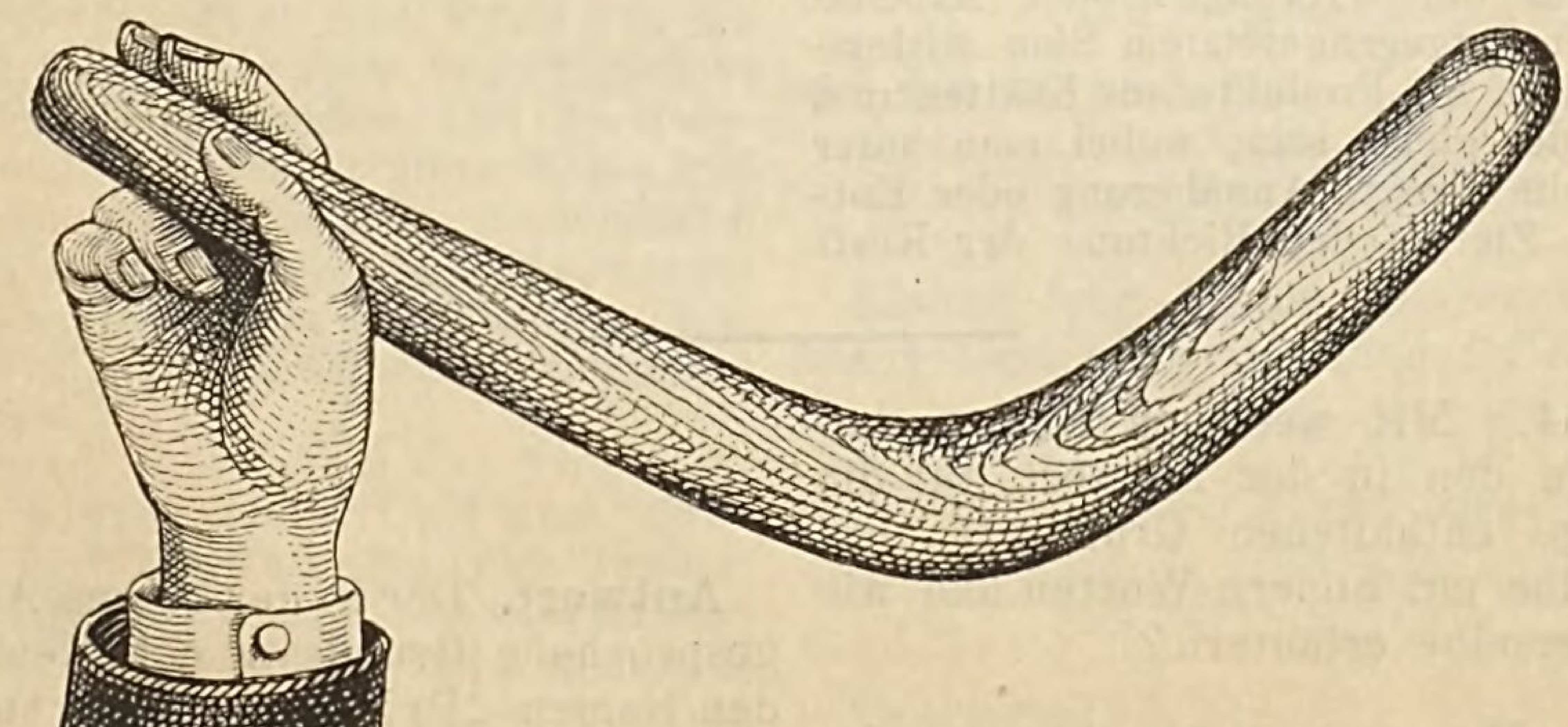
Die Vorteile der Schraubendampfer gegenüber den Raddampfern bestehen hauptsächlich darin, dass bei Kriegsschiffen z. B. die Räder zu sehr dem feindlichen Feuer ausgesetzt sind und nebst dem Radkasten zu viel Raum einnehmen. Ferner ist der Effekt des Rades wesentlich vom Tiefgang des Schiffes (von der Belastung) abhängig, und während das Rad das einemal zu tief, das anderemal zu wenig tief in das Wasser eintaucht, kann man beim Schraubendampfer durch richtige Gewichtsverteilung die Schraube stets unter Wasser in ihrer richtigen Lage erhalten. Bei rollender Bewegung des Schiffs arbeiten die Räder sehr unregelmässig; dagegen kann die Schraube

Gewalt der Pulvergase in die schmalen scharfkantigen Züge genau eingepresst und durch die ihnen hierdurch mitgeteilte Rotation um eine horizontale Längsachse, die sie ausser dem Lauf beibehalten, mit Sicherheit geführt.

Erkl. 286. Es dürfte hier noch am Platz sein, den Bumerang oder das australische Wurfholz zu erwähnen, bestehend aus einer etwa 60 cm langen, seitlich abgeflachten, nach beiden Seiten hin etwas verschmälerten und in der Mitte knieartig gebogenen Schiene aus hartem Holz, welches auf seiner unteren nahezu, aber nicht ganz ebenen Fläche derartig windschief ist, dass es ein Stück einer sehr flachen, rechts gewundenen Schraube bildet. Fasst man den Bumerang am langen Ende, wie Fig. 375 zeigt, so dass die flache Seite am Zeige- und Mittelfinger, die konvexe (oder auswärts gekrümmte) am Daumen der Rechten, der ganze Bumerang nahezu in einer senkrechten Ebene liegt und die offene oder konkave Seite des Bogens nach oben gekehrt ist, zieht die Hand bis nahe an die Schulter, so dass sich der Bumerang zum grössten Teil rückwärts von der Schulter befindet und wirft dann, indem man den Arm streckt, unter einem Winkel von 20 bis 30^{0} schräg aufwärts, während man gleichzeitig Zeige- und Mittelfinger kräftigst nach der Innenhandfläche zudrückt, so steigt derselbe kreiseschlagend in die Luft, wendet sich immer mehr nach links und oben, kehrt dann plötzlich in flachem Bogen zum Ausgangspunkt zurück und fällt im günstigen Fall vor die Füsse des Werfenden. Diese eigentümliche Erscheinung beruht auf dem Gesetz der Schraube. Der Versuch gelingt nur nach einiger Uebung, die man auf einem freien Platz und nicht in der Nähe von Fensterscheiben vornehmen muss, da bei einigem Wind oder ungeschicktem Werfen der Bumerang ganz verkehrte und unberechenbare Bahnen beschreibt.

nur bei stampfender Bewegung des Schiffes leiden. Ausserdem ist die Radmaschine nebst Rädern schwerer als die Schraubenmaschine, welche Dampffährböte in den winzigsten Dimensionen ermöglicht.

Figur 375.



δ). Satz oder Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Frage 262. Wenn bei irgend einer der bisher behandelten Maschinen das Gleichgewicht insoweit gestört wird, dass eine Bewegung eintritt, was bemerkt man dann in Bezug auf das Verhältnis der Wege, welche die Angriffspunkte der Kraft und Last zurücklegen?

Antwort. Bei allen bisher behandelten sowohl einfachen als zusammengesetzten Maschinen kann man beobachten und nachweisen, dass, im Fall das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last gestört wird, so dass eine Bewegung eintritt, die kleine Kraft P einen grossen Weg S und die grosse Last Q einen kleinen Weg *s* zurücklegt, uud es ist stets

$$P . S = Q . s$$

d. h. die Produkte aus Kraft und Last in die Wege ihrer Angriffspunkte sind einander gleich, oder die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die Wege ihrer Angriffspunkte.

Frage 263. Unter welchen Voraussetzungen gilt der vorerwähnte Satz allgemein und für jede Anzahl von Kräften, welche auf einen Körper wirken?

Erkl. 287 Wirken z. B. auf irgend einen Körper die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots, Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$, die denselben um irgend einen Punkt C zu drehen suchen und halten sich diese Kräfte das Gleichgewicht, so muss auch jede unendlich kleine (nur gedachte) Drehung, welche durch die in positivem Drehungssinn wirkenden Kräfte entstand, wieder durch die entgegengesetzte Wirkung der negativ drehenden Kräfte aufgehoben werden.

Nimmt aber bei einer solchen unendlich kleinen Drehung der Körper eine solche Lage an, dass die Angriffspunkte $a, b, c \ldots$ der auf ihn wirkenden Kräfte nach $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gelangen, so müssen wieder die Wirkungen oder Arbeitsgrössen der in entgegengesetztem Sinn wirkenden Kräfte, d. h. die Produkte aus Kräften und Wegen einander gleich sein, wobei man unter Weg immer die direkte Annäherung oder Entfernung vom Ziel in der Richtung der Kraft versteht.

Antwort. Stört man das Gleichgewicht nur insoweit, dass die von den Angriffspunkten der Kräfte zurückgelegten Wege unendlich klein werden, und schätzt diese unendlich kleinen Wege nach den Richtungen der Kräfte, so gilt der oben erwähnte Satz allgemein und für jede Anzahl von Kräften, welche, auf ein System von fest miteinander verbundenen Punkten wirkend, im Gleichgewicht stehen.

Frage 264. Mit welchem Namen bezeichnet man den in der Antwort auf die vorige Frage enthaltenen Grundsatz, wie lautet derselbe mit andern Worten und wie lässt sich derselbe erläutern?

Erkl. 288. Unter virtueller Geschwindigkeit oder virtueller Verschiebung eines Punktes versteht man die gerade Linie, welche derselbe beschreibt, wenn das Punktsystem oder der Körper, zu welchem derselbe

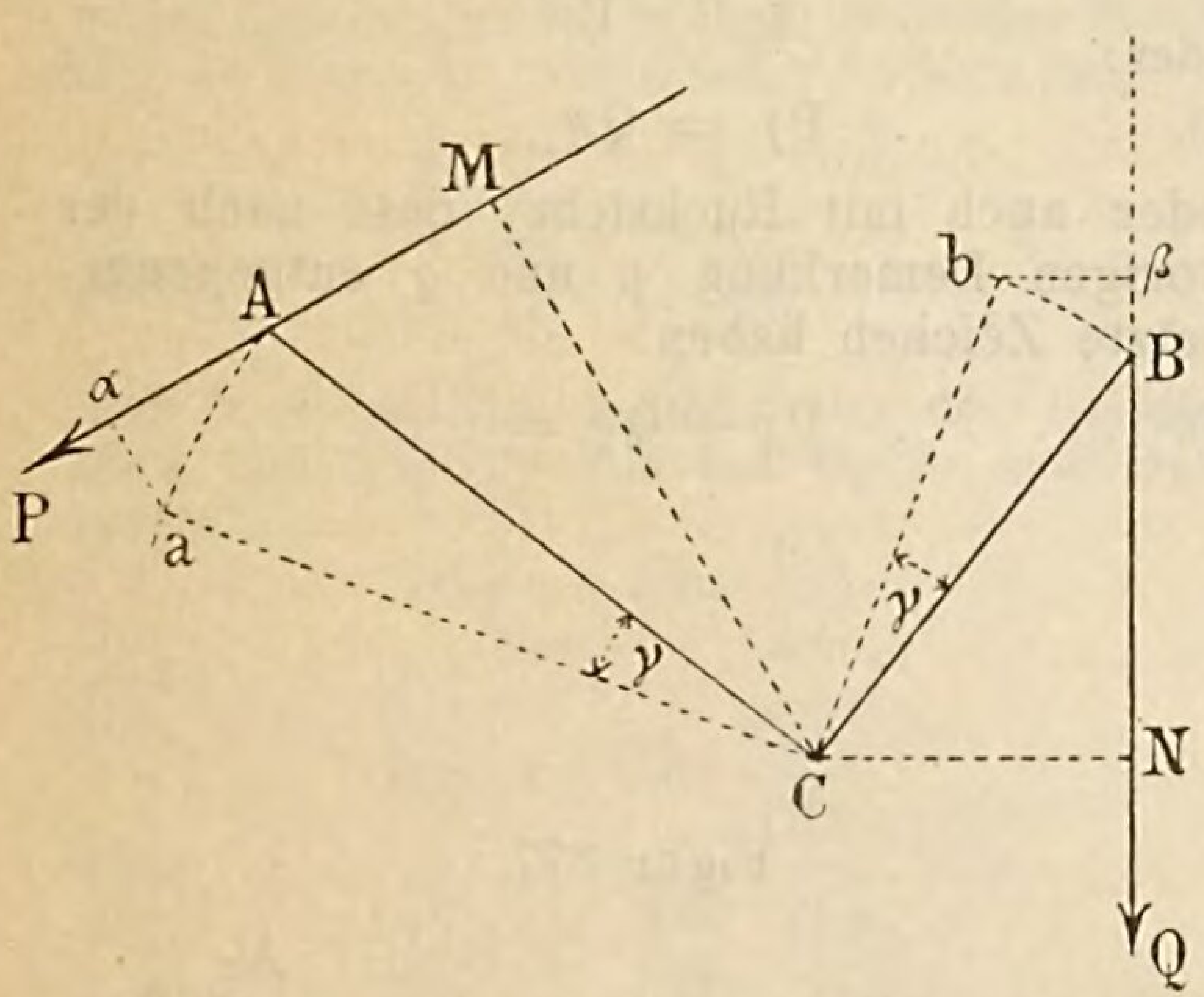
Antwort. Der in der obigen Antwort ausgesprochene Grundsatz der Mechanik führt den Namen „Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten“ und lautet auch so:

Wenn irgend ein System von Punkten im Gleichgewicht ist und jeder Punkt eine mit den Bedingungen

gehört, in eine Lage gebracht wird, die unendlich wenig von der früheren verschieden, aber mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist. Die Bezeichnung „virtuell" (virtus, Fähigkeit, Möglichkeit) soll ausdrücken, dass diese Verschiebungen nur als möglich gedacht werden, nicht wirklich erfolgende sind.

Projiziert man (siehe Erkl. 125) diese von einem Punkt beschriebene gerade Linie die virtuelle Verschiebung auf die Richtung der an diesem Punkt angreifenden Kraft, so heisst diese Projektion die virtuelle Geschwindigkeit bezogen auf diese Kraft. Die der virtuellen Verschiebung entsprechende Arbeit heisst virtuelle Arbeit und es wird also dann Gleichgewicht stattfinden, wenn die von einem Teil der Kräfte produzierte oder erzeugte virtuelle Arbeit der von dem noch übrigen Teil, welcher dann gewöhnlich Widerstand genannt wird, virtuell erzeugten Arbeit gleich, aber entgegengesetzt ist. Wenn somit die Summe der virtuellen Arbeiten verschwindet, so findet Gleichgewicht statt und umgekehrt.

Figur 376.



Erkl. 289. Nennt man der Kürze halber das Produkt aus der Intensität einer Kraft P in die virtuelle Geschwindigkeit p ihres Angriffspunktes nach ihrer Richtung genommen, also Pp (resp. Qq), das *virtuelle Moment* dieser Kraft, und nimmt dieses positiv oder negativ, je nachdem p (resp. q) in die direkte oder entgegengesetzte Richtung der Kraft fällt, so lässt sich das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit allgemein wie folgt ausdrücken:

Wenn irgend ein System von Angriffspunkten im Gleichgewicht ist und jeder Punkt eine mit den Bedingungen des Systems verträgliche, unendlich kleine Verschiebung erleidet, so ist die algebraische Summe aus den virtuellen Momenten aller Kräfte gleich Null, wie auch die Verschiebung geschehen möge.

Umgekehrt: *Sind alle die Momente zusammen gleich Null, so ist das System im Gleichgewicht.*

des Systems verträgliche, unendlich kleine Verschiebung erleidet, so ist die algebraische Summe der Produkte aus den Kräften in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, diese nach den Richtungen der Kräfte genommen, gleich Null.

Um diesen Satz zu erläutern, seien die beiden Kräfte P und Q (s. Fig. 376) auf den um C drehbaren Winkelhebel ACB im Gleichgewicht, folglich, wenn $\overline{CM}$ und $\overline{CN}$ auf den Richtungen der Kräfte P und Q senkrecht stehen

1). $P.\overline{CM} = Q.\overline{CN}$

Kommen nun durch eine unendlich kleine Bewegung dieses Hebels die Angriffspunkte A und B nach a und b, wobei die unendlich kleinen Winkel A Ca und B Cb einander gleich werden (die wir durch γ bezeichnen wollen), so sind die unendlich kleinen Bögen Aa und Bb die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte A und B, und wenn man auf die Richtungen der Kräfte $\overline{a\alpha}$ und $\overline{b\beta}$ fällt, so sind die Projektionen[1]) $\overline{A\alpha}$ und $\overline{B\beta}$ die virtuellen Geschwindigkeiten dieser Angriffspunkte nach den Richtungen der Kräfte genommen. (In vielen Fällen fallen diese Projektionen mit den virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte selbst zusammen). Dabei wird $\overline{A\alpha}$, weil diese Projektion nach der Richtung der Kraft P gezählt wird, als *positiv*, $\overline{B\beta}$ dagegen, als in die Rückverlängerung der Kraft Q fallend, als *negativ* angenommen.

Da der kleine Bogen Aa als eine gerade Linie angesehen werden kann, so ist:

$$\triangle A a \alpha \sim \triangle CAM$$

und man hat

$$\overline{CM} : \overline{CA} = \overline{A\alpha} : \overline{Aa}$$

und daraus, wenn man $A\alpha = p$ setzt:

$$p = \frac{\overline{CM}\,.\,\overline{Aa}}{\overline{CA}}$$

Ebenso folgt analog aus den beiden ähnlichen Dreiecken B$b\beta$ und BCN, dass

$$\overline{CN} : \overline{CB} = \overline{B\beta} : \overline{Bb}$$

oder wenn $\overline{B\beta} = q$ gesetzt wird, so ist:

$$q = \frac{\overline{CN}\,.\,\overline{Bb}}{\overline{CB}}$$

Nun ist aber Bogen

$$\overline{Aa} = \overline{CA}\,.\,\gamma$$

oder:

[1]). Siehe Erkl. 125.

Erkl. 290. Wenn wir die Frage nach dem Entdecker des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten beantworten wollen, so werden wir zurückgewiesen auf die Zeit, in der man überhaupt angefangen hat, die theoretische Mechanik genauer auszubilden.

Nach dem Urteile des *Lagrange* ist *Guido Ubaldo* (1545—1607) als derjenige Mathematiker zu nennen, der zuerst von diesem Prinzip Anwendung macht. Aber Ubaldo schien die Fruchtbarkeit und Wichtigkeit seiner Erfindung nicht zu ahnen, indem er dieselbe nur in dem Gleichgewicht des Hebels und des Flaschenzugs erkannte, aber auf keine derjenigen Maschinen anzuwenden suchte, die in jenen Zeiten den eigentlichen Gegenstand der Statik bildeten, als die Schraube, der Keil, die schiefe Ebene etc. Aehnliches lässt sich über *Galileis* Untersuchungen in Bezug auf dieses Prinzip sagen. Er zeigte allerdings die Anwendung des Prinzips auf die letztgenannten Maschinen und er betrachtete dasselbe sogar ausdrücklich als ein allgemeines Gesetz der Statik, wie man in seiner „Mechanik“ und in dem dritten seiner „Dialoge“ sieht. Später benützte *Descartes* dasselbe Prinzip, um daraus das Gleichgewicht aller damals bekannten einfachen Maschinen zu erläutern, aber ohne dabei seiner Vorgänger zu erwähnen. Aber auch er scheint die Allgemeinheit dieses Prinzips keineswegs nach dem ganzen Wert desselben erkannt zu haben, vielmehr verdanken wir die Einführung dieses Prinzips in die Wissenschaft, und was noch mehr ist, die Errichtung des ganzen wissenschaftlichen Gebäudes auf dieser Basis, dem berühmten Geometer *Lagrange*, der dadurch der Mechanik nicht nur eine neue, sondern auch zugleich die letzte Gestalt gegeben, da es unmöglich scheint, sie noch allgemeiner und einfacher zugleich zu behandeln. Durch ihn ist die ganze Mechanik im Grunde auf eine einzige Formel zurückgeführt worden, deren blosse Entwicklung, die nur Sache der reinen Analysis ist, die Auflösung aller Probleme enthält, die man in der Mechanik aufstellen kann.

Erkl. 291. Um von diesem fruchtbaren, das allgemeine Prinzip des Gleichgewichts enthaltenden Satz einige Anwendungen zu zeigen, mögen folgende Beispiele dienen.

Beispiel 1). Es seien die beiden Kräfte P und Q, welche an den Punkten A und B senkrecht auf den um C drehbaren Hebel AB (siehe Fig. 377) wirken, unter sich, also am Hebel im Gleichgewicht.

Stört man das Gleichgewicht in der Art, dass der Punkt A nach A_1 und B nach B_1 kommt, und sind die Wege $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ unendlich klein, so sind $\overline{Aa}$ und $\overline{Bb}$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte A und B nach den Richtungen der Kräfte P und Q (und zwar ist die erstere negativ, die letztere positiv). Es ist also zufolge des hier in Rede stehenden Satzes:

$$\frac{\overline{Aa}}{\overline{CA}} = \gamma$$

und ebenso:

$$\frac{\overline{Bb}}{\overline{CB}} = \gamma$$

daher auch, diese Werte in die beiden vorhergehenden Gleichungen substituiert:

$$p = \overline{CM} \cdot \gamma$$

und

$$q = \overline{CN} \cdot \gamma$$

oder:

$$\frac{p}{q} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$$

und da aus der obigen Bedingungsgleichung:

1). $\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}} = \frac{Q}{P}$

folgt, so ist auch:

$$\frac{p}{q} = \frac{Q}{P}$$

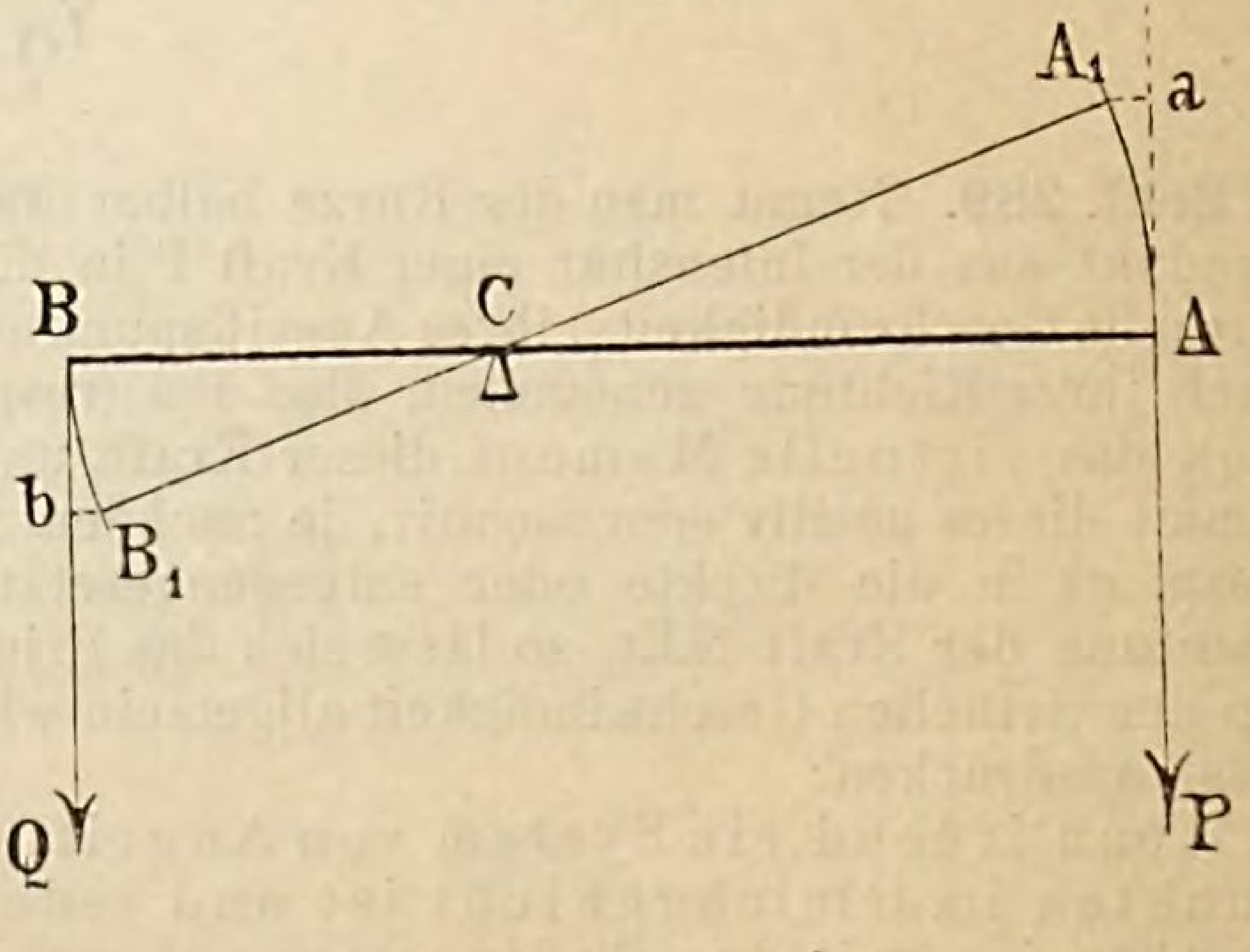
oder:

2). $Pp = Qq$

oder auch mit Rücksicht, dass nach der vorigen Bemerkung p und q entgegengesetzte Zeichen haben:

3). $Pp + Qq = 0$

Figur 377.



$$P . \overline{Aa} = Q . \overline{Bb}$$

oder: $$P : Q = \overline{Bb} : \overline{Aa}$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AA_1a und BB_1b und da AA_1 und BB_1 ähnliche Kreisbögen sind, ist aber

$$\overline{Bb} : \overline{Aa} = \overline{BB_1} : \overline{AA_1} = \overline{BC} : \overline{AC}$$

folglich auch:

$$P : Q = \overline{BC} : \overline{AC}$$

übereinstimmend mit dem bekannten Satz fürs Gleichgewicht des Hebels.

Beispiel 2). Wir nehmen ferner den in Antwort auf die Frage 237 behandelten Fall der beiden schiefen Ebenen, auf welchen (siehe Fig. 378) zwei durch eine Schnur miteinander verbundene Körper im Gleichgewicht stehen.

Wird das Gleichgewicht gestört, und beschreiben die Schwerpunkte O, O_1 als Angriffspunkte der Kräfte Q und Q_1 die unendlich kleinen Wege $\overline{Oa}$ und $\overline{O_1a_1}$, so sind diese die virtuellen Geschwindigkeiten dieser Punkte und $\overline{On}$ und $\overline{O_1n_1}$ ihre Projektionen auf die Kräfte; es ist also infolge des in Rede stehenden Satzes, und da hier nur zwei Glieder vorkommen,

$$Q . \overline{On} = Q_1 . \overline{O_1n_1}$$

oder: $$\frac{Q}{Q_1} = \frac{\overline{O_1n_1}}{\overline{On}}$$

und da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Ona und ACB, sowie von $O_1n_1a_1$ und BCD sofort

$$\overline{On} = \overline{CB} \cdot \frac{\overline{Oa}}{\overline{AC}}$$

und

$$\overline{O_1n_1} = \overline{CB} \cdot \frac{\overline{O_1a_1}}{\overline{CD}}$$

also

$$\frac{\overline{O_1n_1}}{\overline{On}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{O_1a_1}}{\overline{Oa}}$$

oder: $$\frac{\overline{O_1n_1}}{\overline{On}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

weil $$\overline{O_1a_1} = \overline{Oa} \text{ ist,}$$

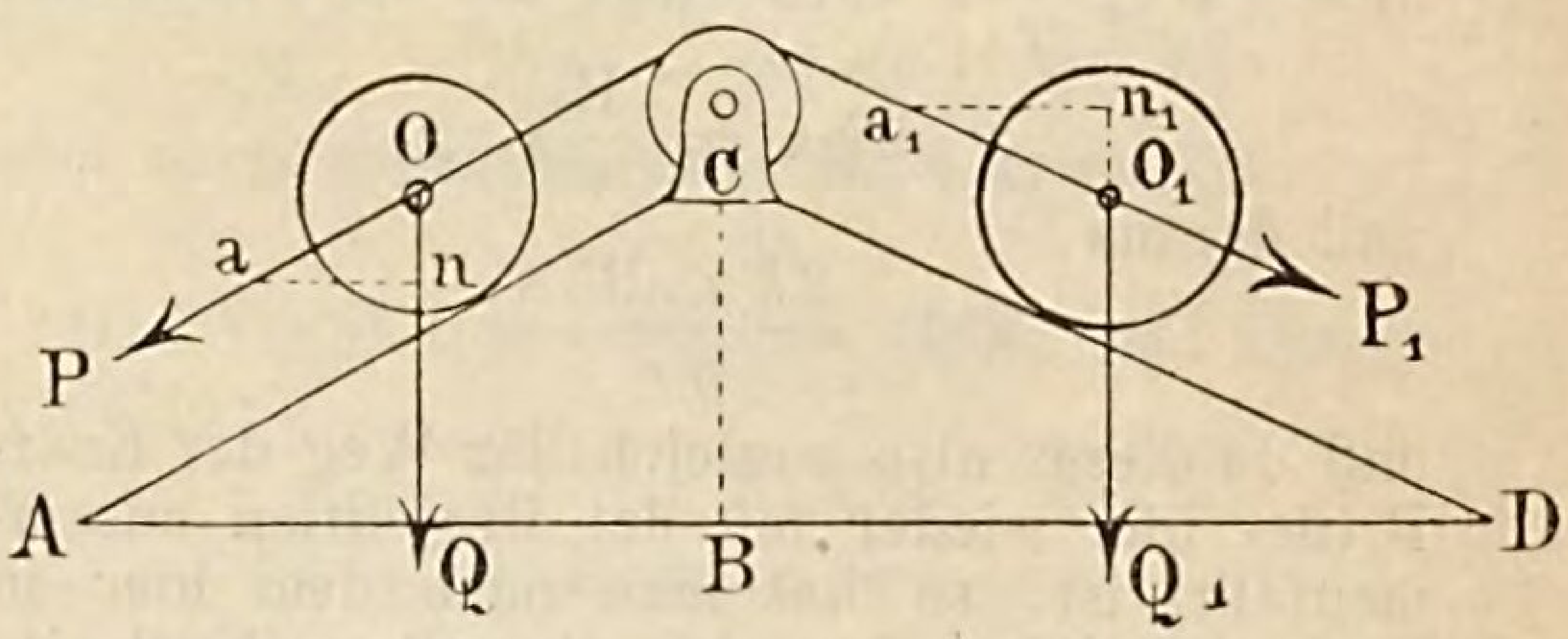
auch $$\frac{Q}{Q_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

oder: $$Q : Q_1 = \overline{AC} : \overline{CD}$$

wie in Antwort auf Frage 237.

Beispiel 3). Es sei bei der Schraube ohne Ende durch Störung des Gleichgewichts der beiden Kräfte P und Q, welche an den Punkten D und r (siehe Fig. 379) wirken, der Punkt r nach o gekommen, also der unendlich kleine Bogen $\overline{ro}$ die virtuelle Geschwindigkeit von r, deren Projektion auf die Kraft Q sofort wieder mit diesem Bogen selbst zusammenfällt, indem der Weg dieses Punktes r auch der Weg

Figur 378.



der Last Q ist. Um nun auch den gleichzeitigen Weg des Angriffspunktes D der Kraft P zu finden, bemerke man, dass ein Punkt in der Peripherie des gezahnten Rades R vom Halbmesser R in derselben Zeit den Bogen

$$\frac{R}{r}\cdot\overline{ro} = \frac{R}{r}\cdot s$$

beschreibt, wenn man Bogen

$$\overline{ro} = s$$

setzt. Da auf eine ganze Umdrehung der Schraubenspindel A, d. i. wenn der Angriffspunkt D der Kraft P einen vollen Kreis oder den Weg $2k\pi$ beschreibt, ein Fortrücken dieser Peripherie um die Höhe g eines Schraubengangs statthat, so findet man, welchen Teil der Peripherie dieser Punkt D beschreiben muss, während ein Punkt der Peripherie des Rades R diesen Weg $\frac{R}{r}s$ zurücklegt, aus der Proportion

$$g : 2k\pi = \frac{R}{r}s : x$$

und daraus

$$x = \frac{2k\pi \,.\, R \,.\, s}{g\,r}$$

und da dieser also zugleich der Weg der Kraft P (der hier wieder mit der Projektion zusammenfällt) ist, so hat man nach dem hier in Rede stehenden Satz der virtuellen Geschwindigkeiten

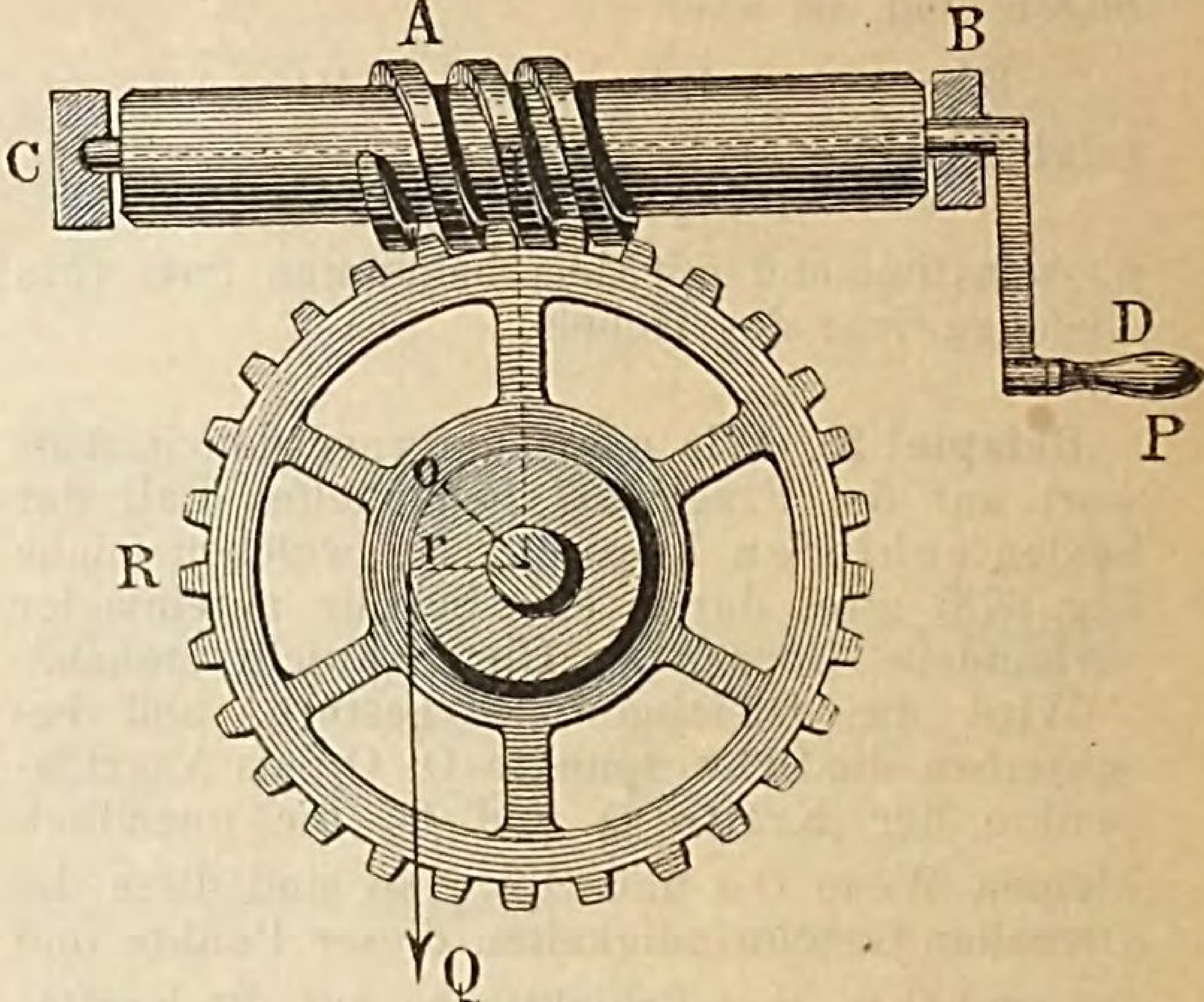
$$P\cdot\frac{2k\pi \,.\, R \,.\, s}{g\,r} = Q\,s$$

oder:

$$P : Q = g\,r : 2k\pi \,.\, R$$

genau so wie in Antwort auf Frage 256.

Figur 379.



ε). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 320. Welchen Neigungswinkel hat eine schiefe Ebene, wenn
a). die Höhe $^1/_5$ der Länge,
b). die Höhe $^1/_8$ der Länge beträgt?

Hilfsrechnungen:

a). $\log 0{,}2 = 0{,}3010300 - 1$
$\qquad\qquad\qquad +9 \qquad -9$
$\log \sin \alpha = 9{,}3010300 - 10$

mithin:
num-log sin α oder Winkel $\alpha = 11^0\,32'\,10''$
oder genau: $11^0\,32'\,13{,}06''$

b). . . . $\log 0{,}125 = 0{,}0969100 - 1$
$\qquad\qquad\qquad +9 \qquad -9$
$\log \sin \alpha = 9{,}0969100 - 10$

mithin:
num-log sin α oder Winkel $\alpha = 7^0\,11'$
oder genau: $7^0\,10'\,50{,}71''$

Auflösung. Die Höhe der schiefen Ebene durch ihre Länge dividiert, gibt den Sinus des Neigungswinkels derselben. Bezeichnet man letzteren mit α, die Höhe mit h und die Länge mit l, so ist

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

a). . . . $\sin \alpha = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b). . . . $\sin \alpha = \frac{1}{8} = 0{,}125$

folglich ist:
a). . . . $\log \sin \alpha = \log 0{,}2$
b). . . . $\log \sin \alpha = \log 0{,}125$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung für Winkel α:
a). $11^0\,32'\,10''$
b). $7^0\,11'$

Aufgabe 321. Bei einer Eisenbahnstrecke beträgt der Neigungswinkel $\alpha = 22' \, 55''$, bei der Semeringbahn dagegen ist $\alpha = 1^0 \, 38' \, 14''$; wie verhält sich in jedem der beiden Fälle die Länge zur Höhe der gegebenen schiefen Ebenen?

Hilfsrechnungen:

1). $\log 1 = 10{,}0000000 - 10$
$- \log \sin 22' \, 55'' = -7{,}8238715 + 10$
$\log l = 2{,}1761285$

mithin:
num-log l oder $l = 150$

2). $\log 1 = 10{,}0000000 - 10$
$- \log \sin 1^0 \, 38' \, 14'' = -8{,}4559262 + 10$
$\log l = 1{,}5440738$

mithin:
num-log l oder $l = 35$

Auflösung. Da nach der vorigen Aufgabe

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}$$

so ist, wenn $h = 1$ angenommen wird:

$$l = \frac{1}{\sin \alpha}$$

oder:

$$\log l = \log 1 - \log \sin \alpha$$

Setzen wir in diese Gleichung die gegebenen Zahlenwerte ein, so ergibt sich:

$$\log l = \log 1 - \log \sin 22' \, 55''$$

woraus man nach nebenstehender Hilfsrechn. 1). erhält:

$$l = 150$$

Im zweiten Fall ist:

$$\log l = \log 1 - \log \sin 1^0 \, 38' \, 14''$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$l = 35$$

Das Verhältnis zwischen Höhe und Länge ist also:

a). $h : l = 1 : 150$
b). $h : l = 1 : 35$

Aufgabe 322. Welche Kraft ist erforderlich, um einen Körper von 56 kg auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht zu erhalten, wenn der Neigungswinkel $7^0 \, 10' \, 50''$ beträgt, und wie gross ist der Druck auf die schiefe Ebene:

a). wenn die Kraft || der Länge und
b). || der Basis wirkt?

Hilfsrechnungen:

1). $56 . \sin 7^0 10' 50'' = \log 56 + \log \sin 7^0 10' 50''$
$\log 56 = 1{,}7481880$
$+ \log \sin 7^0 10' 50'' = 9{,}0968980 - 10$
$\log P = 0{,}8450860$

mithin:
num-log P oder $P = 6{,}9998$

2). $56 . \cos 7^0 10' 50'' = \log 56 + \log \cos 7^0 10' 50''$
$\log 56 = 1{,}7481880$
$+ \log \cos 7^0 10' 50'' = 9{,}9965805 - 10$
$\log D = 1{,}7447685$

mithin:
num-log D oder $D = 55{,}560$

3). . $56 . \operatorname{tg} 7^0 \, 10' \, 50'' = \log 56 + \log 7^0 \, 10' \, 50''$
$\log 56 = 1{,}7481880$
$+ \log \operatorname{tg} 7^0 \, 10' \, 50'' = 9{,}1003175$
$\log P = 0{,}8485055$

mithin:
num-log $P = 7{,}055$

Auflösung. a). Nach Gleichung 3). in Antwort auf Frage 229 ist:

$$P = Q . \sin \alpha$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 56 . \sin 7^0 \, 10' \, 50''$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P = 6{,}9998 \text{ oder ca. } 7 \text{ kg}$$

Der hierbei herrschende Druck ergibt sich aus Gleichung 2). in Antwort auf Frage 230, wonach:

$$D = Q . \cos \alpha$$

oder die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt:

$$D = 56 . \cos 7^0 \, 10' \, 50''$$

woraus man nach nebenstehender Hilfsrechn. 2). erhält:

$$D = 55{,}560 \text{ kg.}$$

b). Wirkt die Kraft || der Basis der schiefen Ebene, so ist nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 231:

$$P = Q . \operatorname{tg} \alpha$$

oder:

$$P = 56 . \operatorname{tg} 7^0 \, 10' \, 50''$$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$P = 7{,}055 \text{ kg.}$$

$$4). \ldots \frac{56}{\cos 7^0 10' 50''} = \log 56 - \log \cos 7^0 10' 50''$$

$$\begin{aligned} \log 56 &= 1{,}7481880 \\ -\log \cos 7^0 10' 50'' &= -9{,}9965805 \\ \hline \log D &= 1{,}7516075 \end{aligned}$$

mithin:

num-log D oder D = 56,443

Der Druck D ergibt sich aus Gleichung 2). in Antwort auf Frage 232, wonach

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

oder:

$$D = \frac{56}{\cos 7^0 10' 50''}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$D = 56{,}443 \text{ kg}.$$

Aufgabe 323. Um mittels einer Schrotleiter von 2,75 m Länge ein Fass auf einen 0,8 m hohen Wagen zu rollen, ist ohne Rücksicht auf die Reibung eine Kraft von 87,272 kg nötig.

a). Wie gross ist das Gewicht des Fasses?

b). Welchen Druck erleidet die Schrotleiter?

Hilfsrechnungen.

$$1). \ldots \frac{87{,}272 \,.\, 2{,}75}{0{,}8} = 109{,}09 \,.\, 2{,}75$$

$$\begin{array}{r} 54545 \\ 76363 \\ 21818 \\ \hline 299{,}9975 \end{array}$$

oder ca. 300 kg.

$$2). \ldots 2{,}75 \,.\, 2{,}75 \qquad 0{,}8 \,.\, 0{,}8 = 0{,}64$$

$$\begin{array}{r} 1375 \\ 1925 \\ 550 \\ \hline 7{,}5625 \\ -0{,}64 \end{array}$$

$$\sqrt{6{,}9225} = 2{,}631$$

$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 4 \mid 292 \\ \;\;276 \\ \hline 52 \mid 1625 \\ \;\;1569 \\ \hline 526 \mid 5600 \end{array}$$

$$3). \ldots \frac{300 \,.\, 2{,}631}{2{,}75} = 12 \,.\, 2{,}631 : 11$$

$$= 3157{,}2 : 11 = 287$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 95 \\ 88 \\ \hline 77 \\ 77 \\ \hline \text{''} \end{array}$$

Auflösung. Nehmen wir an, dass die Kraft || zur Länge der schiefen Ebene wirkt, dann ist nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 229:

$$Q = P \cdot \frac{l}{h}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{87{,}272 \,.\, 2{,}75}{0{,}8}$$

hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 1). für die Last:

$$Q = 300 \text{ kg oder } 6 \text{ Zentner}.$$

b). Der Druck ergibt sich aus Gleich. 1). in Antwort auf Frage 230, wonach

$$D = Q \cdot \frac{b}{l}$$

Die Basis b muss aber erst aus der Länge l und der Höhe h berechnet werden. Dieselbe beträgt nach dem pythagor. Lehrsatz (siehe Erkl. 26):

$$b = \sqrt{l^2 - h^2}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$b = \sqrt{2{,}75^2 - 0{,}8^2}$$

hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$b = 2{,}631$$

Setzen wir diesen Wert nebst den entsprechenden gegebenen Zahlenwerten in die obige Bestimmungsgleichung, so erhalten wir:

$$D = 300 \cdot \frac{2{,}631}{2{,}75}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$D = 287 \text{ kg}$$

Soll aber der Druck D direkt aus den gegebenen Zahlenwerten, also aus P, l und h berechnet werden, ohne dass erst die Last Q ermittelt wird, so haben wir in die Gleichung:

$$D = Q \cdot \frac{b}{l}$$

für Q den entsprechenden Wert:

$$Q = P \cdot \frac{h}{l}$$

einzusetzen und erhalten so:

$$D = P \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{b}{l}$$

oder:

$$D = P \cdot \frac{b}{l}$$

oder mit Berücksichtigung der Zahlenwerte:

$$D = \frac{87{,}272 \,.\, 2{,}631}{0{,}8}$$

hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 4). gleich wie oben:

$$D = 287$$

4). . . $\frac{87{,}272 \,.\, 2{,}631}{0{,}8} = 109{,}09 \,.\, 2{,}631$

```
 23679
23679
2631
287,01579
```

Aufgabe 324. Wie gross muss der Neigungswinkel einer schiefen Ebene sein, wenn der senkrechte Druck eines Körpers gegen die Länge der schiefen Ebene gleich sein soll der a). mit der Länge, b). mit der Basis derselben parallel wirkenden Kraft, welche den Körper im Gleichgewicht hält, und c). wie gross ist bei dem so ermittelten Winkel in beiden Fällen der Druck und die Kraft, wenn die Last 1000 kg beträgt?

Hilfsrechnungen.

1). . . $1000 \,.\, \sin 45^0 = \log 1000 + \log \sin 45^0$

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$
$$+ \log \sin 45^0 = 9{,}8494850-10$$
$$\log P = 2{,}8494850$$

mithin:
num-log P oder $P = 707{,}1$

2). . . . $\log 1000 = 3{,}0000000$

$$- \log \cos 45^0 = -9{,}8494850-10$$
$$\log D = 3{,}1505150$$

mithin:
num-log $D = 1414{,}2$

Auflösung. a). Wenn die Kraft parallel der Länge der schiefen Ebene wirkt, dann ist nach Gleich. 3). in Antw. auf Frage 229:

$$P = Q \,.\, \sin \alpha$$

und nach Gleich. 2). in Antw. auf Frage 230 ist:

$$D = Q \,.\, \cos \alpha$$

Da nun gefordert wird, dass

$$P = D$$

so muss auch

$$Q \,.\, \sin \alpha = Q \,.\, \cos \alpha$$

oder:

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

also:

$$\frac{h}{l} = \frac{b}{l}$$

oder:

$$h = b$$

Die schiefe Ebene bildet also mit ihrer Höhe und Basis ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck und es beträgt demnach der Neigungswinkel

$$\alpha = 45^0 \text{ oder } \frac{1}{2} R$$

b). Wirkt die Kraft || der Basis, dann ist nach Antw. auf Frage 231 resp. 232:

$$P = Q \,.\, \text{tg}\, \alpha$$

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

also muss, da P = D sein soll:

$$Q \,.\, \text{tg}\, \alpha = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

oder:

Erkl. 292. Dieselben Resultate würden sich auch ohne Anwendung trigonometrischer Rechnung ergeben haben. Ist der Neigungswinkel 45°, dann ist die Länge $l = \sqrt{2}$, wenn wir die Höhe $h = 1$ annehmen, denn es muss in diesem Fall

$$l = \sqrt{1+1} \text{ sein.}$$

Da nun, wenn die Kraft || zur Länge wirkt,

$$P = Q \cdot \frac{h}{l}$$

so erhält man durch Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte:

$$P = \frac{1000 . 1}{\sqrt{2}} = 707$$

desgleichen

$$D = Q \cdot \frac{b}{l}$$

oder:

$$D = \frac{1000 . 1}{\sqrt{2}} = 707$$

Wirkt die Kraft || zur Basis, dann ist:

$$P = Q \cdot \frac{h}{b}$$

oder:

$$P = \frac{1000 . 1}{1} = 1000$$

und

$$D = Q \cdot \frac{l}{b}$$

oder:

$$D = \frac{1000 \sqrt{2}}{1} = 1414$$

$$\text{tg}\, \alpha . \cos \alpha = 1$$

oder:

$$\frac{h}{b} \cdot \frac{b}{l} = 1$$

oder:

$$h = l$$

sein, was auf keinen Fall möglich ist, da die Länge l als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks immer grösser sein muss als die Höhe h. Es ist also unmöglich, dass der Druck = der Kraft ist, welche || zur Basis wirkt, vielmehr wird der Druck in diesem Fall stets grösser sein als die Last Q.

c). Wirkt die Kraft || zur Länge der schiefen Ebene und beträgt die Last 1000 kg und der Neigungswinkel 45°, dann ist:

$$P = Q . \sin \alpha$$

oder:

$$P = 1000 . \sin 45^0$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P = 707 \text{ kg}$$

der Druck D = P also

$$D = 707 \text{ kg}$$

Wirkt aber die Kraft P parallel zur Basis bei einem Neigungswinkel von 45°, dann ist bei 1000 kg Last:

$$P = 1000 . \text{tg}\, \alpha$$

Da aber in diesem Fall $\text{tg}\, \alpha = 1$ ist, so ist:

$$P = Q = 1000 \text{ kg}$$

der Druck ist in diesem Fall:

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

oder:

$$D = \frac{1000}{\cos 45^0}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$D = 1414{,}2 \text{ kg.}$$

Aufgabe 325. Eine Kugel von 5 cm Radius und dem spezif. Gewicht von 7,207, liegt auf einer schiefen Ebene von 50 cm Höhe und übt beim Herabrollen einen Druck von 3 kg auf die Länge der Ebene aus.

a). Wie gross ist der Neigungswinkel? b). Wieviel beträgt die Länge der schiefen Ebene? c). Wie gross ist die Kraft, welche die Kugel am Herabrollen verhindert?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{4 . 125 . 3{,}14159}{3} = \frac{1000 . 3{,}14159}{6}$
$= 3141{,}59 : 6 = 523{,}598$

Auflösung. a). Zunächst muss das Gewicht Q der Kugel ermittelt werden. Das Volumen einer Kugel ist:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Körperberechnungen, I. Band Seite 113)

oder den gegebenen Zahlenwert eingesetzt:

$$V = \frac{4}{3} \cdot 5 . 5 . 5 . 3{,}14159$$

hieraus erhält man nach Hilfsrechn. 1).:

$$V = 523{,}598 \text{ ccm}$$

1 ccm Wasser wiegt 1 Gramm, und da das spez. Gewicht der Kugel 7,207 beträgt, so wiegt jeder Kubikcentimeter von dem

Stoff der Kugel 7,207 Gramm, folglich wiegt die ganze Kugel:

$$Q = 523{,}598 . 7{,}207$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$Q = 3{,}773 \text{ kg.}$$

Da die Kugel beim Herabrollen, also wenn P parallel zur Länge der Ebene wirkt, einen Druck von 3 kg ausübt, und hieraus der Neigungswinkel α berechnet werden soll, so ist nach Gleich. 2). in Antw. auf Frage 230:

$$\cos\alpha = \frac{D}{Q}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$\cos\alpha = \frac{3}{3{,}773}$$

hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$\alpha = 37^0\,20'$$

b). Um die Länge der schiefen Ebene zu ermitteln, ist zu berücksichtigen, dass

$$\frac{h}{l} = \sin\alpha$$

oder:

$$l = \frac{h}{\sin\alpha}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$l = \frac{50}{\sin 37^0\,20'}$$

hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$l = 82{,}447 \text{ cm.}$$

c). Die parallel der Länge der Ebene wirkende Kraft lässt sich auf zweierlei Weise berechnen, und ist nach Formel 2). in Antw. auf Frage 229:

$$P = Q . \sin\alpha$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 3{,}773 . \sin 37^0\,20'$$

hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 5).:

$$P = 2{,}288 \text{ kg}$$

Hilfsrechnungen.

2). . . . 523,598 . 7,207

$$\begin{array}{r} 3665186 \\ 1047196 \\ 3665186 \\ \hline 3773{,}570786 \text{ g} = 3{,}773 \text{ kg} \end{array}$$

3). . . $\log\cos\alpha = \log 3 - \log 3{,}773$

$$\begin{array}{rl} \log 3 = & 0{,}4771213 \\ -\log 3{,}773 = & -0{,}5766868 \\ \hline \log\cos\alpha = & 9{,}9004345-10 \end{array}$$

mithin:
num-log $\cos\alpha$ oder $\alpha = 37^0\,20'$

4). . . $\log l = \log 50 - \log\sin 37^0\,20'$

$$\begin{array}{rl} \log 50 = & 1{,}6989700 \\ -\log\sin 37^0\,20' = & -9{,}7827958+10 \\ \hline \log l = & 1{,}9161742 \end{array}$$

mithin ist:
num-log l oder $l = 82{,}447$

5). . . $\log P = \log 3{,}773 + \log\sin 37^0\,20'$

$$\begin{array}{rl} \log 3{,}773 = & 5{,}5766868 \\ +\log\sin 37^0\,20' = & 9{,}7827958-10 \\ \hline \log P = & 0{,}3594826 \end{array}$$

mithin:
num-log P oder P = 2,288

Aufgabe 326. Auf einer Bergstrasse von 5 % Steigung betragen die Bewegungshindernisse $^1/_{30}$ der Last. Welche Kraft ist nötig, um einen Wagen von 10 Zentner Gewicht am Hinabrollen zu verhindern

a). ohne Rücksicht auf die Reibung,
b). mit " " " "
c). welche Kraft ist nötig, um den Wagen in die Höhe zu ziehen?

Auflösung. Wenn die Steigung einer schiefen Ebene 5 % beträgt, so heisst das, es kommen auf 100 m Länge 5 m Höhe, oder die Steigung:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{20}$$

a). Nach Formel 2). in Antw. auf Frage 229 ist aber:

$$P = Q \cdot \frac{h}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = \frac{10 . 50 . 1}{20}$$

oder:

$$P = 25 \text{ kg}$$

b). Diese Kraft P würde nötig sein, wenn die Ebene spiegelglatt, ohne alle Reibung wäre. Da aber eine Reibung von $^1/_{30}$ in Rechnung zu bringen ist, so wird die Kraft, welche den Wagen vor dem Herabrollen schützen soll, bedeutend geringer als 25 kg sein können, und es beträgt in diesem Fall

$$P = 500 \cdot \frac{1}{20} - 500 \cdot \frac{1}{30}$$

oder:

$$P = 500 \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right)$$

oder:

$$P = 8^1/_3 \text{ kg}$$ (siehe Hilfsrechnung)

Hilfsrechnung.

$$500\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) = 500\left(\frac{3}{60} - \frac{2}{60}\right) =$$

$$\frac{500}{60} = 8\frac{1}{3}$$

c). Soll die Last auf der schiefen Ebene emporgezogen werden, so ist nicht allein die Steigung von $^1/_{20}$, sondern auch die Reibung von $^1/_{30}$ zu überwinden, und es beträgt somit:

$$P = 500\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)$$

oder:

$$P = 500 \cdot \frac{1}{12}$$

oder:

$$P = 41^2/_3 \text{ kg}$$

Aufgabe 327. Welche Last kann auf einer Eisenbahn, deren Steigung 1:100 ist, durch eine Kraft von 112 Zentner befördert werden, wenn die Reibung $^1/_{250}$ der Last beträgt?

Auflösung. Wäre nur die Steigung zu berücksichtigen, dann wäre nach Gleich. 2). in Antw. auf Frage 229, wenn $x = Q$:

$$P = x \cdot \frac{h}{l}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$112 = x \cdot \frac{1}{100}$$

Da aber zur Ueberwindung der Reibung noch $x \cdot \frac{1}{250}$ an Kraft nötig ist, so erhalten wir die Gleichung:

$$x\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{250}\right) = 112$$

hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$x = 8000 \text{ Zentner.}$$

Hilfsrechnung.

$$\frac{x}{100} + \frac{x}{250} = 112$$

oder:

$$5x + 2x = 112 . 500$$

$$7x = 112 . 500$$

$$x = \frac{112 . 500}{7}$$

$$x = 16 . 500$$

$$x = 8000$$

Aufgabe 328. Eine Last von 500 kg soll auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $\alpha = 16^0$ beträgt, durch eine Kraft im Gleichgewicht erhalten werden, deren Richtung die Länge der schiefen Ebene unterhalb der Schwerlinie unter einem Winkel $\beta = 25^0$ schneidet.

a). Wie gross ist die Kraft P und der Druck D? Wie wäre das Resultat ausgefallen, wenn

b). die Kraft parallel der Länge und

c). parallel der Basis gewesen wäre?

Hilfsrechnungen.

1). $\log P = \log 500 + \log \sin 16^0 - \log \cos 25^0$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ + \log \sin 16^0 &= 9{,}4403381-10 \\ &\quad 2{,}1393081 \\ - \log \cos 25^0 &= -9{,}9572757+10 \\ \log P &= 2{,}1820324 \end{aligned}$$

mithin: num-log P oder P = 152,066

2). $\log D = \log 500 + \log \cos 41^0 - \log \cos 16^0$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ + \log \cos 41^0 &= 9{,}8777799-10 \\ &\quad 2{,}5767499 \\ - \log \cos 16^0 &= -9{,}98284161+10 \\ \log D &= 2{,}5939083 \end{aligned}$$

mithin: num-log D oder D = 392,562

3). . . . $\log P = \log 500 + \log \sin 16^0$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ + \log \sin 16^0 &= 9{,}4403381-10 \\ \log P &= 2{,}1393081 \end{aligned}$$

mithin: num-log P oder P = 137,819

4). . . $\log D = \log 500 + \log \cos 16^0$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ + \log \cos 16^0 &= 9{,}9828412-10 \\ \log D &= 2{,}6818112 \end{aligned}$$

mithin: num-log D oder D = 480,630

5). . . $\log P = \log 500 + \log \operatorname{tg} 16^0$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ + \log \operatorname{tg} 16^0 &= 9{,}4574964-10 \\ \log P &= 2{,}1564664 \end{aligned}$$

mithin: num-log P oder P = 143,373

6). . . $\log D = \log 500 - \log \cos 16^0$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ - \log \cos 16^0 &= -9{,}9828412+10 \\ \log D &= 2{,}7161288 \end{aligned}$$

mithin: num-log D oder D = 520,150

Auflösung. Nach Gleichung 3). in Antwort auf Frage 234 ist in diesem Fall:

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 500 \cdot \frac{\sin 16^0}{\cos 25^0}$$

hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P = 152{,}066 \text{ kg}$$

Nach Gleichung 4). in Antw. auf Frage 235 ist der Druck:

$$D = Q \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$D = 500 \cdot \frac{\cos 41^0}{\cos 16^0}$$

hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$D = 392{,}562 \text{ kg}$$

b). Wirkte die Kraft parallel der Länge, dann wäre

$P = Q \,.\, \sin \alpha$ (s. Antw. auf Frage 229)

und $D = Q \,.\, \cos \alpha$ (s. Antw. auf Frage 230)

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$P = 500 \,.\, \sin 16^0$

und $D = 500 \,.\, \cos 16^0$

hieraus erhält man nach nebenstehenden Hilfsrechnungen 3). und 4).:

$P = 137{,}819$ kg

und

$D = 480{,}630$ kg

c). Wirkte die Kraft P parallel zur Basis der schiefen Ebene, dann wäre nach Antw. auf Frage 231 und 232:

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 500 \,.\, \operatorname{tg} 16^0$$

und

$$D = \frac{500}{\cos 16^0}$$

hieraus erhält man nach nebenstehenden Hilfsrechnungen 5). und 6).:

$P = 143{,}373$ kg

und

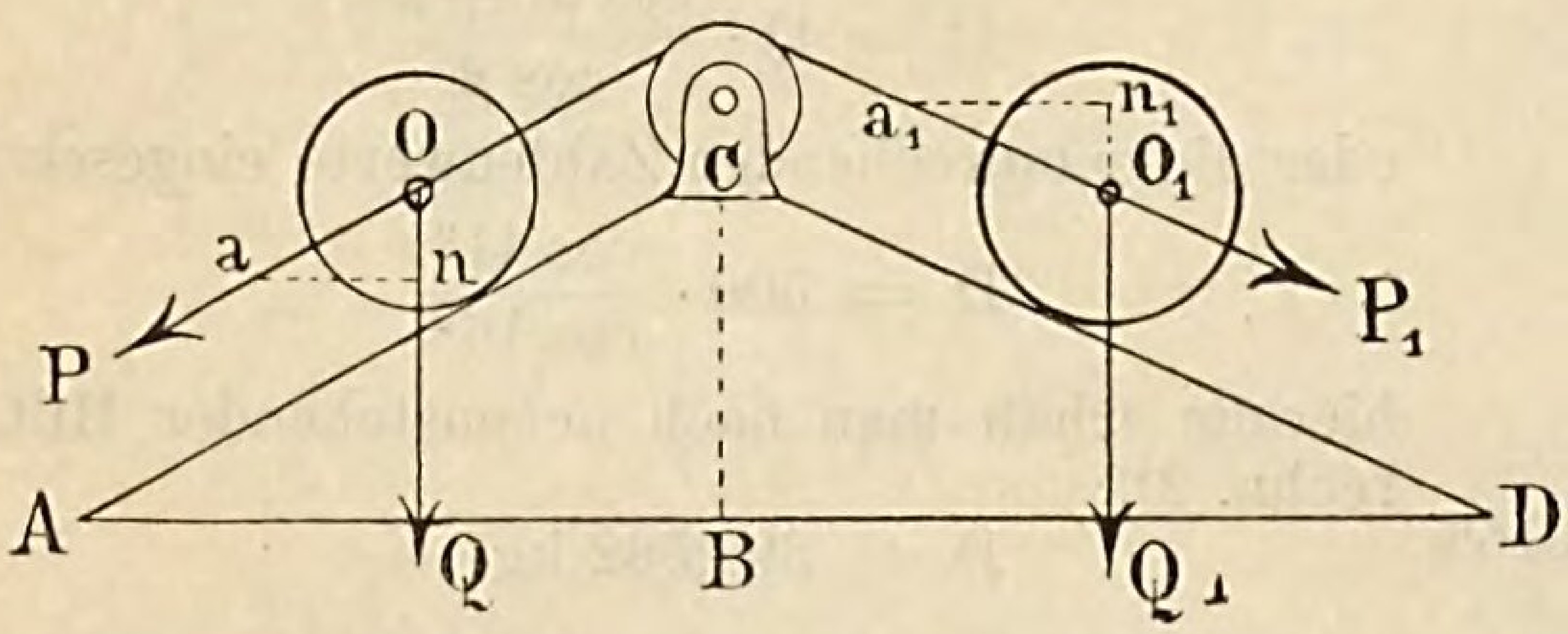
$D = 520{,}150$ kg

Aufgabe 329. Wenn die schiefe Ebene $\overline{AC}$ (siehe Fig. 380) eine Steigung von 8%, und die mit $\overline{AC}$ verbundene Ebene $\overline{DC}$ eine solche von 5% hat, welche Last kann dann auf $\overline{DC}$ durch einen auf der Ebene $\overline{AC}$ abwärtsgehenden, 40 Zentner schweren Wagen nachgezogen werden,

a). wenn die Reibung unberücksichtigt bleibt,

b). wenn die Wagen auf beiden Ebenen in eisernen Schienenbahnen laufen und die Reibung auf denselben $= \frac{1}{200}$ beträgt?

Figur 380.



Auflösung. a). Nach Antwort auf Frage 237 ist:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q \quad \text{und} \quad P_1 = \frac{h_1}{l_1} \cdot Q_1$$

Da nun

$$\frac{h}{l} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} \quad \text{und} \quad \frac{h_1}{l_1} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

beträgt und 40 Zentner $= 2000$ kg sind, Q_1 aber unbekannt ist, so ist

$$P = \frac{2}{25} \cdot 200 \quad \text{und} \quad P_1 = \frac{1}{20} x$$

Da aber $P = P_1$ sein soll, so muss auch

$$\frac{1}{20} x = \frac{2}{25} \cdot 2000$$

$$x = \frac{2}{25} \cdot 2000 \cdot 20$$

$$x = 3200$$

sein, also kann die Last $Q_1 = 3200$ kg oder 64 Zentner betragen.

b). Ohne Reibung wirken auf der einen Seite

$$P = \frac{2}{25} \cdot 2000 \text{ abwärts ziehend,}$$

durch die Reibung wird aber diese abwärts ziehende Kraft um $\frac{1}{200} \cdot 2000$ vermindert und es beträgt demnach:

$$P = \left(\frac{2}{25} - \frac{1}{200}\right) \cdot 2000$$

oder:

$$P = 150 \text{ kg} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

Auf der andern Seite muss dagegen nicht nur $\frac{1}{20}$, sondern auch noch $\frac{1}{200}$ der Last x überwunden werden, und es ist demnach:

$$P_1 = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{200}\right) x$$

oder:

$$P_1 = \frac{11}{200} x$$

Da $P = P_1$, so ist auch

$$\frac{11}{200} x = 150$$

und

$$x = \frac{150 \,.\, 200}{11}$$

oder:

$$x = 2727{,}27 \text{ kg} \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 3)}$$

d. h. der Wagen von 40 Zentner wird unter Berücksichtigung der Reibung einem Wagen von 2727,27 kg oder 54,545 Zentner das Gleichgewicht halten.

Hilfsrechnungen.

1). . . $\frac{2}{25} - \frac{1}{200} = \frac{16}{200} - \frac{1}{200} = \frac{15}{200}$

$$\frac{15}{200} \cdot 2000 = 150$$

2). . . $\frac{1}{20} + \frac{1}{200} = \frac{10}{200} + \frac{1}{200} = \frac{11}{200}$

3). . . . 30000 : 11 = 2727,27 kg

```
22
--
 80
 77
 --
  30
  22
  --
   80
   77
   --
    3
```

Aufgabe 330. Auf jeder der beiden Seiten eines gleichschenkligen Keils wirkt in senkrechter Richtung eine Last von 60 kg; jede Seite des Keils ist 24 cm, der Rücken 6 cm lang·

a). welche auf den Rücken senkrecht wirkende Kraft P ist zum Gleichgewicht nötig?

b). Welche Kraft P würde nötig sein, wenn die beiden Lasten von je 60 kg parallel dem Rücken des Keils auf seine beiden Seiten wirken?

Welche Last P ist nötig, wenn die Gesamtlast von 120 kg c). senkrecht auf die Seite, d). parallel zum Rücken des einfachen Keils wirkt?

Hilfsrechnungen.

1). . . $\sqrt{24^2 - 3^2} = 24 . 24 \quad 3 . 3$

$$= 576 - 9$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{5|67} \\ \;\;4 \\ 4|167 \\ \;\;129 \\ 46|3800 \\ \;\;\;3744 \\ \;\;\;\;5600 \end{array}$$

2). . . $\frac{120 . 3}{23,8} = 3600 : 238 = 15,12$

```
238
1220
1190
 300
 238
 620
 476
```

Auflösung. a). Wirkt am gleichschenkligen Keil die Last Q senkrecht zu den Seiten, so ist nach Gleichung 4). in Antw. auf Frage 243:

$$P = Q \cdot \frac{\frac{1}{2} R}{S}$$

Setzen wir in diese Formel die entsprechenden Zahlenwerte, so ist:

$$P = 120 \cdot \frac{3}{24}$$

oder:

$$P = 15$$

d. h. es ist zum Gleichgewicht eine senkrecht auf den Rücken des Keils wirkende Kraft von 15 kg nötig.

b). Wirkt die Last parallel zum Rücken des gleichschenkligen Keils, so ist nach Gleichung 1). in Antw. auf Frage 244:

$$P = \frac{Q \cdot \frac{1}{2} R}{H}$$

nach dem pythag. Lehrsatz (siehe Erkl. 26) ist aber:

$$H = \sqrt{24^2 - 3^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrchn. 1).:

$$H = 23,8118$$

oder:

$$H = 23,8$$

setzen wir diesen Wert nebst den übrigen gegebenen Zahlenwerten in die obige Gleichung, so ist:

$$P = \frac{120 . 3}{23,8}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$P = 15,12$$

d. h. es ist in diesem Fall eine etwas grössere Kraft als unter a). nötig, nämlich 15,12 kg.

c). Wirkt die Last Q senkrecht zur Seite des einfachen Keils, so ist nach Gleichung 2). in Antw. auf Frage 243:

$$P = \frac{Q . R}{S}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 120 \cdot \frac{1}{4} = 30$$

d. h. es ist zur Herstellung des Gleichgewichts eine Kraft von 30 kg nötig.

Hilfsrechnungen.

3). . . $\sqrt{24^2 - 6^2} = \sqrt{576 - 36} =$

$\sqrt{5|40} = 23,24$

```
 4
4|140
  129
46|1100
    924
464|17600
```

4). . . $\frac{120 \cdot 6}{23,24} = 72000 : 2324 = 30,98$

```
6972
 22800
 20916
  18840
```

d). Wirkt die Last Q aber parallel zum Rücken des einfachen Keils, dann ist nach Gleichung 3). in Antw. auf Frage 244:

$$P = Q \cdot \frac{R}{H}$$

Nach Erkl. 26 ist:

$$H = \sqrt{24^2 - 6^2}$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$H = 23,24$$

Setzen wir diesen Wert nebst den übrigen gegebenen Zahlenwerten in obige Gleichung, so ist:

$$P = 120 \cdot \frac{6}{23,24} \cdot$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$P = 30,98$$

d. h. es ist in diesem Fall eine Kraft von 30,98 kg zur Erhaltung des Gleichgewichts nötig.

Aufgabe 331. a). Wie verhält sich am gleichschenkligen Keil die Kraft P zur Last Q, wenn der Winkel an der Spitze $\alpha = 25^0$ ist?

b). Wie gross wäre die Kraft für eine Last von 300 kg und zwar α). unter der Annahme, dass die Last senkrecht zur Länge und β). parallel zum Rücken wirkt?

c). Was ergibt sich für alle diese Fälle, wenn ein einfacher Keil mit einem gleichgrossen Winkel $\alpha = 25^0$ gegeben ist?

Hilfsrechnungen.

1). $\log 1 = 10,0000000-10$

$-\log 12^0 30' = -9,3353368+10$

$\log Q = 0,6646632$

mithin:

num-log Q = 4,6202

2). . . $\log P = \log 300 + \log \sin 12^0 30'$

$\log 300 = 2,4771213$

$+\log \sin 12^0 30' = 9,3353368-10$

$\log P = 1,8124581$

mithin:

num-log P = 64,932

Auflösung. a). Nach Gleichung 5). in Antwort auf Frage 243 ist:

$$P = Q \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$$

Setzen wir für P = 1, so ist hiernach:

$$Q = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

oder die Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{1}{\sin 12^0 30'}$$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$Q = 4,62$$

d. h. es verhält sich:

$$P : Q = 1 : 4,62$$

b). α). Wirkt nun eine Last Q = 300 kg senkrecht zu den Seiten des gleichschenkligen Keils, so ist nach Antw. auf Frage 243:

$$P = Q \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 300 \cdot \sin 12^0 30'$$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung 1).:

$$P = 64{,}932 \text{ kg}$$

(Dasselbe Resultat würde sich ergeben haben, wenn wir das oben berechnete Verhältnis zu Hilfe genommen und die Last Q = 300 kg durch 4,62 dividiert hätten).

β). Wirkt die Last Q parallel zum Rücken des gleichschenkligen Keils, dann ist nach Gleichung 2). in Antwort auf Frage 244:

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 300 \cdot \operatorname{tg} 12^0\,30'$$

dies gibt nach nebenstehender Hilfsrechn. 3).:

$$P = 66{,}508 \text{ kg}$$

c). Für den einfachen Keil ergibt sich das Verhältnis von P : Q aus der Gleichung 3). in Antw. auf Frage 243, wonach:

$$P = Q \cdot \sin \alpha$$

Setzen wir P wieder = 1, dann ist:

$$Q = \frac{1}{\sin \alpha}$$

oder:

$$Q = \frac{1}{\sin 25^0}$$

dies gibt nach nebenstehender Hilfsrechn. 4).:

$$Q = 2{,}366$$

d. h. es besteht das Verhältnis:

$$P : Q = 1 : 2{,}366$$

Wirkt nun eine Last Q = 300 kg senkrecht zur Seite des einfachen Keils, dann ist nach obiger Gleichung:

$$P = Q \cdot \sin \alpha$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 300 \cdot \sin 25^0$$

woraus sich nach Hilfsrechn. 5). ergibt:

$$P = 126{,}78 \text{ kg}$$

Wirkt die Kraft Q parallel zu dem Rücken des einfachen Keils, dann ist nach Gleichung 4). in Antw. auf Frage 244:

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P = 300 \cdot \operatorname{tg} 25^0$$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung 6).:

$$P = 139{,}89 \text{ kg}$$

Hilfsrechnungen.

3). . . $\log P = \log 300 + \log \operatorname{tg} 12^0\,30'$

$$\begin{aligned} \log 300 &= 2{,}4771313 \\ \log \operatorname{tg} 12^0\,30' &= 9{,}3457552-10 \\ \hline \log P &= 1{,}8228765 \end{aligned}$$

mithin:
num-log P oder P = 66,508

4).
$$\begin{aligned} \log 1 &= 10{,}0000000-10 \\ -\log \sin 25^0 &= -9{,}6259483+10 \\ \hline \log Q &= 0{,}3740517 \end{aligned}$$

mithin:
num-log Q oder Q = 2,3662

5).
$$\begin{aligned} \log 300 &= 2{,}4771213 \\ +\log \sin 25^0 &= 9{,}6259483-10 \\ \hline \log P &= 2{,}1030696 \end{aligned}$$

mithin:
num-log P oder P = 126,78

6). . . $\log P = \log 300 + \log \operatorname{tg} 25^0$

$$\begin{aligned} \log 300 &= 2{,}4771213 \\ +\log \operatorname{tg} 25^0 &= 9{,}6686725-10 \\ \hline \log P &= 2{,}1457938 \end{aligned}$$

mithin:
num-log P = 139,89

Aufgabe 332. Um eine Last von 4000 kg mittels einer Kraft von 75 kg 5 cm hoch zu heben, will man einen einfachen Keil anwenden. Welches Verhältnis besteht zwischen der Breite und der Länge des Keils, wenn die Last a). senkrecht zur Seite, b). parallel zum Rücken wirkt und wie gross ist c). in jedem Fall der Kraftweg?

Hilfsrechnungen.

1). . . $S = \frac{4000}{75} = \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3}$

2). . . $\sqrt{1^2 + \left(53\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{160 \,.\, 160}{3 \,.\, 3}}$

$$\frac{160 \,.\, 160}{3 \,.\, 3} = \frac{25600}{9}$$

$$1 + \frac{25600}{9} = \frac{25609}{9}$$

$$\sqrt{\frac{25609}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2|56|09} = \frac{1}{3} \cdot 160{,}028$$

```
    1
 2|156
   156
 320 | 090
3200 | 90000
        64004
32004 | 2599600
```

$$\frac{1}{3} \cdot 160{,}028 = 53{,}343$$

Auflösung. a). Nach Gleichung 1). in Antwort auf Frage 243 ist:

$$P : Q = R : S$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt

$$75 : 4000 = 1 : S$$

Hieraus ergibt sich für:

$$S = 53^1/_3 \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 1)}$$

d. h. wenn die Last senkrecht zur Seite des einfachen Keils wirkt, so verhält sich die Breite oder der Rücken zur Länge oder Seite wie $1 : 53^1/_3$.

b). Wirkt die Last parallel zu dem Rücken, dann ist nach Gleichung 3). in Antwort auf Frage 244:

$$P : Q = R : H$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$75 : 4000 = 1 : H$$

Hieraus ergibt sich für

$$H = 53^1/_3$$

oder:

$$H = 53{,}333$$

Da nun nach Erkl. 26:

$$S^2 = R^2 + H^2$$

so ist:

$$S = \sqrt{1^2 + \left(53\frac{1}{3}\right)^2}$$

oder:

$$S = 53{,}343 \quad \text{(siehe Hilfsrechn. 2)}$$

c). Da die Last

$$Q = \frac{160}{3} P$$

so wird der Kraftweg

$$S = \frac{160}{3} \cdot 5$$

oder:

$$S = 266^2/_3 \text{ cm sein.}$$

Aufgabe 333. Welchen Widerstand setzt ein Holzklotz dem Zerspalten entgegen, wenn eine Kraft von 60 kg unter einem Winkel β von 25° zur geometrischen Achse eines gleichschenkligen Keils von 18 cm Seitenlänge und 3 cm Breite wirkend, denselben spalten kann?

Auflösung. Nach der Antw. auf Frage 245 wirkt die Kraft P, welche unter einem Winkel β gegen die Achse des Keils gerichtet ist, dasselbe wie die senkrecht gegen den Rücken gerichtete Kraft

$$P_1 = P \,.\, \cos \beta$$

Nach Gleichung 4). in Antw. auf Frage 243 ist aber in diesem Fall:

$$P_1 = \frac{Q \cdot \frac{1}{2} R}{S}$$

oder:

$$Q = \frac{P_1 S}{\frac{1}{2} R}$$

oder für P_1 den obigen Wert eingesetzt:

$$Q = \frac{P \cdot \cos\beta \cdot S}{\frac{1}{2} R}$$

Setzen wir in diese Gleichung die entsprechenden Zahlenwerte, so ist:

$$Q = \frac{60 \cdot \cos 25^0 \cdot 18}{1\frac{1}{2}}$$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$Q = 652{,}542$$

Der Holzklotz leistet somit einen Gesamtwiderstand von $652\frac{1}{2}$ kg oder auf jeder Seite einen Widerstand von $326\frac{1}{4}$ kg.

Hilfsrechnung.

$$\frac{60 \cdot \cos 25^0 \cdot 18 \cdot 2}{3} = 720 \cdot \cos 25^0$$

$$\log 720 = 2{,}8573325$$
$$+ \log\cos 25^0 = 9{,}9572757-10$$
$$\log Q = 2{,}8146082$$

mithin:

$$\text{num-log } Q = 652{,}542$$

Aufgabe 334. a). Ermittele das Verhältnis von Kraft und Last bei einer Schraube, deren Ganghöhe $2\frac{1}{2}$ cm und bei der die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft von der Achse der Spindel 1,57 m beträgt. b). Wie wäre das Verhältnis, wenn die Kraft unmittelbar an der Peripherie der Spindel von 15 cm Durchmesser gewirkt hätte?

Auflösung. Nach Gleichung 4). in Antwort auf Frage 251 ist:

$$P : Q = G : 2R\pi$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$P : Q = 0{,}025 : 2 \cdot 1{,}57 \cdot 3{,}14159$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$P : Q = 1 : 394{,}5837$$

b). Wenn die Kraft unmittelbar am Spindelumfang angreift, dann ist nach derselben Formel:

$$P : Q = 2{,}5 : 15 \cdot 3{,}14159$$

oder nach nebenstehender Hilfsrechn. 2).:

$$P : Q = 1 : 18{,}8495$$

Hilfsrechnungen.

```
1). . . 2 . 1,57 . 3,14159 = 6,28318 . 1,57
                              4398226
                             3141590
                             628318
                         0,025 : 9,8645926
    = 25 : 9864,5926 = 394,5837
           75
           236
           225
            114
            100
             145
             125
              209
              200
               92
               75
               176
```

```
2). . . . 3,14159 . 15
          1570795
          314159
          47,12385 : 2,5 = 18,8495
          25
           221
           200
            212
            200
             123
              238
               135
```

Aufgabe 335. a). Die Höhe eines Schraubenganges sei 2 cm, der Hebelarm der Kraft 24 cm; welche Last entspricht dann einer Kraft von 40 kg? b). Welche Länge müsste der Arm der Kraft mindestens haben, um mit dieser Schraube 150 Zentner zu bewältigen?

Hilfsrechnungen.

1). . . 40 . 24 . 3,14159 = 960 . 3,14159
18849540
2827431
3015,92640

2). . . $\frac{150 . 50 . 2}{2 . 40 . 3,14159} = \frac{75 . 5}{2 . 3,14159} = \frac{375}{6,28318}$

37500000 : 628318 = 59,7
3141590
6084100
5654862
4292380

Auflösung. a). Aus Gleichung 4). in Antwort auf Frage 251 folgt für die zu suchende Last:

$$Q = \frac{P . 2 R \pi}{G}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{40 . 2 . 24 . 3,14159}{2}$$

und hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechn. 1).:

$$Q = 3015,926 \text{ kg}$$

b). Aus der oben erwähnten Formel erhält man für die unbekannte Länge des Hebelarms:

$$R = \frac{Q . G}{2 P \pi}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$R = \frac{150 . 50 . 2}{2 . 40 . 3,14159}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung 2). für die Länge des Hebelarms:

$$R = 59,7 \text{ oder ca. } 60 \text{ cm}$$

Aufgabe 336. Wie gross muss die Gewindehöhe an einer Schraube sein, wenn ein Mann mit 40 kg Kraft an einer Kurbel von 50 cm Länge einer Last von 200 Zentnern das Gleichgewicht halten soll?

Hilfsrechnung.

$\frac{40 . 2 . 50 . 3,14159}{200 . 50} = \frac{2 . 3,14159}{5}$

2 . 3,14159
= 6,28318 : 5 = 1,25663

Auflösung. Aus der oben benützten Formel erhalten wir für die unbekannte Ganghöhe:

$$G = \frac{P . 2 R \pi}{Q}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$G = \frac{40 . 2 . 50 . 3,14159}{200 . 50}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$G = 1,25663 \text{ cm}$$

Aufgabe 337. An der 390 mm langen Kurbel einer englischen Wagenwinde (siehe Fig. 368) wirke eine Kraft P von 30 kg. Wie gross wird die zu hebende Last sein dürfen,

a). ohne Rücksicht auf die Reibung,

b). wenn die Widerstände $^1/_3$ der Last betragen

wenn die Ganghöhe 26 mm beträgt, der Trieb E 7 Zähne u. das Rad D 28 Zähne hat?

Auflösung. a). Nach der in der Erkl. 277 mitgeteilten Formel ist:

$$Q = P \cdot \frac{2 R \pi}{h} \cdot \frac{Z}{z}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{30 . 2 . 390 . 3,14159 . 28}{26 . 7}$$

Hilfsrechnungen.

1). $\frac{30 . 2 . 390 . 3{,}14159 . 28}{26 . 7} = 3{,}14159 . 3600$

```
 1884954
 942477
11309,724
```

2). . . . $11309{,}724 : 4 = 2827{,}431$

```
33        .3
 10   8489,293
  29
   17
    12
```

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$Q = 11309{,}724 \text{ kg}$$

b). Soll für die Bewegungshindernisse $^1/_3$Q in Anrechnung gebracht werden, dann ist:

$$\frac{4}{3} Q = 11309{,}724$$

und somit:

$$Q = \frac{3}{4} \cdot 11309{,}724$$

oder:

$$Q = 8489{,}293 \text{ kg}$$

Aufgabe 338. Der Kopf einer Mikrometerschraube sei in 360° geteilt und muss 20 mal umgedreht werden, um die Schraube 1 cm fortzubewegen. Welche Bewegung erzeugt eine Drehung von 13°?

Hilfsrechnung.

$\frac{0{,}5 . 13}{360} = \frac{13}{720}$; $1300 : 720 = 0{,}01806$

```
 720
 5800
 5760
   4000
```

Auflösung. Wenn 20 Umdrehungen die Schraube um 1 cm fortbewegen, so beträgt die Ganghöhe $^1/_{20}$ cm oder 0,5 mm. Macht aber die Schraube anstatt einer vollen Umdrehung von 360° nur eine solche von 13°, so wird die Schraubenspitze um

$$0{,}5 \text{ mm} \cdot \frac{13}{360} = 0{,}01806 \text{ mm}$$

fortbewegt.

Aufgabe 339. Eine Schraube ohne Ende, deren Gänge eine Weite von 13 mm haben und die durch eine Kurbel von 39 cm gedreht wird, greift in die Zähne eines Rades von 36,4 cm Halbmesser ein, das auf einer Welle von 7,8 cm Halbmesser sitzt. Um diese Welle ist ein Seil geschlungen, woran die Last Q hängt, welche durch eine an der Kurbel wirkende Kraft von 20 kg im Gleichgewicht erhalten wird. Wie gross ist die Last?

Hilfsrechnung.

$\frac{20 . 2 . 390 . 3{,}14159 . 364}{13 . 78} = 314{,}159 . 56$

```
 1884954
1570785
17592,904
```

Auflösung. Nach der in Antwort auf Frage 256 gegebenen Formel ist die Last

$$Q = \frac{P . 2 k \pi R}{g r}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

$$Q = \frac{20 . 2 . 390 . 3{,}14159 . 364}{13 . 78}$$

Hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$Q = 17592{,}904 \text{ kg}$$

Aufgabe 340. Mit welcher Kraft können die beiden Schraubenmuttern einer Differentialschraube (siehe Fig. 371) zu einem Druck von 5000 kg gebracht werden, wenn der Hebelarm der Schraube 80 cm lang ist, die Ganghöhe der einen Schraube 12 mm und die der andern 10 mm beträgt?

Auflösung. Nach Antw. auf Frage 257 ist:

$$P = \frac{Q . (H - h)}{2 R \pi}$$

oder die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt:

Hilfsrechnung.

$$\frac{5000 \,.\, 2}{2 \,.\, 800 \,.\, 3{,}14159} = \frac{25}{4 \,.\, 3{,}14159}$$

2500000 : 1256636 = 1,989
1256636
12433640
11309724
11239160

$$P = \frac{5000 \,.\, (12 - 10)}{2 \,.\, 800 \,.\, 3{,}14159}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hilfsrechnung:

$$P = 1{,}989 \text{ oder ca. } 2 \text{ kg}$$

(Diese Kraft steigert sich aber auf ca. 5 kg, wenn z. B. die Bewegungshindernissse zu $1\frac{1}{2}$ Q angenommen werden).

ζ). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 341. Welchen Neigungswinkel hat eine schiefe Ebene, wenn die Höhe a). $^1/_{10}$, b). $^1/_{12}$, c). $^1/_{20}$, d). $^1/_{25}$, e). $^1/_{50}$ der Länge beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 320.

Aufgabe 342. Bei einer schiefen Ebene beträgt der Neigungswinkel α a). 10°, b). 2°, c). 1°40′, wie verhält sich die Länge zur Höhe der schiefen Ebene?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 321.

Aufgabe 343. Welche Last kann mit einer Kraft von 20 kg im Gleichgewicht erhalten werden, wenn der Neigungswinkel einer schiefen Ebene a). 60°, b). 45°, c). 30°, d). 10°, e). $3^1/_2$° beträgt und wie gross ist der Druck auf die schiefe Ebene, wenn die Kraft

α). parallel der Länge,
β). „ „ Basis wirkt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 322, nur ist die zu suchende Grösse jetzt Q, während es dort die Kraft P war.

Aufgabe 344. Zwei Arbeiter sollen ein Fass von 450 Pfund Gewicht eine steinerne Treppe hinunterlassen, welche $7^1/_2$ m lang und 3 m hoch ist. Zu diesem Ende befestigen sie oben auf der Treppe 2 Seile, legen das Fass auf dieselben und umschlingen dies einmal mit den Seilen, deren Enden sie in den Händen behalten.

a). Welche Kraft hat jeder Arbeiter aufzubieten? b). Welchen Druck erleidet die Treppe?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 323, wobei zu berücksichtigen ist, dass hier unter a). nicht die Last Q, sondern die Kraft P ermittelt werden soll.

Aufgabe 345. Wie gross wird der Neigungswinkel einer schiefen Ebene sein, a). wenn der Druck auf dieselbe bei einer zur Länge der Ebene parallel wirkenden Kraft die Hälfte der Last beträgt, b). wenn der Druck bei einer wagerecht wirkenden Last genau das doppelte beträgt? c). Wie gross ist bei dem so ermittelten Winkel in beiden Fällen die Kraft, wenn die Last Q = 1000 kg beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 324.

Aufgabe 346. Eine Pockholzkugel von 10 cm Radius und 1,263 spez. Gewicht liegt auf einer schiefen Ebene und übt auf die Länge derselben beim Herabrollen einen Druck von 5 kg aus.

a). Wie gross ist der Neigungswinkel der schiefen Ebene?

b). Wieviel Prozent beträgt die Steigung?

c). Wie gross ist die α). parallel zur Länge, β). parallel zur Basis wirkende Kraft, welche der Kugel das Gleichgewicht hält?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 325.

Aufgabe 347. Auf einer schiefen Ebene von 144 m Länge und 9 m Höhe soll ein 205 kg schwerer Körper aufwärts bewegt werden.

a). Welche Kraft hält dem Körper das Gleichgewicht, wenn die Reibung unberücksichtigt bleibt,

b). wenn die Reibung $^2/_5$ der Last beträgt und

c). welche Kraft ist in letzterem Fall nötig, um den Körper aufwärts zu bewegen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 326.

Aufgabe 348. Auf einer Eisenbahn, deren Steigung 1 : 120 ist, soll ein Zug von 6000 Zentner Gewicht befördert werden. Welche Kraft ist dazu nötig, wenn die Reibung $^1/_{250}$ beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 327.

Aufgabe 349. Eine Last von 240 Zentner soll auf einer schiefen Ebene von 4 % Steigung durch eine Kraft im Gleichgewicht erhalten werden, deren Richtung die Länge der schiefen Ebene a). unterhalb, b). oberhalb der Schwerlinie unter einem Winkel von $\beta = 14^0$ schneidet.

α). Wie gross ist in jedem der beiden Fälle die Kraft P und der Druck D?

Wie würde das Resultat ausfallen, wenn

β). die Kraft parallel der Länge und

γ) parallel der Basis gewesen wäre?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 328, unter Berücksichtigung der Erklärung 258.

Aufgabe 350. Wenn zwei schiefe Ebenen so miteinander in Verbindung stehen, wie es Fig. 380 zeigt, und auf der einen derselben, welche auf 13 m Länge 2 m steigt, ein Wagen von 205 kg einem auf der andern Ebene befindlichen Wagen von 340 kg das Gleichgewicht hält, a). wieviel Prozent beträgt dann die Steigung der zweiten schiefen Ebene, b). welcher Last kann der Wagen von 205 kg das Gleichgewicht halten, wenn die Reibung $^1/_{40}$ beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 329.

Aufgabe 351. Welcher Widerstand kann mittels eines Keils überwunden werden, dessen Rücken 10 cm und dessen Seite 45 cm misst, wenn senkrecht auf den Rücken desselben eine Kraft von 84 kg wirkt.

Wenn der Keil ein gleichschenkliger und der Widerstand a). senkrecht zu den Seiten, b). parallel zum Rücken wirkt?

Wenn der Keil ein einfacher und der Widerstand c). senkrecht zur Seite, d). parallel zum Rücken desselben wirkt?

Andeutung, Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 330, nur mit dem Unterschied, dass dort die Kraft P, hier die Last Q die unbekannte Grösse ist.

Aufgabe 352. a). Wie verhält sich am gleichschenkligen Keil die Kraft P zur Last Q, wenn der Winkel an der Spitze $\alpha = 18^0$ ist?

b). Wie gross wäre die Kraft für eine Last von 528 kg und zwar α). unter der Annahme, dass die Last senkrecht zur Länge, β). parallel zum Rücken wirkt?

c). Was ergibt sich für alle diese Fälle, wenn der gegebene Keil mit einem Winkel $\alpha = 18^0$ ein einfacher ist?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 331.

Aufgabe 353. Nach welchem Verhältnis muss ein einfacher Keil konstruiert werden, wenn — abgesehen von der Reibung — vermittelst einer Kraft von 50 kg eine Last von 280 kg überwunden werden soll und angenommen wird, dass die Last
a). senkrecht zur Seite,
b). parallel zum Rücken wirkt?
c). Welches Resultat würde sich aber in den beiden vorgenannten Fällen ergeben, wenn die Kraft unter einem Winkel von 15° zur längeren Kathete des Keils wirkt?

Andeutung. Die Auflösung von a). und b). erfolgt analog der gelösten Aufgabe 332, die von c). analog der gelösten Aufgabe 333.

Aufgabe 354. Bei einer Schraubenpresse beträgt die Ganghöhe 12 mm. a). Welcher Druck kann durch eine Kraft von $9\frac{1}{2}$ kg, die an einem 20 cm langen Hebelarm wirkt, ausgeübt werden? b). Wie gross ist die Kraft, wenn an derselben Presse ein Druck von 2000 kg erzeugt wird?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog den gelösten Aufgaben 334—336.

Aufgabe 355. Die Höhe eines Schraubengangs sei 1,25 cm, die Kraft 40 kg, die Last 25 Zentner. a). Wie lang ist der Hebelarm der Kraft, b). welche Kraft wäre bei derselben Schraube nötig, wenn auf 4 cm Länge 9 Gewinde kommen?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog den gelösten Aufgaben 334—336.

Aufgabe 356. Wie verhält sich bei einer englischen Wagenwinde die Kraft P zur Last Q, wenn die Kraft an einem 45 cm langen Hebelarm angreift, die Ganghöhe 18 mm beträgt und ein Trieb von 12 Zähnen in ein Rad von 54 Zähnen eingreift?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 337.

Aufgabe 357. Bei einer Mikrometerschraube geben 100 Umdrehungen eine fortschreitende Bewegung von $2\frac{1}{2}$ cm. Der Rand des Schraubenkopfes ist in 100 gleiche Teile geteilt. Um wieviel muss die Schraube umgedreht werden, wenn die Bewegung derselben 0,0025 mm betragen soll?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 338.

Aufgabe 358. Bei einer Schraube ohne Ende betrage die Ganghöhe 2 cm, die Kraft wirke an einer Kurbel von 35 cm, das Rad habe einen Halbmesser von 15 cm und die in demselben sitzende Welle einen solchen von 3 cm. Wie verhält sich die Kraft P zur Last Q?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 339.

Aufgabe 359. Welcher Druck kann durch eine, an einer 45 cm langen Kurbel einer Differentialschraube (Fig. 371) wirkende Kraft von 32 kg erzeugt werden, wenn die Ganghöhe der einen Schraube $\frac{3}{4}$, die der andern $\frac{3}{5}$ cm beträgt?

Andeutung. Die Auflösung erfolgt analog der gelösten Aufgabe 340.

NB. Die Lehre vom Gleichgewicht der Molekularkräfte fester Körper oder die Lehre von der Elasticität und Festigkeit ist in einem separaten Band dieser Encyklopädie behandelt.

Zusammenstellung der in diesem Buch vorkommenden Formeln.

I. Formeln für zwei in gerader Linie auf einen Punkt wirkende Kräfte:

1). $R = P_1 + P_2 + P_3 \ldots\ldots$ siehe Antw. auf Frage 10

2). $R = n . P$ „ „ „ „ 10

3). $R = P_1 + P_2 + P_3 \ldots - (Q_1 + Q_2 \ldots)$ „ „ „ „ 11

R bedeutet die Resultante, P_1, P_2 sind die nach derselben, und Q_1, Q_2 die nach entgegengesetzter Seite wirkenden Kräfte, n bedeutet die Anzahl der gleich grossen Kräfte P_1, P_2 ...

II. Formeln für zwei unter einem Winkel von 90° auf einen Punkt wirkende Kräfte:

4). $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

5). $\operatorname{tg} \beta = \frac{Q}{P}$ und $\operatorname{tg} \gamma = \frac{P}{Q}$

6). $\sin \beta = \frac{Q}{R}$ und $\sin \gamma = \frac{P}{R}$

7). $\cos \gamma = \frac{Q}{R}$ und $\cos \beta = \frac{P}{R}$

siehe Auflösung der Aufgabe 13

R bedeutet die Resultante, P und Q sind die beiden Komponenten. Die Richtungen von P und R bilden den Winkel β, die Richtungen von Q und R bilden den Winkel γ.

III. Formeln für zwei unter einem schiefen Winkel auf einen Punkt wirkende Kräfte:

8). $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P Q . \cos \alpha}$

9). $\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{Q - P}{Q + P}$

10). $\sin \beta = \frac{Q . \sin \alpha}{R}$

11). $\sin \gamma = \frac{P . \sin \alpha}{R}$

siehe Auflösung der Aufg. 19

12). $R = 2 P . \cos \frac{\alpha}{2}$ (wenn $P = Q$) . . siehe Erkl. 44

13). $Q = \sqrt{P^2 + R^2 - 2 P R . \cos \beta}$. . siehe Aufl. d. Aufg. 26

14). $Q = \sqrt{R^2 - P^2}$

15). $\gamma = 90^0 - \beta$

wenn $\alpha = 90^0$. siehe Erkl. 50.

16). $\sin \gamma = \frac{\sin \beta . P}{Q}$ siehe Aufl. d. Aufg. 26

oder:

17). $\sin \gamma = \frac{\sin \beta . P}{\sqrt{P^2 + R^2 - 2 P R . \cos \beta}}$. siehe Erkl. 49

18). $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(S - P)(S - R)}{P . R}}$

19). $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(S - Q)(S - R)}{Q . R}}$

wenn $S = \frac{P + Q + R}{2}$ siehe Auflösung d. Aufg. 30

20). $P = \frac{R . \sin \gamma}{\sin \alpha}$

21). $Q = \frac{R . \sin \beta}{\sin \alpha}$

wenn R, β und γ gegeben sind. siehe Auflösung der Aufgabe 32.

R bedeutet die Resultante, P und Q sind die beiden Komponenten, deren Richtungen den Winkel α bilden. β ist der Winkel, welchen die Richtungen von P und R bilden. γ ist der Winkel, welchen die Richtungen von Q und R bilden.

IV. Formeln für die Resultante von mehr als zwei auf einen Punkt in derselben Ebene wirkende Kräfte:

22). $s_1 = P_1 \cdot \cos\alpha_1; \quad s_2 = P_2 \cdot \cos\alpha_2$ etc.

23). $r_1 = P_1 \cdot \sin\alpha_1; \quad r_2 = P_2 \cdot \sin\alpha_2$ etc.

24). $\varrho = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots P_n \cdot \cos\alpha_n$

25). $\varrho_1 = P_1 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 + \ldots P_n \cdot \sin\alpha_n$

26). $R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2}$

27). $\operatorname{tg}\beta = \frac{\varrho_1}{\varrho}$

28). $\cos\beta = \frac{\varrho}{R}$ oder $\sin\beta = \frac{\varrho_1}{R}$

29). $R = \sqrt{(S.P.\cos\alpha)^2 + (S.P.\sin\alpha)^2}$

30). $\cos\beta = \frac{S.P.\cos\alpha}{R}$ oder $\sin\beta = \frac{S.P.\sin\alpha}{R}$

siehe Antwort auf Frage 15

$P_1, P_2 \ldots P_n$ sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte, und
$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind die Winkel, welche die Richtungen der gegebenen Kräfte mit der positiven Richtung der XX_1-Achse bilden.
$s_1, s_2 \ldots s_n$ sind die Komponenten, deren Richtungen in der XX-Achse liegen.
$r_1, r_2 \ldots r_n$ sind die Komponenten, deren Richtungen in der YY-Achse liegen.
ϱ bedeutet die Summe der in der Richtung der XX-Achse wirkenden Komponenten.
ϱ_1 bedeutet die Summe der in der Richtung der YY-Achse wirkenden Komponenten.
R bedeutet die Endresultante,
β „ den Winkel, welchen die Resultante R mit der positiven Richtung der XX-Achse bildet.
$S.P.\cos\alpha$ und $S.P.\sin\alpha$ bezeichnet die Summe der Komponenten aller gegeb. Kräfte.

V. Formeln für das Kräfteparallelepipedon.

A. Für rechtwinklig wirkende Kräfte:

31). $R = \sqrt{P^2 + P_1^2 + P_2^2}$

32). $\cos\gamma = \frac{P}{R}$

33). $\cos\gamma_1 = \frac{P_1}{R}$

34). $\cos\gamma_2 = \frac{P_2}{R}$

siehe Antwort auf Frage 16

P, P_1, $P_2 \ldots$ sind die gegebenen Kräfte.
R bedeutet die Resultante.
γ, γ_1 und γ_2 bedeuten der Reihe nach die Winkel, welche die Resultante R mit den Kräften P, P_1 und P_2 bildet.

B. Für schiefwinklig wirkende Kräfte:

35). $\varrho = P \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha + P_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots$

36). $\varrho_1 = P \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha + P_1 \cdot \cos\beta_1 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 \cdot \sin\alpha_2 + \ldots$

37). $\varrho_2 = P \cdot \sin\beta + P_1 \cdot \sin\beta_1 + P_2 \cdot \sin\beta_2 + \ldots$

38). $R = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2}$

39). $\cos\mu = \frac{\varrho}{R}$

40). $\cos\mu_1 = \frac{\varrho_1}{R}$

41). $\cos\mu_2 = \frac{\varrho_2}{R}$

siehe Antwort auf Frage 17

P, P_1, $P_2 \ldots P_n$ sind die gegebenen Kräfte.
β, β_1, $\beta_2 \ldots \beta_n$ die Winkel, welche die Richtungen dieser Kräfte mit der Horizontalebene bilden.
α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind die Winkel, welche die Horizontalprojektionen der gegebenen Kräfte mit der XX-Achse bilden.
ϱ bedeutet die in Richtung der XX-Achse wirkende Resultante,
ϱ_1 bedeutet die in Richtung der YY-Achse wirkende Resultante,
ϱ_2 bedeutet die in Richtung der ZZ-Achse wirkende Resultante.
R bedeutet die Gesamtresultante.
μ, μ_1 und μ_2 bedeuten der Reihe nach die Winkel, welche die Resultante R mit den drei Achsen XX, YY u. ZZ bildet.

VI. Formeln für die Zusammensetzung von Parallelkräften.

A. Für zwei gleichgerichtete Parallelkräfte:

42). $R = P + Q$ siehe Antw. auf Frage 19

43). $\overline{ac} = \frac{Q \cdot \overline{bc}}{P}$

$\overline{bc} = \frac{P \cdot \overline{ac}}{Q}$ siehe Antw. auf Frage 20

44). $P : Q : R = \overline{bc} : \overline{ac} : \overline{ab}$

P und Q sind die gegebenen Parallelkräfte. R bedeutet die Resultante. $\overline{ac}$ bedeutet das kleinere, $\overline{bc}$ „ „ grössere Stück der Angriffslinie $\overline{ab}$.

B. Für mehr als zwei gleichgerichtete Parallelkräfte:

45). $R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_n$. . siehe Antw. auf Frage 23

R bedeutet die Resultante. $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ sind die gegebenen Parallelkräfte.

C. Für entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte:

46). $R = P - Q$

47). $\overline{ab} : \overline{ac} : \overline{bc} = R : Q : P$

oder:

$\overline{ac} = \frac{\overline{ab} \cdot Q}{R}$. . siehe Antw. auf Frage 24 und 25.

R bedeutet die Resultante. P und Q sind die entgegengesetzt gerichteten Parallelkräfte. $\overline{ab}$ bedeutet die Angriffslinie von P und Q, $\overline{ac}$ die Angriffslinie der Resultante, welche auf der Seite der grösseren Kraft liegt, $\overline{bc}$ ist die Entfernung d. Resultante von d. kleineren Kraft Q.

VII. Formeln für die statischen Momente:

48). $RL = P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots P_n l_n$

49). $RL = P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots P_n l_n - (Q_1 \lambda_1 + Q_2 \lambda_2 + \ldots Q_n \lambda_n)$

50). $L = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots P_n l_n - (Q_1 \lambda_1 + Q_2 \lambda_2 + \ldots Q_n \lambda_n)}{P_1 + P_2 \ldots + P_n + Q_1 + Q_2 \ldots + Q_n}$

siehe Erkl. 91

R bedeut. die Resultante. L „ den Hebelarm d. Result. $P_1, P_2 \ldots P_n$ sind die im positiven Drehungssinn, $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ die im negativen Drehungssinn wirkenden Kräfte. $l_1, l_2 \ldots l_n$ sind die resp. Arme der Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$, und $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ die Arme der Kräfte $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$

51). $Rx = \Sigma . P_1 x_1$, $Ry = \Sigma . P_1 y_1$, $Rz = \Sigma . P_1 z_1$

52). $x = \frac{\Sigma . P_1 x_1}{\Sigma . P_1}$, $y = \frac{\Sigma . P_1 y_1}{\Sigma . P_1}$, $z = \frac{\Sigma . P_1 z_1}{\Sigma . P_1}$

wenn P_1, P_2, P_3 parallel und gleich gerichtet sind. . . siehe Antw. auf Frage 40

$P_1, P_2 \ldots$ sind die gegebenen Parallelkräfte, $x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n, z_1, z_2 \ldots z_n$ ihre Abstände von den drei Koordinatenebenen. Σ ist das Summationszeichen, R die Resultante und x, y, z ihre resp. Hebelarme.

VIII. Formeln für die Kräftepaare:

53). $Rr = \sqrt{(Pp)^2 + (Qq)^2 + 2Pp \cdot Qq \cdot \cos\alpha}$

54). $Pp : Qq : Rr = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\alpha$

siehe Antw. auf Frage 55

55). $Rr = \sqrt{(Pp)^2 + (Qq)^2}$, $\cos\beta = \frac{Pp}{Rr}$, $\cos\gamma = \frac{Qq}{Rr}$ wenn $\alpha = 90^0$. . siehe Erkl. 114

56). $Rr = \sqrt{(Mx)^2 + (My)^2}$. . . siehe Antw. auf Frage 56

Rr bedeutet das resultierende Kräftepaar. Pp und Qq sind die Paare der beiden gegebenen Ebenen. α ist der Neigungswinkel dieser Ebene. β ist der Winkel, den das Achsenmoment Rr mit dem Achsenmoment Pp bildet. γ ist der Winkel, den das Achsenmoment Rr mit dem Achsenmoment Qq bildet. Mx bezeichnet die Summe der Komponenten in Richtung der X-Achse. My bezeichnet die Summe der Komponenten in Richtung der Y-Achse.

57). $$\left.\begin{aligned} Rr \cdot \cos\lambda &= Mx \\ Rr \cdot \cos\mu &= My \end{aligned}\right\}$$ siehe Antw. auf Frage 56

Rr ist das Moment des resultierenden Kräftepaares, und λ und μ die resp. Winkel, welche letzteres mit den beiden Koordinatenachsen bildet.

58). $$Rr = \sqrt{(Uu)^2 + (Vv)^2 + (Ww)^2}$$

59). $$\begin{cases} Rr \cdot \cos\varrho = Uu \\ Rr \cdot \cos\sigma = Vv \\ Rr \cdot \cos\tau = Ww \end{cases}$$

siehe Antw. auf Frage 57

Uu, Vv, Ww sind die Momente der drei gegebenen Kräftepaare. Rr bedeutet das resultierende Achsenmoment und ϱ, σ und τ die Winkel, welche letzteres mit den gegebenen Kräfteebenen bildet.

60). $$Rr = \sqrt{(Mx)^2 + (My)^2 + (Mz)^2}$$

61). $$\begin{cases} Rr \cdot \cos\lambda = Mx \\ Rr \cdot \cos\mu = My \\ Rr \cdot \cos\nu = Mz \end{cases}$$

siehe Antw. auf Frage 58

Mx, My und Mz bedeuten die je in Richtung der drei Koordinaten-Achsen wirkenden Komponentensummen. Rr bedeutet das Achsenmoment des result. Kräftepaares und λ, μ, ν dessen Winkel, welche es mit den drei Koordinatenachsen bildet.

IX. Formeln für die Vereinigung von beliebig vielen Kräften, welche an beliebig vielen Punkten wirken.

A. Für Kräfte in einer Ebene:

62). $$\begin{cases} x_1 = P_1 \cdot \cos\alpha_1 \\ y_1 = P_1 \cdot \cos\beta_1 \\ x_2 = P_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ y_2 = P_2 \cdot \cos\beta_2 \\ x_n = P_n \cdot \cos\alpha_n \\ x_n = P_n \cdot \cos\beta_n \end{cases}$$

63). $$R = \sqrt{(\Sigma \cdot P_1 \cdot \cos\alpha_1)^2 + (\Sigma \cdot P_1 \cdot \cos\beta_1)^2}$$

64). $$Mm = \Sigma \cdot P_1 (\cos\alpha_1 l_1 - \cos\beta_1 \cdot \lambda_1)$$

65). $$r = \frac{\Sigma P_1 (\cos\alpha_1 l_1 - \cos\beta_1 \lambda_1)}{R}$$

66). $$\cos\varrho = \frac{X}{R} \quad \text{und} \quad \cos\sigma = \frac{Y}{R}$$

siehe Antwort auf Frage 64

P_1, P_2, P_n sind die gegebenen Kräfte.
$\alpha_1\ \beta_1$, $\alpha_2\ \beta_2 \ldots \alpha_n\ \beta_n$ bezeichnen die Winkel, welche die gegeb. Kräfte mit den beiden Koordinatenachsen bilden.
$x_1\ y_1$, $x_2\ y_2 \ldots x_n\ y_n$ sind die Komponenten der gegebenen Kräfte in Richtung der beiden Achsen.
R ist die Resultante sämtlicher Komponenten.
Σ ist das Summationszeichen.
Mm bedeutet das Gesamtdrehungsbestreben der gegebenen Kräfte.
$Mm = Rr$; r bedeutet den Arm der Resultante und ϱ und σ sind die Winkel, welche R mit den beiden Koordinatenachsen bildet.

B. Für Kräfte in verschiedenen Ebenen:

67). $$\begin{cases} X = \Sigma (P_1 \cdot \cos\alpha_1) \\ Y = \Sigma (P_1 \cdot \cos\beta_1) \\ Z = \Sigma (P_1 \cdot \cos\gamma_1) \end{cases}$$

68). $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

69). $$\begin{cases} \cos\varrho = \dfrac{X}{R} \quad \text{oder} \quad R \cdot \cos\varrho = X \\ \cos\sigma = \dfrac{Y}{R} \quad \text{oder} \quad R \cdot \cos\sigma = Y \\ \cos\tau = \dfrac{Z}{R} \quad \text{oder} \quad R \cdot \cos\tau = Z \end{cases}$$

70). $$\begin{cases} Mx = \Sigma P_1 (\cos\gamma_1 \cdot y_1 - \cos\beta_1 \cdot z_1) \\ My = \Sigma P_1 (\cos\alpha_1 \cdot z_1 - \cos\gamma_1 \cdot x_1) \\ Mz = \Sigma P_1 (\cos\beta_1 \cdot x_1 - \cos\alpha_1 \cdot y_1) \end{cases}$$

siehe Antwort auf Frage 65

X, Y, Z bezeichnen die Summen der je in Richtung der drei Koordinatenachsen wirkenden Komponenten.
Σ ist das Summationszeichen.
$P_1\ P_2 \ldots$ sind die gegeb. Kräfte.
α, β, γ die bezüglichen Winkel, welche die gegebenen Kräfte mit den Koordinaten-Achsen bilden.
R bedeutet die Resultante.
ϱ, σ und τ sind die Winkel, welche R mit den drei Koordinatenachsen bildet.
Mx bezeichnet die Summe der statischen Momente sämtlicher Komponenten in Bezug auf die X-Achse.
My und Mz bezeichnet dasselbe in Bezug auf die Y- resp. Z-Achse.

71). $Ss = \sqrt{(Mx)^2 + (My)^2 + (Mz)^2}$

72). $\begin{cases} \cos\lambda = \frac{Mx}{Ss} \\ \cos\mu = \frac{My}{Ss} \\ \cos\varrho = \frac{Mz}{Ss} \end{cases}$ siehe Antw. auf Frage 65

Ss bezeichnet das Gesamtdrehungsbestreben der Grösse nach, und λ, μ und υ bezeichnen das Gesamtdrehungsbestreben der Richtung nach.

Ausserdem sind:

73). $\begin{cases} Mx = Z\upsilon - Y\zeta \\ My = X\zeta - Z\xi \\ Mz = Y\xi - X\upsilon \end{cases}$

74). $Mx \cdot X + My \cdot Y + Mz \cdot Z = 0$ siehe Antw. auf Frage 67

75). $\xi = -\frac{My}{z}$

76). $\upsilon = -\frac{MyY + MzZ}{X}$

ξ, υ und ζ die Koordinaten des Angriffspunkts der Resultante.

X. Formeln für Schwerpunktsbestimmungen.

A. Für Linien:

a). für das symmetrische Stück eines regulären Polygons:

77). $Z = \frac{rs}{u}$ siehe Antw. auf Frage 82

b). für einen Kreisbogen:

78). $Z = \frac{rs}{b}$

79). $Z = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\alpha}$ siehe Antw. auf Frage 83

Z bedeutet den Schwerpunktsabstand.
r bedeutet den Halbmesser des zugehörigen Kreises.
s bedeutet die Sehne.
u den Umfang des Polygonstücks.
b bedeutet den Kreisbogen.
α bedeutet den zum Bogen gehörigen halben Centriwinkel.

B. Für Flächen:

a). für eine Dreiecksfläche:

80). $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ siehe Antw. auf Frage 85

x_1, x_2 und x_3 sind drei Lote von den Dreiecken der Dreiecksfläche auf eine Gerade.
x bedeutet den Abstand des Schwerpunkts von derselben Geraden.

b). für ein Paralleltrapez:

81). $x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$ siehe Antw. auf Frage 87

x bedeutet den Schwerpunktsabstand von der Seite a.
a bedeutet die grössere, b die kleinere Parallele.
h bedeutet die Entfernung bei der Parallelen.

c). für ein Vieleck:

82). $\begin{cases} x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_n x_n}{\lambda} \\ y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_n y_n}{\lambda} \end{cases}$. . siehe Antw. auf Frage 89

x und y sind die Abscissen resp. Ordinaten d. gesuchten Schwerpunkts.
x_1, x_2, x_n sind die Abscissen der Schwerpunkte der Dreiecksflächen.
y_1, y_2, y_n sind die Ordinaten der Schwerpunkte der Dreiecksflächen.
λ_1, λ_2, λ_n sind die Flächeninhalte der Dreiecksflächen.

d). für einen Kreissektor:

83). $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$

84). $x = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ siehe Antw. auf Frage 90

x bed. d. Schwerpunktsabstand.
r bedeutet den Halbmesser.
s „ die Sehne.
b „ den Kreisbogen.
α „ d. halb. Centriwinkel.

e). für ein Kreissegment:

85). $x = \frac{S^3}{12\,F}$

86). $x = \frac{2\,(r\,.\,\sin\alpha)^3}{3\,(r^2\alpha - r^2\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}$

siehe Antw. auf Frage 91

S bedeutet d. begrenzende Sehne.
F „ den Flächeninhalt d. Segments.
x „ den Schwerpunktsabstand vom Kreismittelpunkt.
r bedeutet den Radius und
α „ d. halb. Centriwinkel.

f). für ein Ringstück:

87). $x = \frac{2\,.\,\sin\alpha\,(r^2 + r\varrho + \varrho^2}{3\,\alpha\,(r + \varrho)}$

88). $x = \frac{2\,s\,(r^2 + r\varrho + \varrho^2)}{3\,b\,(r + \varrho)}$

siehe Antw. auf Frage 92

x bedeut. d. Schwerpunktsentfernung vom Kreismittelpunkt.
α bedeut. d. halben Centriwinkel.
r „ den grösseren Radius.
ϱ „ „ kleineren „
s „ die grössere Sehne und
b „ den grösseren Bogen.

g). für ein zwischen zwei parallelen Sehnen gelegenes Stück der Kreisfläche:

89). $x = \frac{s^3 - \sigma^3}{12\,(F_1 - F_2)}$

90). $x = \frac{\frac{2}{3}\,(r\,.\,\sin\alpha)^3 - \frac{2}{3}\,(r\,.\,\sin\beta)^3}{r^2\,(\alpha - \sin\alpha\,.\,\cos\alpha) - r^2\,(\beta - \sin\beta\,.\,\cos\beta)}$

siehe Antwort auf Frage 93

x bed. d. Schwerpunktsabstand.
s „ die grössere Sehne.
σ „ „ kleinere „
F_1 „ „ Fläche d. gröss. Segm.
F_2 „ „ „ d. klein. „
α „ den gröss. Centriwinkel.
β „ „ kleineren „

h). für die Mantelfläche eines abgestutzten Kegels:

91). $x = \frac{1}{3}\,h \cdot \frac{R + 2r}{R + r}$ siehe Antw. auf Frage 97

92). $x = \frac{1}{3}\,h \cdot \frac{D + 2d}{D + d}$ siehe Erkl. 160

x bedeutet den Schwerpunktsabstand von der Grundfläche.
R und r sind die Radien der untern und obern Grundfläche.
D und d sind die Durchmesser.
h bedeutet die Höhe des Kegelstumpfs.

C. Für Körper:

a). für eine dreiseitige Pyramide:

93). $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$. . . siehe Erkl. 163

x_1 x_2 . . . sind die Lote von den 4 Ecken auf eine Ebene.
x bedeutet den Schwerpunktsabstand von derselben Ebene.

b). für einen Pyramidenstumpf:

94). $x = \frac{h\,(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)}{4\,(G + \sqrt{Gg} + g)}$. . siehe Antw. auf Frage 103

x bed. d. Schwerpunktsabstand.
h bedeutet die Höhe.
G und g sind die Grundflächen des Pyramidenstumpfs.

c). für einen Kegelstumpf:

95). $x = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2r\varrho + 3\varrho^2}{r^2 + r\varrho + \varrho^2}$. . . siehe Antw. auf Frage 104

r ist der Radius der grösseren u. ϱ ist der Radius der kleineren Fläche. h bedeutet die Höhe u. x den Schwerpunktsabstand.

d). für einen Kugelsektor:

96). $x = \frac{3}{8}\,(2r - h)$ siehe Antw. auf Frage 106

r bedeutet den Radius, h die Höhe d. zugehörigen Kugelsegments und x den Schwerpunktsabstand vom Kreismittelpunkt.

e). für ein Kugelsegment:

97). $x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$ siehe Antw. auf Frage 107

98). $y = \frac{1}{2}\,h \cdot \frac{2R^2 + h^2}{3R^2 + h^2}$ siehe Erkl. 166

r bedeutet den Kugelradius.
h „ die Höhe des Abschnitts.
R „ den Halbmesser der Grundfläche.

f). für eine körperliche Kugelzone oder Kugelschicht:

99). $y = \frac{1}{2}h \cdot \frac{2\varrho^2 + 4\varrho_1^2 + h^2}{3\varrho^2 + 3\varrho_1^2 + h^2}$. . . siehe Erkl. 167 — h bedeutet die Höhe der Kugelschicht, ϱ den Halbmesser der unteren und ϱ_1 den Halbmesser der oberen Parallelfläche.

g). für ein Hohlmass:

100). $x = \frac{h^2}{2h + r}$ siehe Antw. auf Frage 108 — r bezeichnet den Radius und h die Höhe des Hohlmasses.

XI. Formeln für die Stabilität der Körper:

101). $P = G \cdot \overline{CN}$ siehe Antw. auf Frage 133 u. 137

102). $A = G \cdot h$ siehe Antwort auf Frage 138

P bezeichnet die statische, A die dynamische Stabilität und G das Gewicht des Körpers. $\overline{CN}$ ist der Abstand der senkrechten Schwerlinie von der Kippkante. h ist die Höhe, zu welcher der Schwerpunkt gehoben werden muss.

XII. Formeln für den physischen Hebel.

a. für den mathematischen Hebel:

103). $Pp = Qq$ oder $P : Q = q : p$. . siehe Antwort auf Frage 159 — P bezeichnet die Kraft, Q „ „ Last, p „ den Kraftarm, q „ „ Lastarm.

104). $x = \frac{Pl}{Q + P}$ siehe Lösung der Aufgabe 203

b. für den physikalischen Hebel:

105). $x = \frac{l\left(\frac{1}{2}G + Q\right)}{(P + G + Q)}$ siehe Lösung der Aufgabe 206

l bezeichnet d. ganze Hebellänge. x ist die unbekannte Entfernung des Stützpunktes von der Last resp. Kraft. G ist das Gewicht des Hebels.

106). $x = \frac{QL + Gl}{P + G + Q}$ siehe Lösung der Aufgabe 208

107). $x = \frac{P(L - l) - G(L - \lambda)}{L}$. . siehe Lösung der Aufgabe 210

108). $x = \frac{Q\lambda - Gl}{L}$ siehe Lösung der Aufgabe 212

L bezeichn. d. Gesamthebellänge. G „ das Gewicht des Hebels. P u. Q sind die wirksamen Kräfte. l ist die Entfernung des Schwerpunkts des Hebels vom Angriffspunkt der Kraft P. x die Entfernung d. Stützpunkts, in 107) ist λ die Entfernung des Schwerpunkts v. Angriffspunkt der Q und l die Entfernung der P von Q.

109). $x = \frac{l(Q + G)}{L}$

110). $D = \frac{(P + Q)(L - l)}{L}$

siehe Lösung der Aufgabe 214

x bedeutet die unbekannte Kraft P. G ist das Gewicht der Schiebkarre. Q die zu befördernde Last. l die Entfernung der Schwerlinie von der Radachse. L die Entfernung des Angriffspunkts der Kraft P von der Radachse.

111). $P = \frac{G\lambda + Ql}{L}$

112). $D = \frac{Q(L - l) + G(L - \lambda)}{L}$

siehe Lösung der Aufgabe 216

Ausserdem bedeutet in Formel 111). und 112).: λ die Entfernung der Falllinie der unbelasteten Karre und l die Entfernung der Falllinie der Last von der Radachse.

113). $P \cdot \overline{ac} \cdot \sin\alpha = Q \cdot \overline{bc} \cdot \sin\beta$. . siehe Aufl. d. Aufg. 217 — $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ sind die Arme eines Winkelhebels, P und Q die daran unter einem Winkel von α resp. β wirkenden Kräfte.

114). $P = \frac{Q \cdot l_1 + G\lambda}{l_2}$

115). $R = \sqrt{P^2 + (G + Q)^2}$

. . siehe Aufl. d. Aufg. 218

An einem Winkelhebel wirkt Kraft P senkrecht zu Hebelarm l_2 und Last Q senkrecht an Hebelarm l_1, und das Gewicht des Hebels in der Entfernung λ vom Drehpunkt nach Q hin. R bezeichnet den Zapfendruck.

116). $Q = \frac{P \cdot \overline{CA} \cdot \sin\beta + G\lambda}{\overline{CB} \cdot \sin\alpha}$. . siehe Aufl. d. Aufg. 220 — Q ist die Last, P die Kraft, welche an den Armen $\overline{BC}$ resp. $\overline{AC}$ eines Winkelhebels unter Winkel α resp. β wirken. G bedeutet das Gewicht des Hebels und λ den Hebelarm dieses Gewichts.

c. Formeln für die auf dem Prinzip des Hebels beruhenden Wagen:

117). $x = \sqrt{g\gamma}$. siehe Antw. auf Frage 174

g bedeutet das Gewicht eines Körpers bei einer unrichtigen Wage in der einen Schale liegend, γ das Gewicht desselben Körpers in der andern Schale liegend und x das richtige Gewicht des Körpers.

118). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{ap}{b(2P+p)+cG}$

119). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{ap}{c\,.\,G}$

siehe Antwort auf Frage 180

α bedeutet den Ausschlagswinkel der gleicharmigen Wage, p bedeutet das Uebergewicht, a bedeutet die Länge der Arme d. Wagebalkens, G bezeichnet das Gewicht desselben, c bezeichnet den Abstand des Schwerpunkts des Wagebalkens vom Drehpunkt. 2 P bezeichnet die Grösse der Belastung und b bezeichnet die Entfernung des Drehpunkts von der horizontalen Verbindungslinie der Aufhängepunkte beider Wagschalen.

d. Formeln für die Rollen und Rollenverbindungen:

Feste Rolle 120). $P = Q$ siehe Antw. auf Frage 195

121). $D_1 = P + Q = 2P$

122). $D_2 = P\sqrt{2}$

123). $D = 2P\,.\cos\frac{1}{2}\alpha$

. . . siehe Antw. auf Frage 198

Lose Rolle 124). $P = \frac{1}{2}Q$ siehe Antw. auf Frage 199

125). $P : Q = 1 : 2\,.\sin\frac{1}{2}\alpha$. . . siehe Antw. auf Frage 200

Gemeiner Flaschenzug 126). $P = \frac{Q}{n}$ siehe Antw. auf Frage 202

P bedeutet die Kraft.
Q „ „ Last.
D_1 ist der Achsendruck bei parallel wirkenden Kräften.
D_2 ist der Achsendruck bei rechtwinkelig wirkenden Kräften.
D ist der Achsendruck, wenn die Kräfte unter einem Winkel α gegeneinander gerichtet sind.
n bedeutet die Anzahl der Rollen im symmetr. Flaschenzug.

127). $Q = 2nP$ oder $P = \frac{Q}{2n}$

128). $P = \frac{Q}{2n+1}$

129). $P = \frac{Q+G}{2n}$ resp. $\frac{Q+G}{2n+1}$

siehe Erkl. 228

In diesen Formeln bedeutet n die Anzahl der in einer Flasche befindlichen Rollen, P die Kraft, Q die Last und G das Gewicht der untern Flasche.

Differential-Flaschenzug

130). $P = \frac{Q(R-r)}{2R}$

131). $P = \frac{Q(r-R)}{2r}$

. . . siehe Antw. auf Frage 205

132). $P = \frac{Q}{2^n}$ siehe Antw. auf Frage 206

133). $P = \frac{Q}{3^n}$

134). $P = \frac{Q}{2^{n+1}-1}$

. . . . siehe Antw. auf Frage 208

P ist die wirkende Kraft.
Q ist die Last.
R ist der Radius der grösseren, r der Radius der kleineren festen Rolle am Differentialrollenzug.
n bezeichnet die Anzahl der losen Rollen im Potenzrollenzug resp. im Summationspotenzzug.

135). $P = \frac{Q-g}{2^n} + g$ siehe Auflös. d. Aufg. 254

136). $P = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Q+g_1)+g_2\right)+g_3\right]$ siehe Auflösung der Aufg. 257

P bedeutet die Kraft.
Q „ „ Last.
n bed. die Anzahl d. losen Rollen.
g resp. g_1, g_2, g_3 bedeuten die Gewichte der einzelnen losen Rollen.

e. Formeln für das Wellrad:

137). $P = \frac{Qr}{R}$ oder $P : Q = r : R$

138). $P(D+d) = Q(\Delta+\delta)$

siehe Antw. auf Frage 209

P bedeutet die Kraft, Q ist die Last.
R „ den Radius des Rades.
r „ „ „ der Welle.
D u. d sind die Durchm. d. Rades u. seines Seiles.
Δ u. δ „ „ „ d. Welle u. ihres „

Formel für die Differentialwelle:

139). $P = \frac{\frac{1}{2} Q (R - r)}{K}$. . siehe Erkl. 234 — P und Q bezeichnen die Kraft und Last, R ist der Radius des stärkeren und r der Radius des dünneren Cylinders, und K die Kurbellänge.

Formeln für die Räderwerke:

140). $r_1 : r_2 = Z_1 : Z_2$ s. Antw. auf Frage 222

141). $P = Q \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{q}{p}$ oder: $P = Q \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{q}{p}$ — siehe Antwort auf Frage 224

Die Radien der beiden ineinandergreifenden Räder sind r_1 resp. r_2. Das Rad r_1 hat auf seinem Umfang Z_1 Zähne, das Rad r_2 hat auf seinem Umfang Z_2 Zähne.
P ist die Kraft, durch welche die Last Q bewältigt werden soll. Die Kraft P wirkt an der Kurbel p, die Last Q wirkt am Wellenhalbmesser q.

142). $P : Q = r_1 . r_2 . r_3 : R_1 . R_2 . R_3$

$P = \frac{r_1 . r_2 . r_3 . Q}{R_1 . R_2 . R_3}$

$Q = \frac{R_1 . R_2 . R_3 . P}{r_1 . r_2 . r_3}$

143). $P : Q = z_1 . z_2 . r_3 : R_1 . Z_1 . Z_2$

$P = \frac{z_1 . z_2 . r_3 . Q}{R_1 . Z_1 . Z_2}$

$Q = \frac{R_1 . Z_1 . Z_2 . P}{z_1 . z_2 . r_3}$

siehe Antwort auf Frage 225

P ist die am Räderwerk wirkende Kraft.
Q ist die am Räderwerk wirkende Last.
R_1, R_2, R_3 . . . sind die Radien der Räder.
r_1, r_2, r_3 . . . sind die Radien der Wellen.
oder:
Z_1, Z_2 . . . sind die Zähnezahlen der Räder.
z_1, z_2 . . . sind die Zähnezahlen der Triebe.

f. Formeln für die schiefe Ebene und die Elementarmaschinen, welche sich als schiefe Ebenen auffassen lassen.

α). Formeln für die schiefe Ebene:

Die Kraft wirkt **parallel der Länge** der schiefen Ebene.

144). $P : Q = h : l$; $P = Q \cdot \frac{h}{l}$; $P = Q . \sin \alpha$. . . siehe Antw. auf Frage 230

145). $S : s = Q : P$; $PS = Qs$. . . siehe Erkl. 255

146). $D : Q = b : l$; $D = Q . \cos \alpha$. . . siehe Antw. auf Frage 231

Die Kraft wirkt **horizontal.**

147). $P = Q \cdot \frac{h}{b}$; $P = Q . \operatorname{tg} \alpha$. . . siehe Antw. auf Frage 232

148). $D = Q \cdot \frac{l}{b}$; $D = \frac{Q}{\cos \alpha}$. . . siehe Antw. auf Frage 233

Die Kraft wirkt **in beliebig schräger** Richtung.

149). $P = \frac{Q . \sin \alpha}{\cos \beta}$

150). $D = \frac{Q . \cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta}$

151). $D = \frac{Q . \cos (\alpha - \beta)}{\cos \beta}$

siehe Antw. auf Frage 235

P bedeutet die Kraft.
Q „ „ Last.
h bezeichnet die Höhe, l die Länge und b ist die Basis der schiefen Ebene.
α ist der Neigungswinkel der schiefen Ebene.
D bezeichnet den, durch die Last Q senkrecht gegen die Länge der schiefen Ebene ausgeübten Druck.
S ist der Kraftweg und s der Weg der Last.
β ist der Winkel, den die schief gerichtete Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene bildet.

β). Formeln für den Keil.

Der Widerstand wirkt normal gegen beide Seiten.

152). $P = \frac{Q \cdot R}{2S}$, $P = \frac{2PS}{R}$. . siehe Antw. auf Frage 242

für den einfachen Keil 153). $P = Q \cdot \frac{R}{S}$, $P = Q \cdot \sin\alpha$

für den doppelten Keil 154). $P = \frac{Q \cdot R}{2S}$, $P = Q \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha$. . siehe Antw. auf Frage 243

Der Widerstand wirkt parallel zu dem Rücken des Keils.

für den doppelten Keil 155). $P = \frac{Q \cdot \frac{1}{2}R}{H}$, $P = Q \cdot \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$

für den einfachen Keil 156). $P = Q \cdot \frac{R}{H}$, $P = Q \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$. . siehe Antw. auf Frage 244

P bedeutet die am Keil wirkende Kraft.
Q bedeutet die am Keil wirkende Last.
R ist der Rücken des Keils und
S ist die Seite des Keils.
α ist der Neigungswinkel an der Spitze des Keils.
H bedeutet die Höhe des Keils.

γ). Formeln für die Schraube:

157). $P : Q = G : U$, $P : Q = G : 2r\pi$, $P = Q \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

158). $P : Q = G : 2R\pi$

siehe Antw. auf Frage 251

P ist die wirkende Kraft.
Q bezeichnet die Last.
G „ „ Ganghöhe.
U ist der Umfang der Schraubenspindel $= 2r\pi$
α bezeichnet den Neigungswinkel.
R ist der Arm, an dem die Kraft wirkt.

Für die Schraube ohne Ende:

159). $P = \frac{Q \cdot g \cdot r}{2k\pi R}$, $P : Q = gr : 2k\pi R$ siehe Antw. auf Frage 256

P bedeutet die Kraft, Q ist die Last, r ist der Radius der Welle und R der Radius des Rades. Die Kurbellänge ist mit k bezeichnet und die Ganghöhe der Schraube mit g.

Für die Differentialschraube:

160). $P : Q = (H - h) : 2R\pi$ siehe Antw. auf Frage 257

P ist die Kraft, Q die Last, die Ganghöhen sind mit H und h bezeichnet, der Kraftweg bei einer Umdrehung $= 2R\pi$.

[illegible]

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klimpert, Richard

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen ... und einem ausführlichen Formelnverzeichnis ; nebst einer Sammlung von 359 gelö sten und ungelösten analogen Aufgaben ; zum Gebrauch an niederen und hö heren Schulen, sowie zum Selbststudium u. Nachschlagen bearbeitet nach

Stuttgart 1888

Bamberg, Staatsbibliothek -- Phys.o.77-d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11846150-3